التطبيقات الخطية

تعريف

ليكن E و F ف.ش على $\mathbb{R}$، نسمي **تطبيق خطي**، التطبيق $F:E\to F$ الذي يحقق:

$$\forall x_1,x_2\in E\ ,\quad f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$$
$$\forall x\in E\ ,\forall\lambda\in K\ ,\quad f\left(\lambda\cdot x\right)=\lambda\cdot f\left(x\right)$$

ينتح من هذا التعريف :

$$f(0_E)=0_F$$
$$\forall x\in E\ ,\ f(-x)=-f(x)$$

مثلا الدوال القابلة للاشتقاق بالاستمرار تألف ف.ش، بحيث تكون فيه عملية الاشتقاق تطبيق خطي داخلي.

- ليكن E ف.ش على K، ولتكن x_1، x_2، ...، x_p أشعة من E . التطبيق $f:K^p\to E$ المعرف من أجل كل $\left(a_1,...,a_p\right)$ من K^p بالشكل : $f(a_1,...,a_p)=a_1x_1+...+a_px_p$ هو أيضا تطبيق خطي .

أمثلة

- التطبيق f المعرف كما يلي :

$$f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\mapsto(2x-y\ ,x\ ,-x+y)$$

هو تطبيق خطي .

بالفعل ، إذا كان $\left(x.y\right)$،$\left(x'.y'\right)$ من $\mathbb{R}^2$.

نبرهن $f\left[\left(x.y\right)+\left(x'.y'\right)\right]\overset{?}{=}f\left(x.y\right)+f\left(x'.y'\right)$.

$$f\left[\left(x,y\right)+\left(x',y'\right)\right]=f\left(x+x',y+y'\right)=$$
$$2(x+x')-(y+y'),(x+x'),(x+x')+(y+y')$$
$$=(2x-y\ ,z\ ,x+y)+(2x'-y',x',x'+y')$$
$$=f(x,y)+f(x'.y')$$

وإذا كان λ من $\mathbb{R}$ و $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$.

نبرهن $f\left(x,y\right)\overset{?}{=}\lambda\left(x,y\right)$

$$f\left[\lambda\left(x,y\right)\right]=f\left(\lambda x,\lambda y\right)=$$
$$=\left(2\lambda x-\lambda y\ ,\lambda x\ ,\lambda x+\lambda y\right)$$
$$=\lambda\left(2x-y\ ,x\ ,x+y\right)=\lambda f\left(x\ ,y\right)$$

ومنه f تطبيق خطي.

تمرين محلول

في الفضاء $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\left\{e_1,e_2,e_3\right\}$، نعتبر الأشعة :

$$v_1=-e_1-e_2+2e_3 \quad , \quad v_2=e_1+2e_2+e_3 \quad , \quad v_3=e_1-e_2$$

1. أدرس الاستقلال الخطي لـ v_1 ، v_2 ، v_3 ، واستنتج بعد الفضاء $\mathrm{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.
2. عين صورة شعاع كيفي (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ بالتطبيق الخطي h . حيث :

$$h(e_1)=v_1 \ , \ h(e_2)=v_2 \quad , \quad h(e_3)=v_3$$

3. عين مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق : $h(x,y,z)+2(x,y,z)=(0,0,0)$.

الحل

لدينا الأشعة : $v_1=(-1,-1,2) \quad , \quad v_2=(1,2,1) \quad , \quad v_3=(1,-1,0)$

1. دراسة الاستقلال الخطي للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 ، والفضاء $\mathrm{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma &=0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma &=0 \\ 2\alpha+\beta &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

والأشعة v_3 ، v_2 ، v_1 مستقلة خطيا. ومنه $\dim \mathrm{V}=3$

2. حساب $h(x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ بالتطبيق الخطي h :

$$h(x,y,z)=h(xe_1+ye_2+ze_3)=x\,h(e_1)+y\,h(e_2)+z\,h(e_3)$$
$$=x(-1,-1,2)+y(1,2,1)+z(1,-1,0)$$

ومنه $$h(x,y,z)=(-x+y+z,-x+2y-z,2x+y)$$

3. الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$: $h(x,y,z)+2(x,y,z)=(0,0,0)$.

$$h(x,y,z)+2(x,y,z)=(0,0,0)$$
$$(-x+y+z,-x+2y-z,2x+y)+2(x,y,z)=(0,0,0)$$
$$(x+y+z,-x+4y-z,2x+y+2z)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+4y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \wedge x=-z$$

$$\ker(h+2\,id_{\mathbb{R}^3})=\langle(1,0,-1)\rangle$$

فضاء التطبيقات الخطية

E,F فضائين منتهيي البعد .

مجموعة كل التطبيقات الخطية من E في F والذي نرمز له بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$ هو فضاء شعاعي على K بالعمليتين $+,\times$ المعرفتين كما يلي:

المجموع: $f+g$: $\forall x\in E,(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

الجداء: λf : $\forall \lambda\in K\ ,\ \forall x\in E\ ,\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

إذا كان E و F منتهيي البعد فإن $\mathcal{L}(E,F)$ منته البعد. ويكون $\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$

حالة خاصة: عندما $F=\mathbb{R}$ ، يسمى الفضاء $\ell(E,F)$ بالفضاء الثنوي dual الذي يرمز له E^* .

$$f \in E^* \quad \Leftrightarrow \quad f: E \to \mathbb{R} \text{ تطبيق خطي}$$

إذا كان E منتهي البعد فإن E^* منته البعد. ويكون $\dim E^* = \dim E$

تركيب تطبيقين خطيين

وإذا كان $u: E \to E'$ و $v: E' \to E''$ تطبيقين خطيين، فإن التركيب $v \circ u : E \to E''$ هو تطبيق خطي.

ولدينا المخطط :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & E' \arrow[r, "v"] & E'' \end{tikzcd}$$

حيث $\forall x \in E \ \ (v \circ u)(x) = v\left(u(x)\right)$

تمرين محلول

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$ ، بالشكل :

$$f(e_1)=(8,1,1) \quad ، \quad f(e_2)=(3,4,3) \quad ، \quad f(e_3)=(2,2,6)$$

ليكن $u = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. احسب $f(u)$ و $(f \circ f)(u)$.

الحل

ليكن $u=(x,y,z)$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. **نحسب** $f(x,y,z)$ **و** $(f \circ f)(u)$:

$$f(u) = f(x,y,z) = x(8,1,1) + y(3,4,3) + z(2,2,6)$$

$$f(x,y,z) = (8x+3y+2z,\ x+4y+2z,\ x+3y+6z)$$

$$(f \circ f)(u) = f\left(f(x,y,z)\right) = f\,(\underbrace{8x+3y+2z}_{x'}, \underbrace{x+4y+2z}_{y'}, \underbrace{x+3y+6z}_{z'})$$

$$f^2(x,y,z) = f(x',y',z') = (8x'+3y'+2z',\ x'+4y'+2z',\ x'+3y'+6z')$$

$$f^2(x,y,z) = (69x+42y+34z,\ 14x+25y+22z,\ 17x+33y+44z)$$

قضية

- E و F ف.ش على $\mathbb{R}$ ، $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس لـ E إذا كانت w_1 ، w_2 ، ... ، w_n أشعة من F ، فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: E \to F$ يحقق: $\forall i \ \ f(v_i) = w_i$
- E و F ف.ش على $\mathbb{R}$.

$\dim E = \dim F \ \Leftrightarrow$ يوجد تشاكل خطي f (تقابلي وخطي) بين E و F .

- وإذا كان F ف.ش على K و $\dim E = n$ ، فإنه يوجد تشاكل خطي بين $\mathbb{R}^n$ و E .
- إذا كان f ت. خ تشاكل فإن f^{-1} هو أيضا تشاكل.

صورة شعاع بتطبيق خطي

يكون f تطبيق خطي من E في F إذا كانت صورة أي شعاع من الشكل $u=x_1e_1+...+x_1e_n$ من E هي :

$$f(u)=f(x_1e_1+...+x_1e_n)=x_1f(e_1)+....+x_nf(e_n)$$

أي الصورة $f(E)$ هي الفضاء الجزئي المولد بـ$f(e_1)$ ،...، $f(e_n)$.

مثلا في الأساس القانوني لـ$\mathbb{R}^3$ ، نعتبر التطبيق $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ المعرف بصور أشعة أساسه كما يلي :

$$f(e_1)=(1,1)\ ,\ f(e_2)=(3,-1)\ ,\ f(e_3)=(1,0)$$

التطبيق f تعرف تماما . لأنه إذا كان $(x,y,z)=xe_1+ye_g+ze_3$ من $\mathbb{R}^3$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3)=x\,f(e_1)+y\,f(e_2)+z\,f(e_3)\\&=x(1,1)+y(3,-1)+z(1,0)=(x+3y+z\ ,\ x-y)\end{aligned}$$

ومنه التطبيق :

$$\begin{aligned}f&=\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\\(x,y,z)&\mapsto(x+3y+z,x-y)\end{aligned}$$

- إذا كانت الأشعة $x_1,...x_n$ أشعة مرتبطة في E فإن صورها $f(x_1),...,f(x_i)$ تكون أيضا مرتبطة في F.

بالفعل إذا كانت الأشعة $x_1,...x_n$ من E مرتبطة، فإنه توجد سلميات $\lambda_1,\lambda_g,...,\lambda_n$ ليست كلها معدومة ، أي يوجد على الأقل λ_{i_0} غير معدوم $i_0\ni\{1,2,\cdots,n\}:\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n=0_E$.

إذن $$f(\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n)=\lambda_1f(x_1)+...+\lambda_nf(x_n)=f(0_E)=0_F$$

العبارة المعدومة $\lambda_1f(x_1)+...+\lambda_nf(x_n)=f(0_E)=0_F$ تحققت مع وجود أحد المعاملات غير معدوم $(\lambda_{i_0}\neq0)$

عموما، عكس هذه القضية، غير صحيح، إلا إذا كان f متباينا.

صورة فضاء جزئي بتطبيق خطي

$E\xrightarrow{f}F$ تطبيق خطي

إذا كان E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ فضاء شعاعي جزئي من F.

$$f(E')=\{y\in F\,/\,y=f(x)\ \ x\in E'\}$$

وإذا كان $E=E'$ فإن $f(E)$ يسمى **صورة التطبيق الخطي** f نرمز له $\operatorname{Im}f=f(E)$

$$=\{y\in F:y=f(x)\quad/x\in E\}$$

ملاحظة f غامر إذاا $\operatorname{Im}f=F$

فضاء الصورة العكسية

$f:E\to F$ تطبيق خطي.

إذا كان F' فضاء شعاعي من F فإن $f^{-1}(F')$ فضاء شعاعي جزئي من E.

لدينا: $$x\in f^{-1}(F')\iff f(x)\in F'$$

وعندما $F'=\{0_F\}$، يُسمى الفضاء الشعاعي الجزئي $f^{-1}\{0\}$ **نواة التطبيق** f ونرمز له بالرمز $\ker f$.

$$\begin{aligned}\ker f &= f^{-1}(\{0_F\}) = f^{-1}(0_F)\\ &= \{x \in E : f(x) \in \{0_F\}\}\\ &= \{x \in E : f(x) = 0_F\}\end{aligned}$$

تمرين محلول

نعتبر التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x + y, x)$$

تعيين $\operatorname{Im} f$ و $\ker f$

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\ker f \ni (x, y) = (2x - y, x + y, x) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

ومنه $\ker f = \{(0, 0)\}$.

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2)\rangle\\ &f(e_1) = (1, 0) = (2, 1, 1)\\ &f(e_2) = (0, 1) = (-1, 1, 0)\\ &\operatorname{Im} f = \langle (2,1,1), (-1,1,0)\rangle\end{aligned}$$

3.4 التفكيك القانوني لتطبيق خطي

E و F فضائين شعاعيين على K منتهيي البعد، و $f : E \to F$ تطبيق خطي.

$\ker f$ فضاء شعاعي جزئي على E و $\operatorname{Im} f$ فضاء شعاعي جزئي على F.

$E/\ker f$ فضاء شعاعي على K :

ينتج من كون :

$j \in \mathcal{L}(E, E/\ker f)$ تطبيق خطي غامر قانوني (من تعريف حاصل القسمة)

$\pi \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, F)$ تطبيق خطي متباين قانوني (لأن $F \supset \operatorname{Im} f$)

أن $f \in \mathcal{L}(E/\ker f, \operatorname{Im} f)$ تشاكل خطي . (يتم بإثبات أن التطبيق $f : \bar{x} \mapsto f(x)$، خطي ومتباين وغامر)

ومنه مخطط تركيب هذه التطبيقات :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & E/\ker f \arrow[r, "f"] & \operatorname{Im} f \arrow[r, "\pi"] & F \end{tikzcd}$$

التطبيق الخطي f يتفكك إلى $\pi \circ f \circ j$. أي $f = \pi \circ f \circ j$

$$E \ni x \mapsto f(x) = (\pi \circ f \circ j)(x) = \pi(f(j(x))) \in F$$

حالتان **خاصتان**

- f غامر (أي في حالة $F=\operatorname{Im} f$) $\Leftrightarrow$ يوجد تشاكل ما بين F و $E/\ker f$ رمزيا : $E/\ker f \approx F$
- f متباين (أي في حالة $E\equiv \operatorname{Im} f$) $\Leftrightarrow$ يوجد تشاكل ما بين E و $\operatorname{Im} f$ رمزيا : $E\approx \operatorname{Im} f$

بعد فضاء حاصل القسمة

إذا كان E فضاء شعاعيا على K، منته البعد، و F فضاء شعاعي جزئي من E . فإن:

$$\dim E/F' = \dim E - \dim F'$$

نتيجة (نظرية البعد)

E و F فضائين شعاعيين على K و $f: E \to F$ تطبيق خطي.

إذا كان الفضاء E منته البعد ، فإن $\dim E = \dim\ \ker f + \operatorname{rg} f$.

مثال

$\{u_1,u_2,u_3\}$ و $\{e_1,e_2\}$ الأساسان القانونيان لـ$\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ على الترتيب.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $f(x,y,z)=(-x+2y+z\ ,x-2y-z\ )$

الفضاء الجزئي $\ker f$:

الأشعة (x,y,z) من $\ker f$ تحقق: $f(x,y,z)=(0,0)$.

$$(-x+2y+z\ ,x-2y-z\ )=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x+2y+z=0\\ x-2y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow x-2y-z=0$$
$$\Leftrightarrow z=x-2y$$

إذن الشعاع (x,y,z) من $\ker f$ يأخذ الشكل:

$$(x,y,x-2y)=x\underbrace{(1,0,1)}_{a}+y\underbrace{(0,1,-2)}_{b}$$

والفضاء $\ker f$ مولد بالشعاعين المستقلين a و b ، أي $\ker f=\langle(1,0,1);(0,1,-2)\rangle$.

الفضاء الجزئي $\operatorname{Im} f$:

الصورة $(w_1,w_2)=f(x,y,z)$ تنتمي إلى فضاء الصورة $\operatorname{Im} f=f(\mathbb{R}^2)$، ومنه :

$$(w_1,w_2)=(-x+2y+z\ ,x-2y-z\ )$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}w_1=-x+2y+z\\ w_2=+x-2y-z\end{cases} \Leftrightarrow w_1+w_2=0 \Leftrightarrow w_1=-w_2$$

إذن صورة الشعاع (x,y,z) بالتطبيق f تأخذ الشكل:

$$(w_1,w_2)=(w_1,-w_1)=w_1\underbrace{(1,-1)}_{c}$$

والفضاء $\operatorname{Im} f$ مولد بالشعاع المستقل c، أي $\operatorname{Im} f=\langle(1,-1)\rangle$.

ومنه صحة العلاقة: $\dim\mathbb{R}^3=\dim\ker f+\operatorname{rg} f=2+1=3$

بعد مجموع فضائين شعاعيين

E فضاء شعاعي منته البعد، F و G ف.ش.ج من E . نعلم بأن $F\cap G$ و $F+G$ فضائين جزئيين من E

إن $$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$$

تمرين محلول

نعتبر الفضائين الجزئيين الإضافيين: $\mathrm{F}=\langle (2,1,0),(0,1,1)\rangle$ و $\mathrm{G}=\langle (1,1,1)\rangle$ في $\mathbb{R}^3$.

ونعرف التطبيق الخطي f بالشكل :

$$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^3=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}\rightarrow\mathbb{R}^3 \\ \quad u=u_1+u_2\mapsto u_1 \qquad\qquad (u_1\in\mathrm{F},\ u_2\in\mathrm{G}) \end{array}$$

ليكن (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$. عبر عن $f(x,y,z)$ بدلالة x و y و z .

الحل

لدينا $$\mathrm{F}+\mathrm{G}\ni u=(x,y,z)=u_1+u_2=\underbrace{\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)}_{u_1}+\underbrace{\delta(1,1,1)}_{u_2}$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 2\alpha+\delta &= x \\ \alpha+\beta+\delta &= y \\ \beta+\delta &= z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ (2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(x,y,z)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \alpha=y-z \\ \beta=-x+2y-z \\ \gamma=x-2y+2z \end{cases}$$

ومنه $$f(x,y,z)=(y-z)(2,1,0)+(-x+2y-z)(0,1,1)$$

وأخيرا $$f(x,y,z)=(2y-2z,-x+3y-2z,-x+2y-z)$$