الفضاءات الشعاعية

بنية الفضاء الشعاعي الجمع الشعاعي "+" عملية داخلية في مجموعة الأشعة V . وهذه العملية تزود V ببنية زمرة تبديلية. وعملية ضرب **شعاع بعدد سلمي** "·" هي عملية خارجية في مجموعة الأشعة V . وهي تحقق:

$$\begin{cases} \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \\ \alpha(\beta x)=(\alpha.\beta)x \\ 1x=x \end{cases}$$

نقول عن مجموعة الأشعة V المزودة بهاتين العمليتين بأنها فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

تعريف ليكن K حقل تبديلي، نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين (+) و (·) إنها فضاء شعاعي على الحقل K (**ف.ش** على K) إذا تحقق: $(E,+)$ زمرة تبديلية، والعملية الخارجية $(\cdot)$ على K تحقق :

$$\forall\alpha\in K \quad \forall x,y\in E \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

$$\forall\alpha,\beta\in K \quad \forall x\in E \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

$$\forall\alpha,\beta\in K \quad \forall x\in E \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$\forall x\in E \qquad 1\cdot x=x$$

(1 هو عنصر الوحدة في K^* ، تُسمى عناصر ف. ش **أشعة**، وتُسمى عناصر الحقل **سلميات**).

أمثلة – المستقيم الشعاعي والمستوي الشعاعي والفضاء الشعاعي المألوف كلها فضاءات شعاعية على $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هما ف ش على $\mathbb{R}$. وبصورة عامة $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\,\text{fois}}$ هو ف. ش على الحقل $\mathbb{R}$

من أجل $\lambda\in\mathbb{R}$ و $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ، $x'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ من $\mathbb{R}^n$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n) \quad \text{و} \quad x+x'=(x_1+x'_1,x_2+x'_2,\cdots,x_n+x'_n)$$

- $E=\mathbb{R}[X]$ مجموعة كثيرات الحدود ذات المتغير X والمعاملات في الحقل $\mathbb{R}$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ بالعمليتين: الجمع المألوف لكثيرات الحدود من $\mathbb{R}[X]$ والعملية الخارجية: $(\lambda P)(X)=\lambda P(X)$ ، $\lambda\in\mathbb{R},\ P\in\mathbb{R}[X]$

ملاحظة إذا كان E_1 و E_2 ف. ش على نفس الحقل K، فإنه بالإمكان أن نعرف على $E_1\times E_2$ بنية ف. ش :

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \quad \text{و} \quad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

الفضاء الشعاعي الجزئي نسمي فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E (على الحقل K)، كل مجموعة جزئية F غير خالية من E تتحقق على نفسها بنية الفضاء الشعاعي. أو F ف. ش. جزئي من E إذا تحقق:

$$\forall\alpha\in K,\forall x\in F:\ \alpha x\in F \quad \text{و} \quad \forall x\in F,\forall y\in F:\ x+y\in F \quad \text{و} \quad (E\supset)F\neq\varnothing$$

أمثلة – E و $\{0_E\}$ فضائين شعاعيين جزئيين من E .

- $\mathbb{R}[X]$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$. $P_n=\{P\in\mathbb{R}[X]: deg(P)\leq n\}$ مجموعة كثيرات الحدود من $\mathbb{R}[X]$ التي درجتها على الأكثر n هي ف.ش.ج من $\mathbb{R}[X]$.
- في $\mathbb{R}^3$، المجموعة $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ لها بنية ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.
  - نلاحظ بأن $F\ni(0,0,0)$ ، ومنه $F\neq\varnothing$.
  - ليكن (x,y,z) و (x',y',z') من F. هل $(x,y,z)+(x',y',z')\in F$ ؟

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$F\ni(x',y',z'):\quad \underline{2x'+y'-z'=0}$$
$$2(x+x')+(y+y'-(z+z')=\ 2x''+y''-z''=0$$

هذا يعني أن شعاع المجموع $F\ni(x',y',z')+(x',y',z')=(x'',y'',z'')$

  - ليكن (x,y,z) من F و λ من $\mathbb{R}$. هل $\lambda(x,y,z)\in F$ ؟

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$\mathbb{R}\ni\lambda:\quad \underline{\lambda\qquad\qquad}$$
$$\lambda(2x+y-z)=\lambda 0=0$$
$$2(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z)=\lambda 0=2x''+y''-z''=0$$

ومنه $F\ni\lambda(x,y,z)=(x'',y'',z'')$ إذن F ف. ش. ج من $\mathbb{R}^3$.

- نعتبر مجموعة الأشعة من الشكل: λa حيث $0\neq a\in E$

نرمز لهذه المجموعة بـ $D_a=\{x\in E, \exists\lambda\in K : x=\lambda a\}$. إن D_a فضاء شعاعي جزئي من E.

يسمى D_a **بالفضاء الشعاعي الجزئي** (من E) **المولد** بـ$\{a\}$. ونرمز له بـ $K\,a$.

قضية ليكن E فضاء شعاعي على K. و F مجموعة جزئية غير خالية من E. لدينا :

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in F,\quad \alpha x+\beta y\in F \quad\Leftrightarrow\quad \text{ف.ش.ج من } E \quad F$$

العبارة الخطية ليكن E ف. ش على الحقل K . ولتكن الأشعة a_1، a_2، ...، a_n من E.

العبارة الخطية للأشعة a_1، a_2، ...، a_n، هي كل كتابة من الشكل $\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$ حيث λ_1، λ_2، ...، λ_n سلميات. العبارة الخطية للأشعة a_1، a_2، ...، a_n ما هي إلا شعاع x من E بحيث: $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

مثلا نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الأشعة: $z=(-3,1,4)$ ، $y=(0,1,-1)$ ، $x=(1,2,3)$. العبارة الخطية $2x-y+3z$ هي الشعاع V من $\mathbb{R}^3$: $V=2x-y+3z=2(1,2,3)-(0,1,-1)+3(-3,1,4)=(-1,6,19)$

فضاء مولد بشعاعين ليكن E فضاء شعاعي على K. b و a من E. نعتبر الفضائين الشعاعيين المولدين بـa و b.

يسمى المجموع $K\cdot a+K\cdot b$ **بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد** بالمجموعة $\{a,b\}$. ونكتب $K\,b+K.a=(\{a,b\})$

إذا كانت a_1، a_2، ...، a_n أشعة من E، فإن كل العبارات الخطية في الأشعة a_1، a_2، ...، a_n هي فضاء جزئي من E، يسمى هذا الفضاء بالفضاء المولد بهذه الأشعة. أي $K\,a_1+K\,a_2+\cdots+K\,a_n=\langle\{a_1, a_2,\cdots, a_n\}\rangle$

تعريف الفضاء المنته ليكن E ف. ش على الحقل K. و A مجموعة جزئية من E.

إن الفضاء الشعاعي المنته المولد بـ A، هو مجموع العبارات الخطية المنتهية في عناصر A، ونرمز له بـ$\langle A\rangle$ أو (A) :

$$x \in (A) \iff \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \quad : \quad x = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K \end{cases}$$

تقاطع فضائين جزئيين إذا كان E فضاء شعاعي على K. و F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E.

إن $F_1 \cap F_2$ فضاء شعاعيا من E. $F_1 \cap F_2 = \{ x \in E , x \in F_1 \wedge x \in F_2 \}$

وبصورة عامة، تقاطع عدد منته من الفضاءات الجزئية هو فضاء شعاعي جزئي. غير أن الاتحاد $F_1 \cup F_2$ ليس فضاء شعاعيا على العموم. مثلا، في $\mathbb{R}^2$، إذا اعتبرنا الفضائين الجزئيين :

$F_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \}$ و $F_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \}$ ،

واخترنا على سبيل المثال الشعاعين $(1,0)$ و $(0,1)$ من $F_1 \cup F_2$، فسيكون مجموعهما خارج هذا الاتحاد.

وبالتالي $F_1 \cup F_2$ ليس ف.ش.ج من $\mathbb{R}^2$.

قضية $F_1 \cup F_2$ ف.ش.ج من E $\iff$ $F_1 \subseteq F_2$ أو $F_2 \subseteq F_1$.

مجموع فضائين جزئيين نعتبر المجموعة $E = F_1 + F_2$ حيث: $z = x + y \;:\; \exists x \in F_1 , \exists y \in F_2 \iff z \in E$

- إذا كان z و w من E. فإنه يوجد (x_1, y_1) و (x_1, y_2) من $F_1 \times F_2$:

$$w = (x_2, y_2) \quad z = (x_1, y_1)$$

$$z + w = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in F_1 + F_2$$

- إذا كان z من E و λ من K فإنه يوجد $x \ni F_1$ و $y \ni F_2$ بحيث $z = x + y$

ويكون لدينا $\lambda z = \lambda (x , y) = (\lambda x , \lambda y) \in F_1 \times F_2$

ومنه $E = F_1 + F_2$ ف.ش من E.

وعندما يكون $F_1 \cap F_2 = \{0\}$، يسمى الفضاء الشعاعي الجزئي $F_1 + F_2$ **بالمجموع المباشر** لـ F_1 و F_2.

ونرمز له بالرمز $F_1 \oplus F_2$. ونقول أيضا أن F_1 **إضافي** لـF_2 في E ، أو F_1 و F_2 إضافيان في E .

الارتباط الخطي والاستقلال ليكن E ف.ش على الحقل K . ولتكن الأشعة a_1، a_2، ...، a_n من E.

- تكون الأشعة a_1، a_2، ...، a_n مرتبطة خطيا $\iff$ وُجد n سلمي : λ_1، λ_2، ...، λ_n ليست كلها معدومة بحيث: $\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0_E$
- وتكون هذه للأشعة a_1، a_2، ...، a_n مستقلة خطيا إن لم تكن مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة a_1، a_2، ...، a_n مستقلة خطيا $\iff$ من أجل كل n سلمي: λ_1، λ_2، ...، λ_n يتحقق الاستلزام:

$$\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

أمثلة – في $E=\mathbb{R}^2$، يكون الشعاعان $(1,1)$ و $(-7,3)$ مستقلين خطيا.

- في $E=\mathbb{R}^n$، تكون الأشعة $e_1=(1,0,\cdots,0)$ ، $e_2=(0,1\ 0,0,\cdots,0)$،...، $e_n=(0,0,\cdots,0,1)$ مستقلة خطيا.
- في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}[x]$ على $\mathbb{R}$ تكون ... $x, x^2, x^3,$ مستقلة خطيا.
- في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، ندرس استقلال الأشعة :

$$v_1=(-1,-1,2) \quad , \quad v_2=(1,2,1) \quad , \quad v_3=(1,-1,0)$$

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$:

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow$$
$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma & =0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma & =0 \\ 2\alpha+\beta & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه الأشعة v_3 ، v_2 ، v_1 مستقلة خطيا.

حالتان خاصتان :

إذا كان $0_E \in A$ فإن A مرتبطة.

كل شعاع غير معدوم يكون مستقلا خطيا.

قضية a_1،a_2،...،a_n أشعة من E . و F هو الفضاء المولد بهذه الأشعة.

الشرطان الآتيان متكافئين :

1. الأشعة a_1،a_2،...،a_n مستقلة خطيا
2. كل شعاع x من F ، يُكتب كعبارة خطية وحيدة في الأشعة a_1،a_2،...،a_n,

أي توجد سلميات وحيدة : λ_1،λ_2،...،λ_n بحيث: $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

الأساس E ف ش على K و $\mathcal{B}\subset E$. نقول عن $\mathcal{B}$ أنه **أساس** لـ E إذا كانت $\mathcal{B}$ تُولد E و $\mathcal{B}$ مجموعة مستقلة خطيا وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

إذا كانت المجموعة $\mathcal{B}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ أساسا لفضاء شعاعي E، فإن الأشعة a_1،a_2،...،a_n مستقلة وتولد E .
وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

الكتابة الآتية وحيدة : $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

تسمى **السلميات** λ_1،λ_2،...، λ_n بمركبات الشعاع x في الأساس $\mathcal{B}$. ونكتب $x_{|\mathcal{B}}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

مثال في الفضاء $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، تكون الأشعة : e_1 و e_1+e_2 و $e_1+e_2+e_3$ تشكل أساسا آخر لـ$\mathbb{R}^3$.

بعد فضاء شعاعي E ف.ش على K . $\mathrm{card}\,\mathcal{B}$ يمثل عدد عناصر المجموعة $\mathcal{B}$.

إذا كان $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ أساسين لـ E ، فإن $\mathrm{card}\,\mathcal{B}_1 = \mathrm{card}\,\mathcal{B}_2$

إذا كان $\mathcal{B}$ أساس لـ E ، فإن $\mathrm{card}\,\mathcal{B}$ يسمى **بعد** E ، ونرمز له بـ $\dim E$.

- E ف.ش بعده n $\Leftrightarrow$ E يقبل أساسا $\mathcal{B}$: $\dim E = \mathrm{card}\,\mathcal{B} = n$

مثلا على الحقل $\mathbb{R}$ ، يكون: $\dim \mathbb{R} = 1, \quad \dim \mathbb{R}^2 = 2, \cdots, \quad \dim \mathbb{R}^n = n$

- كل فضاء جزئي F من E ، يكون بعده منته ويحقق $\dim F \le \dim E$.

ولدينا $\qquad E = F \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim F$

مثال **لنعين** أساساً للفضاء الجزئي : $\mathrm{F} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = y - z \}$

لدينا $\mathrm{F} \ni (x, y, z) : \ x - y + z = y - z \ \Leftrightarrow \ x - 2y + 2z = 0 \ \Leftrightarrow \ 2y = x + 2z$

$$\Leftrightarrow \ (x, y, z) = (x, \tfrac{x}{2} + z, z) = \tfrac{x}{2}(2,1,0) + z(0,1,1)$$

ومنه $\qquad \mathrm{F} = \langle (2,1,0), (0,1,1) \rangle$

- لنبين أن $\mathrm{G} = \langle (1,1,1) \rangle$ هو **فضاء إضافي** لـ F في $\mathbb{R}^3$.

لنثبت أن $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{ 0_E \}$. ليكن شعاع كيفي من التقاطع $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ ، فهذا الشعاع سيكتب كعبارة خطية وحيدة في كلا أساسيي F و G . فيكون:

$$\begin{array}{l} F \ni X \ , \ \ X = \alpha(2,1,0) + \beta(0,1,1) \\ G \ni X \ , \ \ X = \gamma(1,1,1) \end{array}$$

حيث α و β و γ من $\mathbb{R}$

إذن $\alpha(2,1,0) + \beta(0,1,1) = \gamma(1,1,1) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 0 = 2\alpha - \gamma \\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ 0 = \beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \ \alpha = \beta = \gamma = 0$

ومنه $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{ 0_E \}$ ولدينا أيضا $\mathrm{F+G} = \langle (2,1,0), (0,1,1), (1,1,1) \rangle$ ومنه F و G إضافيين في $\mathbb{R}^3$.

- يمكن أن ندرس استقلالية الأشعة $(1,1,1)$ ، $(0,1,1)$ ، $(2,1,0)$:

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$ ، يكون لدينا

$$(2\alpha + \delta, \alpha + \beta + \delta, \beta + \delta) = (0,0,0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \delta &= 0 \\ \alpha + \beta + \delta &= 0 \\ \beta + \delta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ \alpha = \beta = \delta = 0$$

ومنه الأشعة $(1,1,1)$ ، $(0,1,1)$ ، $(2,1,0)$ مستقلة خطيا. والفضائين F و G إضافيين في $\mathbb{R}^3$.

خلاصة: الأشعة الثلاثة مستقلة وتولد $\mathbb{R}^3$ فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ ، والمجموع $\mathrm{F+G}$ مباشر في $\mathbb{R}^3$.

ومنه $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$. نلاحظ بأن: $\dim(\mathrm{F+G}) = \dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

تعريف الرتبة E فضاء شعاعي بعده n . و $v_1, v_2, \ldots, v_p$ أشعة من E نرمز بـ F للفضاء المولد بهذه الأشعة.

يسمى العدد الأعظمي من الأشعة المستقلة خطيا المأخوذة من بين الأشعة $v_1,v_2,...,v_p$ **رتبة** $\{v_1,...,v_p\}$ ، ونكتب $r=\mathrm{rg}F=\mathrm{rg}\{v_1,...,v_p\}$. إذا كان $r=\mathrm{rg}F$ ، فإنه يكون لدينا $r\le n$ و $r\le p$.

حالة خاصة: عندما تكون الأشعة $v_1,v_2,...,v_p$ مستقلة خطيا $\mathrm{rg}F=\dim F=n$

الفضاء الإضافي E ف.ش على K . ليكن F ف.ش.ج من E

نقول عن الفضاء الجزئي F' بأنه إضافي لـ F في E، إذا كان $E=F+F'$ و $F\cap F'=\{0\}$

ونكتب $E=F\oplus F'$، أي المجموع $E=F+F'$ مباشر.

يمكن أن نصوغ المجموع المباشر لـ $F_1,F_2,\cdots,F_n$ بالكتابة $E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_n$.

وعندئذ كل x من E يكتب بشكل وحيد :

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n \quad \text{حيث} \quad x_j\in F_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

مثال بفرض أن $\dim E=n$ و F ف.ج: $\dim F=p$ و F' ف.ج إضافي لـ F في E : $\dim F'=p'$

يكون $E=F\oplus F'$. ولدينا $\dim E=\dim(F\oplus F')$

$$n=\dim E=\dim F+\dim F=p+p'$$

قضية إذا كان F',F ف.ش.ج من فضاء شعاعي منته البعد E . يكون لدينا :

$$\dim(F+F')=\dim F+\dim F'-\dim(F\cap F')$$

المجموع $F+F'$ مباشر $\Leftrightarrow \dim(F+F')=\dim F+\dim F'$

$$E=F\oplus F' \Leftrightarrow \begin{cases}E=F+F'\\ F\cap F'=\{0_E\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dim=\dim F'\\ F\cap F'=\{0_E\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}E=F+F'\\ \dim E=\dim F+\dim F'\end{cases}$$

إكمال أساس فضاء شعاعي كل ف.ش.ج F من E يقبل ف.ش.ج. F إضافي في E

وهذا الفضاء ليس وحيدا. للسهولة نختار أشعة أساس F' من أشعة أساس الفضاء E فيكون $E=F\oplus F'$ ومنه $\dim F'=\dim E-\dim F$. وإذا كان $E=F\oplus F'$ و $\mathcal{B}$ أساس لـ F ، $\mathcal{B}'$ أساس لـ F' $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$ يكون أساس لـ E