Chapitre 4

Calcul matriciel

Pour bien aborder ce chapitre

Tout est dit dans le théorème 24.21 page 908 du chapitre 24...si on se fixe une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $f = (f_1, \dots, f_q)$ de F alors une application linéaire $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est entièrement déterminée par les composantes des vecteurs $u(e_i)$ dans la base f. Ces pq scalaires définissent complètement u. Il est tentant de les représenter dans un tableau. Si on note, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_j$ alors on peut écrire :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \prec f_1 \\ \vdots \\ \prec f_i \\ \vdots \\ \prec f_q \end{array} \end{array}$$

Ce tableau est la matrice de u dans les bases e de E et f de G. Se posent alors des questions naturelles :

1. Si on effectue cette manipulation pour deux applications linéaires u et v, comment se calcule la matrice correspondante à $\alpha u + \beta v$? On verra qu'on peut définir une addition entre les matrices et une multiplication par un scalaire. Avec ces deux lois, l'ensemble des matrices (de même taille) possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si u et v sont deux endomorphismes de E, quel est le lien entre la matrice de $u \circ v$ et celles de u et v ? Pour l'expliciter, on définira le produit entre les matrices.
3. Peut-on calculer le rang d'une application linéaire facilement à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est oui et l'outil est le pivot de Gauss.
4. Peut-on par un procédé calculatoire déterminer si un endomorphisme est inversible à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est là aussi oui et l'outil consistera en le déterminant.
5. Pour un endomorphisme inversible, existe-t'il un procédé permettant de calculer la matrice de son inverse ? Cet outil existe et il est donné par la comatrice.
6. Si on prend d'autres bases e' et f' de E et F, peut-on calculer la matrice de u dans ces nouvelles bases en fonction de sa matrice dans les bases initiales ? La réponse est encore positive et on mettra en place des formules de changement de bases.
7. Enfin, pour un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, existe-il une base de E dans laquelle la matrice de u prend une forme simple et facile à manipuler ? La réponse sera donnée en spé dans le chapitre sur la réduction des endomorphismes.

Au niveau historique, on peut indiquer qu'au 3$^{\text{e}}$ siècle, le mathématicien chinois Liu Hui résolvait les systèmes linéaires ayant jusqu'à 6 inconnues. Il représentait ces systèmes grâce à des tableaux et avait découvert la méthode qu'on appelle maintenant pivot de Gauss pour les résoudre. Au 17$^{\text{e}}$ siècle, toujours pour résoudre des systèmes linéaires, Leibniz invente le déterminant. Cette notion est approfondie par Cramer qui découvre soixante ans plus tard la méthode qui porte maintenant son nom. Il faut attendre le 19$^{\text{e}}$ siècle, pour que la notation matricielle sous forme de « rectangle (ou carré) de nombres » apparaisse. Gauss découvre le produit matriciel en dimension 3 et indique que la formule se généralise dans les autres dimensions mais sans détailler. Sylvester, le premier, dénomme ces rectangles de nombres du mot « matrix ».

Dans tout ce chapitre, m, n, p, q, r sont des entiers positifs, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

25.1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$

25.1.1 Définitions

DÉFINITION 25.1 ♡ **Matrice**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice à q lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application :

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$$

que l'on note :

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \text{colonne } j & \phantom{a_{1p}} \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \text{ligne } i
\end{array}$$

– Le coefficient de A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$:

1. i représente l'indice de ligne.
2. j représente l'indice de colonne.

– On dit aussi que A est une matrice $q \times p$ ou une matrice (q,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
– On note $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notation 25.1 On notera aussi $[A]_{ij}$ le coefficient a_{ij} de A.

DÉFINITION 25.2 **Vecteur ligne, vecteur colonne d'une matrice**
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{q,1} & \dots & a_{q,p} \end{pmatrix}$$

on appelle, pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$:
– i-ème *vecteur ligne* de A le p−uplet $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.
– j-ème *vecteur colonne* de A le q−uplet $C_j\ (a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

DÉFINITION 25.3 **Matrice ligne, matrice colonne**
– Une *matrice colonne* est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.
– Une *matrice ligne* est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

DÉFINITION 25.4 ♡ **Matrice nulle**
On dit que $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On la note : $0_{\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})}$ ou 0 lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

DÉFINITION 25.5 ♡ **Matrice carrée**
Une matrice possédant autant de lignes que de colonnes est dite *carrée*. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

DÉFINITION 25.6 ♡ **Matrice identité**
On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale et qui valent 1.

Exemple 25.2 $\mathrm{I}_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

25.1.2 L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

On munit $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Le triplet $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

PROPOSITION 25.1 ♡ **Somme de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire**

– Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j}), \mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit A + B comme étant la matrice $\mathrm{C} = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

– Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot \mathrm{A}$ comme étant la matrice $\mathrm{D} = (d_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Muni de ces deux lois $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Démonstration : Laissée au lecteur. On vérifie aisément les différents axiomes définissant un espace vectoriel.

Exemple 25.3

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

DÉFINITION 25.7 ♡ **Matrices élémentaires**

Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit la *matrice élémentaire* $\mathrm{E}_{i,j} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \text{colonne } j & \\ \downarrow & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & \boxed{1} & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{ligne } i \end{array}$$

Tous les coefficients de la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Exemple 25.4 Les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{E}_{1,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

À titre d'exercice, et pour préparer le théorème suivant, montrer que cette famille de 6 matrices constitue une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 25.2 ♡ **Base canonique de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$**

La famille formée par les matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que :

$$\boxed{\dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration

- *Prouvons que cette famille est libre. Soient* $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}=0$. *Alors on a l'égalité :*
$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,p}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{q,1} & \dots & \alpha_{q,p}\end{pmatrix}=0.$$
Par identification des coefficients de ces deux matrices, on a : $\forall i\in[\![1,q]\!],\quad \forall j\in[\![1,p]\!],\quad \alpha_{i,j}=0$ *ce qui prouve la liberté de la famille* $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)$.
- *Montrons que cette famille est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Soit* $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *On a clairement :* $\mathrm{A}=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$. *Ce qui prouve que la famille* $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)$ *est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

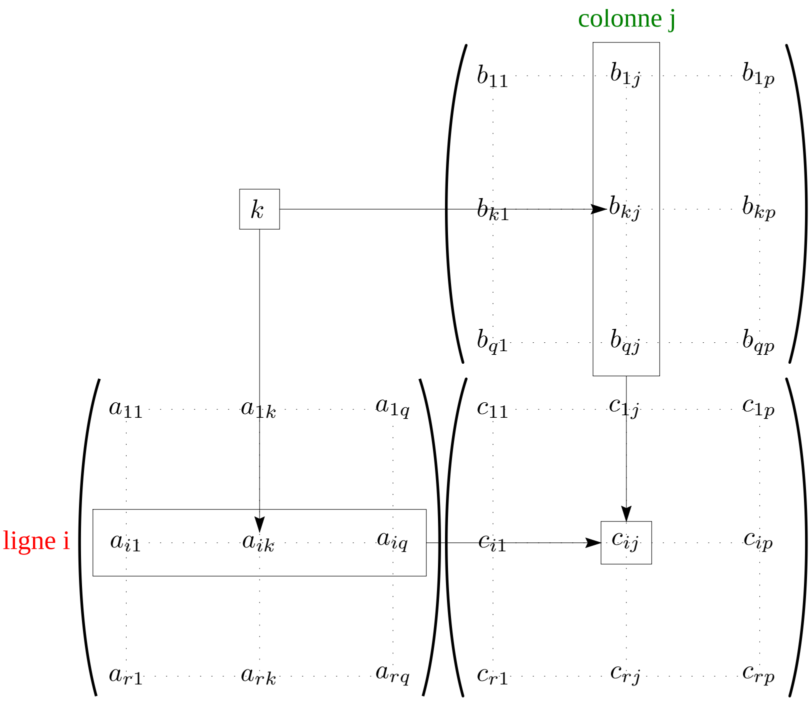
25.1.3 Produit matriciel

On définit maintenant, quand c'est possible, le produit de deux matrices. Le théorème 25.10 page 957 explicite le sens de ce produit, il correspond en fait à la composition des applications linéaires.

DÉFINITION 25.8 ♡ **Produit matriciel**

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice C de $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i\in[\![1,r]\!]\quad \forall j\in[\![1,p]\!]\quad c_{i,j}=[\mathrm{AB}]_{i,j}=\sum_{k=1}^{q}a_{i,k}b_{k,j}$$



⚠ *Attention 25.5* On ne peut effectuer le produit de $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}\in\mathfrak{M}_{q',p}(\mathbb{K})$ que si $q=q'$!

Exemple 25.6 Si $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\1&-3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ alors $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&4&2\\-1&-5&-3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\end{pmatrix}$. Remarquons qu'en général, le produit AB peut exister sans que ce ne soit forcément le cas pour le produit BA.

Il est souvent utile dans les exercices de savoir multiplier les matrices élémentaires. Pour ce faire introduisons le symbole de Kronecker.

DÉFINITION 25.9 ♡ **Symbole de Kronecker**
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

THÉORÈME 25.3 ♡♡♡ **Produit de matrices élémentaires**
Pour deux matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{kl}E_{pq} = \delta_{lp}E_{kq}}$$

Démonstration *Par un calcul direct.*

PROPOSITION 25.4 **Règles de calculs avec les matrices**
Quant les produit suivants sont possibles, pour des matrices A, B, C et des scalaires α, β :

1. Le produit matriciel est distributif à gauche par rapport à l'addition : $C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$.
2. Le produit matriciel est distributif à droite par rapport à l'addition :$(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC$.
3. Le produit matriciel est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
4. Le produit matriciel admet la matrice I_n comme élément neutre :$AI_n = I_n A = A$.

Démonstration *Laissée au lecteur.*

25.1.4 Transposition

DÉFINITION 25.10 ♡ **Transposée d'une matrice**
On appelle transposée de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice noté ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées par les lignes de A. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,q]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque 25.1 Transposer revient à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple 25.7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 25.5 ♡ **La transposition est une symétrie de** $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
L'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{{}^t({}^tA) = A} \quad \text{et} \quad \boxed{{}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\,{}^tA + \beta\,{}^tB}.$$

Démonstration : La linéarité ainsi que la relation ${}^t({}^tA) = A$ sont faciles à prouver. Pour la bijectivité, on propose deux méthodes :
– On montre facilement que, si $A \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a $({}^tA) = 0$ et donc $A = {}^t({}^tA) = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, θ est injective. Grâce à la formule du rang, on en déduit qu'elle est aussi surjective et donc bijective.
– On peut aussi remarquer que $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$ ce qui prouve que Φ est bijective et égale à sa fonction réciproque.

Remarque 25.2 En prenant un peu d'avance sur le paragraphe 25.3.4, L'opération de transposition est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}\Phi - \mathrm{id} = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}\Phi + \mathrm{id} = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 25.6 ♡ Transposée d'un produit
Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Démonstration *On suppose que* $A = \left(a_{i,k}\right) \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, *que* $B = \left(b_{k,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $C = AB = \left(c_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ *où* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$. *On note aussi :*

- $A' = {}^tA = \left(a'_{i,k}\right) \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $i \in [\![1,q]\!]$ *et tout* $k \in [\![1,r]\!]$, $a'_{i,k} = a_{k,i}$.
- $B' = {}^tB = \left(b'_{k,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $k \in [\![1,p]\!]$ *et tout* $j \in [\![1,q]\!]$, $b'_{k,j} = b_{j,k}$.
- $C' = {}^tB\,{}^tA = \left(c'_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ *et* $j \in [\![1,r]\!]$ *:*

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

et par conséquent, $C' = {}^tB\,{}^tA = C = {}^tAB$.

⚠ *Attention 25.8* Attention au retournement dans le produit.

25.1.5 Avec Maple

Voici une feuille de calcul Maple sur les matrices. On notera :
- la première ligne qui sert à charger en mémoire les instructions maple pour faire du calcul matriciel.
- la commande pour le produit de deux matrices : &*. Pour l'addition de deux matrices, on utilisera + et pour la multiplication par un scalaire *.
- la commande pour évaluer les matrices : evalm.

MAPLE
```
> with(linalg): #On charge la librairie de calcul matriciel
> A:=matrix([[1,-1],[0,2],[1,-3]]);
                              [1  -1]
                              [     ]
                         A := [0   2]
                              [     ]
                              [1  -3]
> B:=matrix([[2,0],[1,-3],[-1,1]]);
                             [ 2   0]
                             [      ]
                        B := [ 1  -3]
                             [      ]
                             [-1   1]

> C:=matrix([[-1,1,0],[0,2,1]]);
                            [-1  1  0]
                       C := [        ]
                            [ 0  2  1]

> evalm(2*A-B); #on calcule 2A-B
                           [ 0  -2]
                           [      ]
                           [-1   7]
                           [      ]
                           [ 3  -7]

> evalm(A&*C); #on calcule AC
                         [-1  -1  -1]
                         [          ]
                         [ 0   4   2]
                         [          ]
                         [-1  -5  -3]
> transpose(A); #on transpose A
                         [ 1  0   1]
                         [         ]
                         [-1  2  -3]
```

25.2 Matrices d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

25.2.1 Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base

DÉFINITION 25.11 ♡ **Matrice d'un vecteur relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ un vecteur qui se décompose sur la base e en :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On appelle *matrice de x relativement à la base e* et on note $\mathrm{Mat}_e(x)$ la matrice colonne donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Exemple 25.9 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Alors $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 25.3 $\mathrm{Mat}_e(x)$ représente les coordonnées du vecteur x dans la base e. Il y a bien sûr une correspondance biunivoque entre les vecteurs de E et les matrices colonnes de taille n (qui contiennent les composantes de ces vecteurs dans une base fixée). De plus, « effectuer des calculs avec ces vecteurs » correspond à « effectuer des calculs avec ces matrices ». C'est le sens de la proposition suivante.

PROPOSITION 25.7 **Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit e une base de E. L'application $\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_e(x) \end{cases}$ qui à un vecteur associe la matrice colonne de ses coordonnées dans la base E est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration *Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et si $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) e_i$ donc il est clair que $\mathrm{Mat}_e(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathrm{Mat}_e(x) + \beta \mathrm{Mat}_e(y)$ et θ est linéaire. Si $x \in \mathrm{Ker}\,\theta$ alors $\theta(x) = 0$ et les composantes de x dans la base e valent toutes 0. Donc $x = 0$ et θ est injective. De plus, $\dim E = \dim \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc θ est bijective.*

DÉFINITION 25.12 ♡ **Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $e = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E. On considère $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E qui se décomposent dans la base e sous la forme :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad v_j = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} e_i.$$

On appelle *matrice de la famille $(v_1, \dots, v_p)$ relativement à la base e* et on note $\mathrm{Mat}_e(v_1, \dots, v_p)$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_e(v_1, \dots, v_p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_p \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \prec e_1 \\ \vdots \\ \prec e_i \\ \vdots \\ \prec e_q \end{array}$$

La j-ème colonne de cette matrice est constituée des coordonnées du vecteur v_j dans la base e.

Exemple 25.10 On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $v_1 = (-1, 3, 0)$, $v_2 = (0, -1, 5)$, $v_3 = (-3, 2, 1)$, $v_4 = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ et soit $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ alors $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25.2.2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 25.13 ♡ **Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = \left(f_1,\dots,f_q\right)$ une base de F.
3. $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

On appelle *matrice de u relativement aux bases f et e* et on note $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ (ou $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$) la matrice $q\times p$ donnée par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_q \end{array}$$

où $\left(a_{1j},\dots,a_{qj}\right)$ sont les composantes du vecteur $u\left(e_j\right)$ dans la base f.
Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ est la matrice de la famille de vecteurs $\left(u(e_1),\dots,u\left(e_p\right)\right)$ relativement à la base f :

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{Mat}_f\left(u(e_1),\dots,u\left(e_p\right)\right).$$

Remarque 25.4 Les notations utilisées sont un peu lourdes mais elles rendront très simples à retenir les formules de changement de base.

Exemple 25.11 Donnons deux exemples :

– Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique f. Soit $u : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+3z) \end{cases}$ alors comme $u(e_1) = (1,2)$, $u(e_2) = (1,-1)$ et $u(e_3) = (-1,3)$, $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

– Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique e et $u : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & 2\mathrm{P}-\mathrm{P}' \end{cases}$ alors $u(1) = 2$, $u(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}-1$, $u\left(\mathrm{X}^2\right) = 2\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}$ et $u\left(\mathrm{X}^3\right) = 2\mathrm{X}^3-3\mathrm{X}^2$. Il vient alors $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 25.14 ♡ **Matrice d'une forme linéaire relativement à une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Si φ est une forme linéaire sur E, on appelle *matrice de φ relativement à la base e* la matrice ligne $1\times n$ donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(\varphi) = \left(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)\right)$$

PROPOSITION 25.8 ♡ **Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = \left(f_1,\dots,f_q\right)$ une base de F.

l'application :

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ telle que $\theta^{-1}(\mathrm{M}) = u$. On dit que *$u$ est l'application linéaire de* E *dans* F *représentée par* M *dans les bases e de* E *et f de* F.

Démonstration

- *On vérifie tout d'abord que* θ *est linéaire. Soient* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ *et soient* $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *On suppose que* $\theta(u) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, *que* $\theta(v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(v) = \mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et que* $\theta(\alpha u+\beta v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(\alpha u+\beta v) = \mathrm{C} = \left(c_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Par conséquent :*

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k \quad \text{et} \quad v\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} b_{k,j} f_k.$$

  Par suite, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ *:*

$$(\alpha u+\beta v)\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} c_{k,j} f_k = \alpha u\left(e_j\right) + \beta v\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} \left(\alpha a_{kj} + \beta b_{kj}\right) f_k.$$

  Par identification, la famille f *formant une base de* F, *on a :*

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad c_{k,j} = \alpha a_{kj} + \beta b_{kj}$$

  ce qui prouve que : $\mathrm{C} = \alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}$ *et que* θ *est linéaire.*
- θ *est injective. En effet, si* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est telle que* $\theta(u) = 0$ *alors* $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} 0.f_k = 0$. u *s'annulant sur une base de* E *ne peut que s'annuler sur* E *tout entier et donc* $u = 0$. *On en déduit que* $\operatorname{Ker}\theta = \{0\}$ *et que* θ *est injective.*
- θ *est surjective. Soit* $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Considérons l'application linéaire* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *donnée par :* $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k$ *(Rappelons qu'une application linéaire est complètement déterminées par les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace vectoriel sur lequel elle est définie). On a clairement* $\theta(u) = \mathrm{A}$ *ce qui prouve que* θ *est surjective.*

PLAN 25.1 : Autrement dit :

Avec les notations précédentes, se fixant une base e *dans* E *et une base* f *dans* F.

- *Toute matrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *est celle d'une application linéaire* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *dans les bases* e *et* f.
- *Réciproquement, à toute application linéaire de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *correspond une et une seule matrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *qui la représente dans les bases* e *et* f.

En utilisant ces deux dernières propositions, on obtient :

COROLLAIRE 25.9 ♡

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient e et f des bases respectives de E et F. Si on note $p = \dim \mathrm{E}$ et $q = \dim \mathrm{F}$, on a :

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration : En effet, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension.

Le théorème suivant justifie la définition du produit matriciel. Composer des applications linéaires revient à multiplier les matrices correspondantes.

THÉORÈME 25.10 ♡ **Fondamental ! Matrice de la composée de deux applications linéaires**

Soients :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = \left(f_1,\dots,f_q\right)$ une base de F.
3. G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r et $g = \left(g_1,\dots,g_r\right)$ une base de G.
4. $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)}$$

Démonstration *Notons :* $\mathrm{A} = \left(a_{i',j'}\right) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ $\quad \mathrm{B} = \left(b_{i'',j''}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v)$ et $\mathrm{C} = \left(c_{i,j}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v\circ u)$. *Soient* $j \in [\![1,p]\!]$ *et* $i \in [\![1,r]\!]$. *On a :* $(v\circ u)\left(e_j\right) = v\left(u\left(e_j\right)\right) = v\left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} v\left(f_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} \sum_{i=1}^{r} b_{i,k} g_i = \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{r} b_{i,k} a_{k,j} g_i = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{i,k} a_{k,j}\right) g_i$

Et par identification : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{j,k} a_{k,i}$ *ce qui prouve le résultat.*

Enfin, on écrit le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire peut s'effectuer, en dimension finie, au moyen des matrices.

PROPOSITION 25.11 ♡ **Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_e(x)}$$

Autrement dit, si $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_f(u(x))$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_e(x)$, on a : $\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{AX}}$.

Démonstration *Posons* $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \left(x_j\right) \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Y} = (y_i) \in \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$. *On a :* $u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j f_i = \sum_{i=1}^{q} y_i f_i$. *Par identification, on a bien :*

$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

ce qui prouve le résultat.

Exemple 25.12

– Soit deux applications linéaires

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,\ x+y+z) \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,\ x+2y,\ x-y) \end{array} \right.$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. On écrit $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On écrit maintenant $\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v \circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u \circ v)$. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(v) \times = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Donnons l'expression analytique de $u \circ v$ et $v \circ u$. On utilise le théorème 25.11.
D'une part $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 3x+y+2z \\ -2y-z \end{pmatrix}$ donc $u\circ v\left(x,y,z\right) = \left(2x+z, 3x+y+2z, -2y-z\right)$.
D'autre part $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$ et $v\circ u\left(x,y\right) = \left(-y, 3x+2y\right)$.

–

25.3 Matrices carrées

25.3.1 Définitions

Rappelons qu'une matrice est carrée si et seulement si elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.12 ♡

– $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension finie n^2.
– $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ possède une structure d'anneau unitaire (non commutatif).

Démonstration *Le premier point est un corollaire immédiat des propositions 25.1 et 25.2. On vérifie facilement les axiomes d'un anneau pour* $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Remarque 25.5 Comme $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, pour deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton (voir le théorème 19.17 page 725) dès que A et B commutent, c'est-à-dire dès que $AB = BA$.

Exemple 25.13 Calculons les puissance de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On remarque aussi que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $B^3 = 0$. Comme $I_3B = BI_3 = B$, on peut appliquer la formule du binôme et écrire pour $n \geqslant 2$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, on montre que cette égalité reste correcte si $n = 0, 1$ d'où le résultat.

DÉFINITION 25.15 ♡ **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On appelle *matrice de l'endomorphisme u* dans la base e la matrice notée $\operatorname{Mat}_e(u)$ et donnée par :

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \operatorname{Mat}_{e \leftarrow e}(u)$$

Remarquons que $\operatorname{Mat}_e(u)$ est une matrice carrée : $\operatorname{Mat}_e(u) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.13 ♡ **Un endomorphisme est entièrement déterminé par sa matrice dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors, l'application

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_e(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels.
En particulier, si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\theta^{-1}(M) = u$. On dit que *u est l'endomorphisme de* E *représenté par* M *dans la base e*.

Démonstration *Le fait que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels est un cas particulier du théorème 25.8. Par ailleurs, si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ alors $\theta(u \circ v) = \operatorname{Mat}_e(u \circ v) = \operatorname{Mat}_e(u)\operatorname{Mat}_e(v) = \theta(u)\theta(v)$ ce qui prouve que θ est un morphisme d'anneaux.*

PLAN 25.2 : Autrement dit :

Avec les notations de la proposition précédente, se fixant une base e de E *:*
- *A toute matrice* A *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *correspond un et un seul endomorphisme u de* E *dont la matrice dans la base e est* A.
- *Réciproquement, à tout endomorphisme de* E *correspond une et une seule matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *qui le représente dans la base e.*

25.3.2 Éléments inversibles dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, groupe $GL_n(\mathbb{K})$

DÉFINITION 25.16 ♡ **Matrice inversible**
On dit qu'une matrice *carrée* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* si et seulement si il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si tel est le cas B est unique et est appelée *matrice inverse* de la matrice A ; on la note A^{-1}. L'ensemble des matrices de taille n est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Soit B et B' deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$. On a donc

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'.$$

Exemple 25.14

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet, cherchons son inverse sous la forme $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Comme $AB = I_2$ on a le système : $\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$ qu'on résout et on trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $AB = BA = I_3$ donc $B = A^{-1}$.

Remarque 25.6 On comprend grâce à cet exemple qu'il va falloir développer des outils plus sophistiqués si on veut montrer sans trop de calculs qu'une matrice est inversible. Ces outils seront le rang (voir paragraphe 25.5) et le déterminant (voir paragraphe 25.6). On montrera aussi dans ce dernier paragraphe comment, grâce à la notion de comatrice, on pourra calculer l'inverse de matrices inversibles de taille pas trop grande.

La proposition suivante permet de traduire la notion d'inversibilité entre les matrices et les applications linéaires.

PROPOSITION 25.14 ♡ **Une application linéaire est inversible si et seulement si sa matrice est inversible**
Soient e et f des bases respectives des $\mathbb{K}$-espace vectoriels E et F tous deux de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$. Alors A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* A *est inversible. Alors il existe* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $AB = BA = I_n$*. Soit* v *élément de* $\mathscr{L}(E,F)$ *tel que* $B = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$*. On a :*

$$\operatorname{Mat}_{e\leftarrow e}(\mathrm{Id}_E) = I_n = BA = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u).$$

Par conséquent : $v\circ u = \mathrm{Id}_F$*. De même, on a :*

$$\operatorname{Mat}_{f\leftarrow f}(\mathrm{Id}_F) = I_n = AB = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v).$$

Par conséquent : $u\circ v = \mathrm{Id}_E$*. On a ainsi prouvé que* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *d'application réciproque* v*.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement si* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *alors notons* $v : F \to E$ *son application réciproque. Posons* $B = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$*. On a :*

$$AB = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v) = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow f}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

et

$$BA = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u) = \operatorname{Mat}_{e\leftarrow e}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

et donc A *est inversible de matrice inverse* B*.*

PROPOSITION 25.15 ♡ **Si** E **est de dimension** n**,** $GL_n(\mathbb{K})$ **et** $GL(E)$ **sont des groupes isomorphes**

1. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (en général non abélien).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et si e est une base de E, l'application

$$\theta : \begin{cases} GL(E) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupe.

Démonstration

- θ *est bien définie car si* u *est un automorphisme de* E *alors* $\operatorname{Mat}_e(u)$ *est inversible.*
- θ *est un morphisme de groupe : si* $(u,v) \in (GL(E))^2$*, alors* $\theta(u\circ v) = \operatorname{Mat}_e(u\circ v) = \operatorname{Mat}_e(u)\operatorname{Mat}_e(v) = \theta(u)\theta(v)$*.*
- θ *est injective car si* $\theta(u) = I_n$ *alors* $\operatorname{Mat}_e(u) = I_n$ *et donc* $u = \mathrm{Id}_E$*.*
- *Enfin,* θ *est surjective car toute matrice de* $GL_n(\mathbb{K})$ *représente un automorphisme de* E*.*

Remarque 25.7 Les deux démonstrations qui viennent sont typiques de ce chapitre. Pour démontrer une propriété sur les matrices, on la transcrit en terme d'application linéaire. Vous devez vous familiariser avec cette gymnastique.

Exemple 25.15 On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 25.14 p. 959.
A est la matrice, dans la base $(1,X)$, de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_1[X]$ dans lui-même défini par $u(P) = P(X+1)$.
Il est clair que l'endomorphisme v de $\mathbb{K}_1[X]$ dans lui-même défini par $v(P) = P(X-1)$ "défait ce que fait u" et donc que u et v sont inverses l'un de l'autre. Donc A est inversible d'après la proposition 25.14 p. 960. De plus A^{-1} est la matrice de v dans la base $(1,X)$, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 25.16 ♡♡ **Une première caractérisation des matrices inversibles**
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

H1 $A \times B = I_n$

alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre : $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

Démonstration *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n*,* e *une base de* E *et soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté par* A *dans la base* e *et* v *l'endomorphisme de* E *représenté par* B *dans la base* e*. Comme* $AB = I_n$*, on a :* $I_n = AB = \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_e(v) = \mathrm{Mat}_e(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(\mathrm{I}d_E)$*. Par conséquent :* $u \circ v = \mathrm{I}d_E$*. On en déduit que d'après le théorème 24.30 page 912 que* u *est inversible d'inverse* v *et donc que* A *est inversible d'inverse* B*.*

PROPOSITION 25.17 **Une seconde caractérisation des matrices inversibles**

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \left[\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0\right].$$

Démonstration *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n*,* e *une base de* E *et soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté par* A *dans la base* e *:* $A = \mathrm{Mat}_e(u)$*. Soient* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* x *le vecteur de* E *tel que* $\mathrm{Mat}_e(x) = X$*. On a :*

$$AX = 0 \iff \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_e(x) = 0 \iff \mathrm{Mat}_e(u(x)) = 0.$$

Si A *est inversible alors* u *est un isomorphisme. Donc* $AX = 0$ *n'est possible que si* $u(x) = 0$ *c'est-à-dire si* $x = 0$*. Par conséquent* $X = 0$*. Réciproquement, si* $AX = 0$ *entraîne* $X = 0$*, alors* $u(x) = 0$ *entraîne* $x = 0$ *et donc* $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ *par suite* u *est injectif. Comme* u *est un endomorphisme,* u *est donc aussi surjectif d'après le corollaire 24.29 page 912 et définit bien un isomorphisme. Par conséquent* A *est inversible.*

PROPOSITION 25.18 ♡♡
Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

Démonstration *Supposons que* A *et* B *soient inversibles. Il existe alors* $A', B' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que :* $AA' = I_n$ *et* $BB' = I_n$*. Montrons que :* $B'A'$ *est la matrice inverse de* AB *ce qui prouvera le résultat. Il suffit pour ce faire de remarquer que :*

$$ABB'A' = A\underbrace{BB'}_{=I_n}A' = AA' = I_n.$$

PROPOSITION 25.19 ♡
Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas :

$$\boxed{\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\!\left(A^{-1}\right)}.$$

Démonstration : On a la série d'équivalences :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : AB = I_n \iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : {}^t(AB) = {}^tI_n \iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : {}^tB\,{}^tA = I_n \iff {}^tA \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Exemple 25.16 On a vu au chapitre 2 que si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale directe $e = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et si R_θ est la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ alors les coordonnées de $R_\theta\left(\overrightarrow{u}\right)$ dans e sont : $\left(x', y'\right) = \left(\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y\right)$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

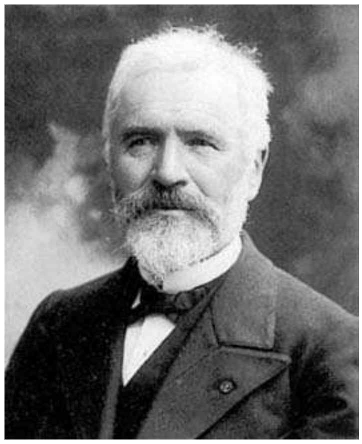
Remarquons que R_θ est un automorphisme du plan, de bijection réciproque : $R_{-\theta}$. On a par ailleurs bien :

$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta)\,\mathrm{Mat}_e(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I_2.$$

Remarquons que $(\mathrm{Mat}_e(R_\theta))^{-1} = {}^t\mathrm{Mat}_e(R_\theta)$. Les matrices inversibles A dont la matrice inverse est égale à leur transposée : ${}^tA$ sont dites orthogonales.

BIO 22 Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon, mort le 22 janvier 1922 à Paris)

Mathématicien Français. Camille Jordan est issu d'un milieu favorisé. Son père était polytechnicien et sa mère était la soeur du peintre Pierre Puvis de Chavannes. Il fait des études brillantes et intègre Polytechnique à la première place. Il devient ingénieur du corps des mines et mène en parallèle des recherches mathématiques. En 1876, il succède à Cauchy comme enseignant à l'école Polytechnique.
Ses travaux mathématiques portent sur la géométrie, (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier. Il est aussi l'auteur d'un procédé de réduction des endomorphismes tellement utile qu'il est parfois nommé « jordanisation des endomorphismes ». Réduire un endomorphisme consiste à trouver une base dans laquelle sa matrice prend une « forme simple ». Dans le cas de la jordanisation, il s'agit d'une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de Jordan (voir l'exercice 25.58). Ce procédé est en particulier important pour résoudre certaines équations différentielles. Ajoutons que Jordan était réputé pour l'excentricité de ses notations. Il prend sa retraite en 1912. Celle ci est marquée par le décès de trois de ses huit enfants durant la première guerre mondiale.



25.3.3 Trace d'une matrice

DÉFINITION 25.17 ♡ **Trace d'une matrice carrée**
Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A et on note $\operatorname{Tr}(A)$, le scalaire :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque 25.8 La trace de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à la somme des éléments diagonaux de A.

PROPOSITION 25.20 ♡ **Propriétés de la trace**

– L'application $\operatorname{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \operatorname{Tr}(A) \end{array} \right.$ est un forme linéaire. En particulier, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\boxed{\operatorname{Tr}\left(\alpha A + \beta B\right) = \alpha \operatorname{Tr}(A) + \beta \operatorname{Tr}(B)}$.
– $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)}$

Démonstration
– *La linéarité de la trace est laissée en exercice.*
– *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que* $A = \left(a_{i,j}\right)$ *et* $B = \left(b_{i,j}\right)$. *On a :* $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right)$ *et* $\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}\right)$ *et ces deux quantités sont bien égales.*

PLAN 25.3 : En résumé : Opérations sur les matrices

1. *Si* $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, alors :*

$$^t\left(^tA\right) = A$$
$$^t\left(\alpha A + \beta B\right) = \alpha\, ^tA + \beta\, ^tB$$
$$^t(AB) = {^tB}\, {^tA}$$

2. *Si* $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$*,*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
$$\left(^tA\right)^{-1} = {^t}\left(A^{-1}\right)$$

3. *Si* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, alors :*

$$\operatorname{Tr}\left(\alpha A + \beta B\right) = \alpha \operatorname{Tr}(A) + \beta \operatorname{Tr}(B)$$

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

25.3.4 Matrices carrées remarquables

Matrices scalaires, diagonales, triangulaires

Nous allons nous intéresser à deux types particuliers de matrice dans cette section : les matrices diagonales et les matrices triangulaires. Les premières se multiplient et s'inversent très facilement (quand c'est possible évidemment). Avec les secondes, les calculs sont plus difficiles mais moins que dans le cas de matrices quelconques.

DÉFINITION 25.18 ♡ **Matrices scalaires, diagonales**

– Une matrice $\mathrm{D} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$$

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On notera $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_2)$ ainsi que $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.

– Les matrices diagonales de la forme $\mathrm{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires*.

Remarque 25.9 Une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est scalaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$.

DÉFINITION 25.19 ♡ **Matrice triangulaire supérieure**

On dit que $\mathrm{T} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* lorsque :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i > j \implies t_{i,j} = 0$$

T est de la forme :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.

PROPOSITION 25.21 **Dimension du sous-espace des matrices diagonales et du sous-espace des matrices triangulaires**

1. Le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1.
2. Le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
3. Le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

- *Le fait que chacun de ces quatre sous-ensembles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est laissé en exercice au lecteur.*

– *La matrice identité engendre clairement le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent ce sous-ensemble est de dimension 1.*

– *Les matrices élémentaires $\left(\mathrm{E}_{i,i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ engendrent clairement le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent :* $\dim \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = n$.

– *De même les matrices élémentaires $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!], j\geqslant i}$ engendrent le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$. Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de telles matrices et donc :* $\dim \mathscr{T}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROPOSITION 25.22 ♡ **Opérations algébriques avec les matrices diagonales et les matrices triangulaires supérieures**

– Si D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, D_1D_2 est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.
– Si T_1 et T_2 sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, T_1T_2 est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.
– Si $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$; on dit que N est nilpotente.

Démonstration *Exercice.*

COROLLAIRE 25.23 ♡ **Inverse d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire**

- Une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas :
$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1{}^{-1},\dots,\lambda_n{}^{-1}\right)$$
- Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$
est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est de la forme :
$$T = \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22}^{-1} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration

- *Soit* $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *une matrice diagonale. Supposons que :* $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k \neq 0$ *alors clairement la matrice* $\mathrm{Diag}(\lambda_1{}^{-1},\dots,\lambda_n{}^{-1})$ *est la matrice inverse de* D. *Réciproquement, si un des coefficients,* λ_1 *par exemple est nul. Alors, posant* $X = {}^t(1,0,\dots,0) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc,appliquant la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible.*
- *De même si* T *est une matrice triangulaire supérieure telle que ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors en posant* $X = {}^t(x1,\dots,x_n) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a :* $TX = 0$ *si et seulement si :*
$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad \lambda_2 x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad \lambda_n x_n = 0 \end{cases}$$
comme les λ_i*, pour* $i \in [\![1,n]\!]$ *sont non nuls, ce système possède comme unique solution le* n*-uplet nul donc* $X = 0$ *et appliquant à nouveau la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible. Réciproquement, si un des coefficient,* λ_1 *par exemple est nul, alors en posant* $X = {}^t(1,0,\dots,0) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc, appliquant la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible.*

Matrices symétriques, antisymétriques

DÉFINITION 25.20 ♡ **Matrices symétriques, antisymétriques**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
– On dit que A est *symétrique* si et seulement si ${}^tA = A$ c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = a_{i,j}$$
L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
– On dit que A est *antisymétrique* si et seulement si ${}^tA = -A$ c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$$
L'ensemble des matrices antisymétriques de taille n est noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ à n lignes et n colonnes.

Remarque 25.10 Par définition, si $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, et si $i \in [\![1,n]\!]$ alors $a_{i,i} = -a_{i,i}$ et donc $a_{i,i} = 0$. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont donc nuls.

PROPOSITION 25.24
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus :

$$\boxed{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Démonstration *Posons, pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$, $i<j$ posons $F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ et $H_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire (i,j). On a :*

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left\{F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}$$

et

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}\right)$$

ce qui prouve que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, on vérifie facilement que les familles $\left(F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ et $\left(H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ sont libres de cardinal respectif $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. Elles constituent donc des bases de, respectivement, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ce qui donne leur dimension. On vérifie de plus facilement que si une matrice est à la fois symétrique et antisymétrique, elle est nulle et donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. Comme de plus : $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ on peut affirmer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrices de changement de base

Comme leur nom l'indique, les matrices de changement de base vont nous permettre de calculer la matrice d'une application linéaire dans des bases données quand on connaît cette matrice pour d'autres bases.

DÉFINITION 25.21 ♡ **Matrice de changement de base**
Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases du $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension n. On appelle *matrice de passage de e à f* (ou *matrice de changement de base*) et on note $P_{e\to f}$ la matrice de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base e :

$$P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_e(f_1, \dots, f_n)$$

Remarque 25.11 $P_{e\to f} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.25 ♡ **Propriétés des matrices de changement de base**
Soient e, f et g trois bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On a :

1. $$\boxed{P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E)}$$
2. $$\boxed{P_{e\to g} = P_{e\to f} \times P_{f\to g}}$$
3. $P_{e\to f}$ est inversible et : $$\boxed{\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}}$$

Démonstration

1. *La première égalité est laissée en exercice.*
2. *On a, par application du théorème 25.10 :* $P_{e\to f} \times P_{f\to g} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow g}(id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E \circ id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E) = P_{e\to g}$.
3. *Par application de la proposition précédente, on a :* $P_{e\to f} \times P_{f\to e} = P_{e\to e} = I_n$ *et* $P_{f\to e} \times P_{e\to f} = P_{f\to f} = I_n$ *Par conséquent,* $P_{e\to f}$ *est inversible et :* $\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}$.

COROLLAIRE 25.26 ♡♡ **Caractérisation matricielle de la liberté d'une famille de vecteurs**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et x une famille de n vecteurs de E. Alors, la famille x est libre si et seulement si la matrice des n vecteurs de la famille x dans la base e : $\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que la famille x soit libre. Comme elle est de cardinal n, elle forme une base de e et donc, appliquant la propriété précédente,* $\operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{P}_{e\to x}$ *est une matrice de passage de la base e à la base x et est donc inversible.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n)$ *est inversible alors cette matrice représente un automorphisme u de* E *dans la base e et comme l'image d'une base de* E *par un automorphisme de* E *est une base de* E*, on en déduit que x est une base de* E*. En particulier x est libre.*

> PROPOSITION 25.27 ♡ **Toute matrice inversible s'interprète comme une matrice de changement de base**
> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors pour toute matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base e' de E telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}_{e\to e'}$.

Démonstration *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*. Les vecteurs colonnes de* A *sont les coordonnées d'une famille de vecteurs f dans la base e :* $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_e(f_1,\dots,f_n)$*. Par application de la proposition précédente, la famille f est libre et donc* $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_e(f) = \mathrm{P}_{e\to f}$.

Matrices de transvection et de dilatation, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

On considère dans tout ce paragraphe une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

> DÉFINITION 25.22 ♡ **Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice**
> On appelle **opération élémentaire sur les lignes** (respectivement **sur les colonnes**) de la matrice A une des opérations suivantes :
> 1. Addition d'une ligne (respectivement d'une colonne) à une autre ligne (respectivement à une autre colonne).
> 2. Multiplication d'une ligne (respectivement d'une colonne) par un scalaire **non nul**.
> 3. Échange de deux lignes (respectivement de deux colonnes)

Notation 25.17 On note, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:
- $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ la multiplication de la ligne i par le scalaire λ.
- $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ l'addition de la ligne $\lambda \mathrm{L}_j$ à la ligne L_i.
- $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ l'échange des lignes i et j.

On a des notations analogues avec les colonnes.
Nous noterons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$, E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne et qui vaut 1.

> PROPOSITION 25.28 ♡ **Traduction des oel en termes matriciels**
> On a le tableau de correspondance :

k	oel	matrice P	
1	$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$	$\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{ij}$	Matrice de transvection
2	$\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$	$\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} + \lambda \mathrm{E}_{ii}$	Matrice de dilatation
3	$\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$	$\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$	

> qui se lit ainsi :
> Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les lignes de A revient à multiplier A $\boxed{\text{à gauche}}$ par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

> PROPOSITION 25.29 ♡ **Traduction des oec en termes matriciels**
> On a le tableau de correspondance :

k	oec	matrice P	
1	$\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i + \lambda \mathrm{C}_j$	$\mathrm{I}_p + \lambda \mathrm{E}_{ij}$	Matrice de transvection
2	$\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i$	$\mathrm{I}_p - \mathrm{E}_{ii} + \lambda \mathrm{E}_{ii}$	Matrice de dilatation
3	$\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$	$\mathrm{I}_p - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$	

> qui se lit ainsi :
> Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les colonnes de A revient à multiplier A $\boxed{\text{à droite}}$ par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

25.4 Changement de base

25.4.1 Pour un vecteur

PROPOSITION 25.30 ♡ **Formule de changement de base pour un vecteur**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Considérons e et f deux bases de E et $x \in \mathrm{E}$. Alors :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_f(x) = \mathrm{P}_{f\to e} \times \operatorname{Mat}_e(x)}.$$

Démonstration *Posons* $\operatorname{Mat}_f(x) = \left(\mathrm{X}'_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\operatorname{Mat}_e(x) = \left(\mathrm{X}_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P}_{f\to e} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. *On a :*

$$x = \sum_{i=1}^n \mathrm{X}'_i f_i = \sum_{j=1}^n \mathrm{X}_j e_j \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n \mathrm{X}_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \mathrm{X}_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{X}_j\right) f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{X}'_i f_i \end{aligned}$$

Donc, par identification, on a bien : $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{X}'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{X}_j$.

On peut aussi prouver ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_f(x) &= \operatorname{Mat}_f(\mathrm{I}d_\mathrm{E}(x)) \\ &= \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(\mathrm{I}d_\mathrm{E}) \times \operatorname{Mat}_e(x) \text{ par application de 25.11} \\ &= \mathrm{P}_{f\to e} \times \operatorname{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

25.4.2 Pour une application linéaire

PROPOSITION 25.31 ♡ **Formule de changement de base pour une application linéaire**
On considère :

- e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
- f et f' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F

et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{P}_{f'\to f} \times \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}}$$

Démonstration Soit $x \in \mathrm{E}$ *et* $y = u(x)$. *Soit* $\mathrm{X} = \operatorname{Mat}_e(x)$, $\mathrm{Y} = \operatorname{Mat}_f(y)$, $\mathrm{X}' = \operatorname{Mat}_{e'}(x)$, $\mathrm{Y}' = \operatorname{Mat}_{f'}(y)$, $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ *et* $\mathrm{A}' = \operatorname{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u)$. *On a, par application du théorème 25.11 :* $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ *et* $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}'$. *De plus, par application de la proposition précédente :* $\mathrm{X} = \mathrm{P}_{e\to e'}\mathrm{X}'$ *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{P}_{f\to f'}\mathrm{Y}'$. *On a donc :*

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{Y} = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{AX} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}' = \mathrm{A}'\mathrm{P}_{e'\to e}\mathrm{X}.$$

Par conséquent : $\mathrm{A}'\mathrm{P}_{e'\to e} = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{A}$ *ce qui donne bien :* $\mathrm{A}' = \mathrm{P}_{f'\to f} \times \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}$.

On peut aussi démontrer cette formule ainsi :

$$\mathrm{A}' = \operatorname{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \operatorname{Mat}_{f'\leftarrow e'}(\mathrm{I}d_\mathrm{F} \circ u \circ \mathrm{I}d_\mathrm{E})$$
$$= \operatorname{Mat}_{f'\leftarrow f}(\mathrm{I}d_\mathrm{F}) \times \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \operatorname{Mat}_{e\leftarrow e'}(\mathrm{I}d_\mathrm{E})$$
$$= \mathrm{P}_{f'\to f} \times \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}$$

25.4.3 Pour un endomorphisme

PROPOSITION 25.32 ♡ **Formule de changement de base pour un endomorphisme**
On considère e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \mathrm{P}_{e' \to e} \times \mathrm{Mat}_e(u) \times \mathrm{P}_{e \to e'}}$$

qui s'écrit aussi avec $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{e \to e'}, \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$:

$$\boxed{\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}}$$

Démonstration : C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

Remarque 25.12 Avec les notations précédentes, si $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ alors $\mathrm{A}'^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$.

25.4.4 Pour une forme linéaire

PROPOSITION 25.33 ♡ **Formule de changement de base pour une forme linéaire**
Soient e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si φ est une forme linéaire sur E, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_e(\varphi) \times \mathrm{P}_{e \to e'}}.$$

Démonstration : C'est encore un corollaire immédiat de la proposition précédente.

25.4.5 Un exemple

Soit l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique e et les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,3)$.

1. Montrons que le système $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, f est forcément une base de E. On écrit $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. On écrit la matrice de passage $\mathrm{P}_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On inverse cette matrice en cherchant une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{P}_{e \to f} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_2$. On obtient un système et on trouve $\mathrm{P}_{f \to e} = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
4. Soit le vecteur $x = (4,1)$. On cherche matriciellement les coordonnées du vecteur x dans la base f. On trouve $\mathrm{Mat}_f(x) = \mathrm{P}_{f \to e}\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$.
5. Soit l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \right.$. On écrit les matrices de cet endomorphisme dans les bases e et f : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_f(u) = \mathrm{P}_{f \to e}\mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{P}_{e \to f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$.

25.5 Rang d'une matrice

On va développer dans cette section des méthodes pratiques pour :

1. calculer le rang d'une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases données.
2. tester si une matrice (et donc si l'endomophisme associé) est inversible.

25.5.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 25.23 ♡♡♡ **Rang d'une matrice**
On appelle *rang* de $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, et on note rgA, le rang de la famille constituée des vecteurs colonnes $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_p$ de A dans $\mathbb{K}^q$.

PROPOSITION 25.34 ♡♡♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base e.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q muni d'une base f.
3. $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $A = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ alors on a : $\boxed{\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A}$.

Démonstration *Rappelons que* $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_p))$. *Pour tout* $i \in [\![1,p]\!]$, *notons* C_i *le vecteur colonne de* $\mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ *donné par :* $C_i = \operatorname{Mat}_f(u(e_i))$. *Les vecteurs colonnes de* $A = (a_{ij})$ *sont exactement les vecteurs* $C_1,\dots,C_p$. *Notons aussi :*

$$\mathscr{F} = \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_p)) \subset F \quad \text{et} \quad \mathscr{G} = \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p) \subset \mathbb{K}^q.$$

Utilisant le lemme de réduction d'une famille liée, on peut extraire de la famille $(u(e_1),\dots,u(e_p))$ *une sous-famille libre* b *qui engendre encore* $\mathscr{F}$. *Quitte à re-numéroter les vecteurs de la famille* $(u(e_1),\dots,u(e_p))$, *supposons que la sous-famille en question est :* $b = (u(e_1),\dots,u(e_l))$ *où* $l \in [\![1,p]\!]$. b *est donc une base de* $\mathscr{F}$ *et* $\operatorname{rg} u = l$. *Montrons que* $c = (C_1,\dots,C_l)$ *est une base de* $\mathscr{G}$. *On aura ainsi bien prouvé que* $\operatorname{rg} A = l = \operatorname{rg} u$. *Supposons que* $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ *sont* l *scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j C_j = 0$. *Alors :* $\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_{ij} = 0$. *Par ailleurs :*

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_{ij}}_{=0} \right) f_i = 0$$

La famille b *étant libre, ceci n'est possible que si* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$. *Donc* c *est libre. Montrons que* c *est génératrice de* $\mathscr{G}$. *Il suffit de montrer que chacun des vecteurs* C_j *pour* $j \in [\![l+1,p]\!]$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $C_1,\dots,C_l$. *Mais ceci est clairement conséquence du fait que chaque vecteur* $u(e_j)$ *pour* $j \in [\![l+1,p]\!]$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $u(e_1),\dots,u(e_l)$. *La famille* c *est donc bien une base de* $\mathscr{G}$ *et la proposition est alors démontrée.*

THÉORÈME 25.35 ♡♡♡ **Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille**
$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démonstration *Soient* e *une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *et soit* u *l'unique endomorphisme de* E *tel que :* $\operatorname{Mat}_e(u) = A$. *On a :* A *inversible* $\iff$ u *est un automorphisme de* E $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = n$.

PROPOSITION 25.36 ♡♡♡
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E.

Démonstration *Soit* u *l'endomorphisme de* E *défini par :* $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = x_i$. *Notons* $A = \operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Mat}_e(u)$. *On a :* A *est inversible* $\iff$ u *est un automorphisme de* E $\iff$ *l'image d'une base de* E *par* u *est une base de* E.

THÉORÈME 25.37 ♡
Soit $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On a : A est une matrice de rang r si et seulement si il existe $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$ où

$$J_r = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & r & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* p*,* e *une base de* E*,* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* q *et* f *une base de* F*. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *l'unique application linéaire de* E *dans* F *telle que* $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{A}$*. On a :* $\mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}\mathrm{A} = r$*. Faisant comme dans la démonstration du théorème 24.27, on peut décomposer* E *en la somme :* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{G}$ *où* G *est un sous-espace de* E *tel que* $u_{|\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{Im}\,u$ *est un isomorphisme. Par conséquent,* $\dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{Im}\,u = \mathrm{rg}\,u = r$*. Soit* $\left(e'_1,\dots,e'_r\right)$ *une base de* G *et* $\left(e'_{r+1},\dots,e'_p\right)$ *une base de* $\mathrm{Ker}\,f$*.* $e' = \left(e'_1,\dots,e'_r,e'_{r+1},\dots,e'_n\right)$ *est donc une base de* E *et l'image d'une base d'un espace vectoriel par un isomorphisme étant une base de l'espace vectoriel d'arrivée,* $\left(u\left(e'_1\right),\dots,u\left(e'_r\right)\right)$ *est une base de* $\mathrm{Im}\,f$ *qu'on peut compléter en une base* $f' = \left(u\left(e'1\right),\dots,u\left(e'_r\right),f'_{r+1},\dots,f'_q\right)$ *de* F*. On a :* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{J}_r$ *et utilisant les formule de changement de base, on a :*

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{P}_{f\to f'} \times \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) \times \mathrm{P}_{e'\to e}$$

qui est de la forme voulue.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* p *et* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* q*. Soit* e *une base de* E*,* f *une base de* F *et :*

- e' *une autre base de* E *telle que* $\mathrm{P}_{e'\to e} = \mathrm{P}$.
- f' *une autre base de* F *telle que* $\mathrm{P}_{f'\to f} = \mathrm{Q}$.

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *tel que :* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{J}_r$*. Interprétant la formule* $\mathrm{A} = \mathrm{QJ}_r\mathrm{P}$ *comme une formule de changement de base, on a :* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$*. Par conséquent :* $\mathrm{rg}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,u = \mathrm{rg}\mathrm{J}_r$*.*

COROLLAIRE 25.38 ♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée**
Pour tout $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\left({}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

Démonstration *Posons* $r = \mathrm{rg}\mathrm{A}$*. En appliquant la proposition précédente, il existe* $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{QJ}_r\mathrm{P}$*. Par conséquent :* ${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{J}_r\,{}^t\mathrm{Q} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{J}_r\,{}^t\mathrm{Q}$ *et* ${}^t\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$*,* ${}^t\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$*. Par conséquent, appliquant à nouveau la proposition précédente :* $\mathrm{rg}\,{}^t\mathrm{A} = r$*.*

DÉFINITION 25.24 **Matrices équivalentes**
Deux matrices $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* si et seulement s'il existe deux matrices inversibles $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{QBP}^{-1}$.

Remarque 25.13 Un corollaire du théorème précédent est que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

DÉFINITION 25.25 **Matrices semblables**
Deux matrices carrées $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$.

Remarque 25.14 Deux matrices semblables sont *a fortiori* équivalentes.

Remarque 25.15 Deux matrices semblables ont même trace.

25.5.2 Calcul pratique du rang d'une matrice

PROPOSITION 25.39 ♡ **Deux matrices déduites l'une de l'autre par une oel ou une oec ont même rang**
Deux matrices obtenues l'une de l'autre par une oel ou une oec sont de même rang.

Démonstration *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* P *une matrice correspondant à une oel ou une oec.* P *est donc inversible. Posons* $\mathrm{B} = \mathrm{PA}$*. Soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$*. On applique le théorème 25.37. Il existe des matrices* $\mathrm{Q}_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Q}_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{Q}_1\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$*. On a donc :* $\mathrm{B} = \mathrm{PQ}_1\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_0\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$ *avec* $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{PQ}_1$ *qui est une matrice inversible de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*. Par conséquent,* B *étant de la forme* $\mathrm{Q}_0\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$ *où* Q_0 *et* Q_1 *sont inversibles. On applique à nouveau la proposition 25.37 et on peut affirmer que* B *est de rang* r*.*

LEMME 25.40 ♡
Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On a :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{A}' & \\ 0 & & & \end{array} \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\mathrm{A}'.$$

Démonstration *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Par définition, $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$ *où* $L_1, \dots, L_n$ *représentent les vecteurs colonnes de* A*. Posons* $F = \operatorname{Vect}(L_1)$ *et* $G = \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n)$*. Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^p$ *sont en somme directe. Soit* $L = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F \cap G$*. Comme* $L \in F$*, on a :* $L = \lambda L_1$*. Comme* $L \in G$*, on a aussi* $\ell_1 = 0$*. Par conséquent, en regardant la première coordonnée,* $\lambda\alpha = 0$*, d'où* $\lambda = 0$ *et donc* $L = 0$*. Donc* F *et* G *sont en somme directe. On a donc* $\dim \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n) = \dim F + \dim G$ *ce qui s'écrit aussi* $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$*.*

PLAN 25.4 : Application au calcul du rang d'une matrice A

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique le plan suivant :

1. *Si* $A = 0$ *alors* $\operatorname{rg} A = 0$*.*
2. *Sinon* A *possède un coefficient* α *non nul. Par des permutations de lignes et de colonnes, on peut supposer que* α *est en position* $(1,1)$*. En retranchant aux* $n-1$ *dernières lignes un multiple judicieusement choisi de la première ligne, on obtient une matrice du type :*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   et donc $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$
3. *On se ramène ainsi à une matrice de taille* $(n-1) \times (p-1)$ *sur laquelle il suffit de réitérer le procédé jusqu'à obtenir une matrice de taille nulle.*

Exemple 25.18 Calculons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

PROPOSITION 25.41 ♡ **Méthode du pivot de Gauss**
Par une suite d'oel, on peut transformer une matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure (inversible !).

Démonstration *On va démontrer cette proposition en effectuant une récurrence sur la taille* n *de cette matrice.*

1. *Si* $n = 1$ *la proposition est évidente.*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$*.*
3. *Supposons la proposition vraie au rang* $n-1$ *et prouvons la au rang* n*. Soit* $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$*. Quitte à permuter les lignes de* A*, cette matrice étant inversible, on peut supposer que* $a_{11} \neq 0$*. Par des oel, en utilisant comme pivot le coefficient* a_{11}*, on peut alors transformer* A *en une matrice* B *de la forme :*

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   et on a, par application du lemme précédent : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1 + \operatorname{rg} A'$*. On applique l'hypothèse de récurrence à* A'*, on peut transformer* A'*, via une suite finie d'oel, en une matrice triangulaire. On effectue les oel correspondantes sur la matrice* B *et on la transforme en une matrice triangulaire.*
4. *La proposition est alors démontrée par application du principe de récurrence.*

Remarque 25.16 Grâce aux opérations élémentaires sur les lignes et en s'inspirant de l'algorithme précédent, on peut calculer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donnée. Il suffit de suivre les étapes suivantes.

1. On juxtapose A et I_n.

2. **Grâce à des oel de type 1 et 3 sur** A **on se ramène à une matrice triangulaire supérieure.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $P_1, \dots, P_r$ de type 1 ou 3. La matrice triangulaire obtenue est $P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $P_r.\dots.P_1$.
3. **On effectue des oel de type 2 sur** $P_r.\dots.P_1.A$ **afin d'obtenir une matrice triangulaire dont la diagonale ne comporte que des 1.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $Q_1, \dots, Q_s$ de type 2. La matrice triangulaire obtenue est $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$.
4. Enfin, à nouveau **grâce à des oel de type 1, on se ramène à la matrice** I_n**.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$ par des matrices $R_1, \dots, R_t$ de type 1. La matrice triangulaire obtenue est $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$.
5. Au final, on a donc $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A = I_n$. La matrice $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$ est donc l'inverse de A.

Exemple 25.19 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3 comme on le vérifie en appliquant la méthode 70. Calculons son inverse :

$$\begin{array}{rrrlllrrr}
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
\\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
\\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & & & & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\
\\
1 & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1/2 & L_2 & \leftarrow & L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & L_3 & \leftarrow & 2L_3 & 1 & 1 & 2 \\
\\
1 & 1 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1 + L_3 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & L_2 & \leftarrow & L_2 + L_3/2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2 \\
\\
1 & 0 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

et on en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

25.6 Déterminant d'une matrice carrée de taille 2 ou 3

Grâce à la notion de déterminant nous disposerons d'un outil performant pour prouver qu'une matrice est inversible. Cette notion a néanmoins d'autres applications comme le calcul de l'inverse d'une matrice inversible via le calcul de la comatrice, la résolution de certains systèmes linéaires, les problèmes d'orientation du plan ou de l'espace...

Comme stipulé dans les programmes des filières PCSI, PTSI, TSI, nous nous bornerons à travailler en dimension 2 ou 3. Néanmoins, la plupart des démonstrations que nous allons donner sont valables en dimension n quelconque.

Les étudiants de la filière MPSI devront compléter ce chapitre par la lecture du chapitre 26 sur le groupe symétrique.

Dans toute la suite, on pourra considérer que n est un entier égal à 2 ou 3 et que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On commencera par expliquer ce qu'est le déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs puis d'un endomorphisme. Nous nous intéresserons ensuite à des méthodes pratiques de calcul du déterminant. Enfin, nous donnerons des applications.

25.6.1 Définitions

DÉFINITION 25.26 ♡ Déterminant d'une matrice de taille 2 ou 3

– On appelle *déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ le scalaire de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ et donné par :

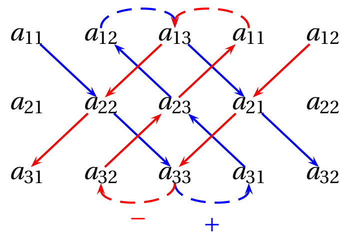
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

– On appelle *déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ le scalaire de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ et donné par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

qui se calcule avec la *règle de Sarrus*. Voir remarque 3.14 p. 125.



Exemple 25.20
– $\det I_2 = 1$, $\det I_3 = 1$.
– Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

25.6.2 Propriétés

THÉORÈME 25.42 ♡ Propriétés du déterminant d'une matrice

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\boxed{\det\left(0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}\right) = 0}$.
2. $\boxed{\det(I_n) = 1}$.
3. $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $\boxed{\det(AB) = \det(A) \times \det(B)}$
5. Caractérisation des matrices inversibles :
$$\boxed{A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0}.$$

Autrement dit : le déterminant d'une matrice inversible est inversible

6. Si A est inversible alors $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}}$.
7. $\boxed{\det\left({}^tA\right) = \det(A)}$

Démonstration *Ces propriétés se démontrent pour la plupart par des calculs directs. Prouvons par exemple les points* 5 *et* 6 *. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors $A \times A^{-1} = I_n$ et d'après les points* 2 *et* 4*, $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$ donc $\det(A) \neq 0$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$. La réciproque sera une conséquence du corollaire 25.45. En effet, A peut être vue comme la matrice d'une certaine famille de n vecteurs dans un espace de dimension n dans une base e fixée. Dire que $\det(A) \neq 0$ revient à dire que cette famille est libre et donc que la matrice A qui les représente dans la base e est inversible.*

25.7 Déterminants d'ordre 2 ou 3 d'une famille de vecteurs

25.7.1 Définition

DÉFINITION 25.27 ♡ **Déterminant d'ordre 2 et 3 d'une famille de vecteurs**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.

– Si $n = 2$, on appelle *déterminant dans la base e des vecteurs* V_1 et V_2 de E et on note $\det_e(V_1, V_2)$, le déterminant de la matrice formée par la famille (V_1, V_2) dans la base e : $\operatorname{Mat}_e(V_1, V_2)$:

$$\det_e(V_1, V_2) = \det \operatorname{Mat}_e(V_1, V_2)$$

En particulier, si : $V_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2$, $V_2 = x_{21}e_1 + x_{22}e_2$ alors :

$$\det_e(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

– Si $n = 3$, on appelle *déterminant dans la base e des vecteurs* V_1, V_2 et V_3 de E et on note $\det_e(V_1, V_2, V_3)$, le déterminant de la matrice formée par la famille (V_1, V_2, V_3) dans la base e : $\operatorname{Mat}_e(V_1, V_2, V_3)$:

$$\det_e(V_1, V_2, V_3) = \det \operatorname{Mat}_e(V_1, V_2, V_3)$$

En particulier, si : $V_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + x_{13}e_3$, $V_2 = x_{21}e_1 + x_{22}e_2 + x_{23}e_3$ et $V_3 = x_{31}e_1 + x_{32}e_2 + x_{33}e_3$ alors :

$$\det_e(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}x_{13} - x_{32}x_{23}x_{11} - x_{33}x_{21}x_{12}$$

qui se calcule avec la *règle de Sarrus*.

Remarque 25.17

– Le déterminant introduit dans les chapitres 2 et 3 est celui dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

– Le déterminant d'une matrice carrée définie dans le paragraphe précédent est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

25.7.2 Propriétés

PROPOSITION 25.43 ♡ **Le déterminant de deux ou trois vecteurs est une forme multilinéaire alternée**

Soit e une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

– Si $n = 2$, le déterminant est une *forme bilinéaire et alternée* : pour tout u, u_1, u_2, v, v_1, $v_2 \in E$ et pour tous scalaires λ_1, λ_2, on a :

1. Le déterminant est une *forme bilinéaire* :

$$\boxed{\det_e(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \det_e(u, v_1) + \lambda_2 \det_e(u, v_2)}$$

$$\boxed{\det_e(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \det_e(u_1, v) + \lambda_2 \det_e(u_2, v)}$$

2. Le déterminant est *alterné* :

$$\boxed{\det_e(v, u) = -\det_e(u, v)}$$

– Si $n = 3$, Le déterminant est une **forme trilinéaire et alternée** : pour tout u, u_1, u_2, v, v_1, v_2, w, w_1, $w_2 \in E$ et pour tous scalaires λ_1, λ_2, on a :

1. Le déterminant est une *forme trilinéaire* :

$$\boxed{\det_e(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w) = \lambda_1 \det_e(u_1, v, w) + \lambda_2 \det_e(u_2, v, w)}$$

$$\boxed{\det_e(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \det_e(u, v_1, w) + \lambda_2 \det_e(u, v_2, w)}$$

$$\boxed{\det_e(u, v, \lambda_1 v w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \det_e(u, v, w_1) + \lambda_2 \det_e(u, v, w_2)}$$

2. Le déterminant est *alterné* :

$$\boxed{\det_e(u, v, w) = -\det_e(v, u, w) = \det_e(v, w, u) = -\det_e(w, v, u)}.$$

Démonstration *Par un calcul direct.*

Remarque 25.18
On suppose que $n = 2$ ou 3. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Si deux des vecteurs de cette famille sont égaux alors $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$.

25.7.3 Formule de changement de base

PROPOSITION 25.44 ♡ **Formule de changement de base**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $e' = \left(e'_1, \dots, e'_n\right)$ une autre base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors :

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration *On a :*

$$\begin{aligned}
\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) &= \det\left(\mathrm{Mat}_{e'}(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(\mathrm{P}_{e\leftarrow e'} \times \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(\mathrm{Mat}_{e'}(e) \times \mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(\mathrm{Mat}_{e'}(e)\right) \times \det\left(\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det_{e'}(e) \times \det_e(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Remarque 25.19 En remplaçant x par e' dans cette dernière formule, on obtient :

$$1 = \det_{e'}\left(e'\right) = \det_{e'}(e) \times \det_e\left(e'\right)$$

COROLLAIRE 25.45 ♡♡♡ **Caractérisation des familles libres via le déterminant**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\mathscr{S}$ est libre si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $\mathscr{S}$ soit libre. Alors comme $\mathscr{S}$ est de cardinal $n = \dim E$, $\mathscr{S}$ forme une base de E. Par conséquent, $\mathrm{Mat}_e(\mathscr{S})$ est inversible et $\det_e(\mathscr{S}) = \det \mathrm{Mat}_e(\mathscr{S}) \neq 0$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que $\mathscr{S}$ soit liée, alors, quitte à re-numéroter les vecteurs de la famille $\mathscr{S}$, on peut supposer que x_1 est combinaison linéaire des vecteurs : $x_2, \dots, x_n$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que : $x_1 = \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. On a donc*

$$\det_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_e(\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, x_2, \dots, x_n) = \alpha_2 \det_e(x_2, x_2 \dots, x_n) + \dots + \alpha_n \det_e(x_n, x_2, \dots, x_n) = 0$$

par application de la remarque 25.18 p.975. Donc $\det_e(\mathscr{S})$ est nul.

PROPOSITION 25.46 ♡♡♡ **Caractérisation des familles liées via le déterminant**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\mathscr{S}$ est liée si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration *Par contraposée de la proposition précédente.*

25.8 Déterminant d'un endomorphisme

25.8.1 Définition

PROPOSITION 25.47 ♡ **Déterminant d'un endomorphisme**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- u un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de e et est appelé **déterminant de l'endomorphisme** u. On le note $\det(u)$..

Démonstration *Soit f une autre base de* E. *On a :* $\mathrm{Mat}_f(u) = \mathrm{P}_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(u) \times \mathrm{P}_{e\to f}$. *Par conséquent,*

$$\det_f(u(f_1), \dots, u(f_n)) = \det\left(\mathrm{Mat}_f(u)\right) = \det\left(\mathrm{P}_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(u) \times \mathrm{P}_{e\to f}\right)$$

$$= \det\left(\mathrm{P}_{f\to e}\right)\det(\mathrm{Mat}_e(u))\det\left(\mathrm{P}_{e\to f}\right) = \det(\mathrm{Mat}_e(u))$$

car $\mathrm{P}_{e\to f} = \left[\mathrm{P}_{f\to e}\right]^{-1}$ *et donc* $\det\left(\mathrm{P}_{e\to f}\right) = \left(\det\left(\mathrm{P}_{f\to e}\right)\right)^{-1}$.

Remarque 25.20 Si u est un endomorphisme de E et que e est une base de E, on a : $\det(u) = \det(\mathrm{Mat}_e(u))$.

25.8.2 Propriétés

THÉORÈME 25.48 ♡♡♡ **Propriétés du déterminant d'un endomorphisme**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, u, v des endomorphismes de E. On a :

1. $\boxed{det\left(0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\right) = 0_{\mathbb{K}}}$.
2. $\boxed{\det(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) = 1_{\mathbb{K}}}$
3. $\boxed{\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire.
4. $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$.
5. Caractérisation des automorphismes de E :
$$\boxed{u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(u) \neq 0}$$
6. Si $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ alors $\boxed{\det\left(u^{-1}\right) = \frac{1}{\det(u)}}$.

Démonstration *C'est un corollaire immédiat du théorème 25.42 et de la remarque précédente.*

25.9 Méthodes de calcul du déterminant

On se restreindra dans cette section aux déterminants des matrices carrées, le déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme s'en déduisant.

25.9.1 Opération sur les lignes et les colonnes

Les propriétés qui suivent découlent directement des propriétés des formes n-linéaires alternées :

THÉORÈME 25.49 ♡ **Calcul d'un déterminant par des oel et des oec**

1. Un déterminant qui a deux **colonnes** identiques est nul.
2. Un déterminant qui a une **colonne** combinaison linéaire des <u>autres</u> **colonnes** est nul.
3. Un déterminant dont une **colonne** est formée de 0 est nul.
4. On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une **colonne** une combinaison linéaire des <u>autres</u> **colonnes**.
5. Si on multiplie par λ une **colonne** d'un déterminant, on multiplie par λ la valeur de ce déterminant.
6. Quand on permute deux **colonnes** d'un déterminant, on change son signe.
7. Comme le déterminant d'une matrice est égale à celui de sa transposée, les 6 phrases précédentes restent vraies si on remplace le mot "**colonne**" par le mot "**ligne**".

Démonstration *Démontrons par exemple le point* 4*. On suppose que la matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est composée des vecteurs colonnes* $C_1,\dots,C_n$ *Soient* $i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$*. On a :*

$$\begin{aligned}\det(A) = \det(C_1,\dots,C_n) &= \det(C_1,\dots,C_n) + \underbrace{\det\left(C_1,\dots,C_{i-1},\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k C_k, C_{i+1},\dots,C_n\right)}_{=0 \text{ en raison du second point}} \\ &= \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_i+\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k C_k, C_{i+1},\dots,C_n\right)\end{aligned}$$

Exemple 25.21 Calculons

– $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

– $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ car la troisième ligne est nulle.

– $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ car $L_3 = L_1 + L_2$.

25.9.2 Développement d'un déterminant suivant une rangée

PROPOSITION 25.50 ♡
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \star & \dots & \star & \alpha \end{array}\right)$$

où $A' \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors $\boxed{\det(A) = \alpha \det(A')}$.

Démonstration *Par un calcul immédiat en utilisant la définition d'un matrice de taille* 2 *ou* 3*.*

DÉFINITION 25.28 ♡ **matrices triangulaires**
On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall i < j, a_{ij} = 0$.
On appelle matrice triangulaire supérieure toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Soit L (resp. U) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures). L et U sont des sous-espaces-vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = L + U$. $L \cap U$ est l'espace vectoriel des matrices diagonales.

COROLLAIRE 25.51 ♡ **Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire : Alors :

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}}$$

Démonstration *Immédiat par un calcul direct (si* $n = 2$ *ou* 3*) ou en utilisant la propriété précédente.*

Exemple 25.22 On va calculer, sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

où a, b, c sont trois complexes.

1. On commence par additionner toutes les lignes, disons dans la troisième : $L_3 \longleftarrow L_1+L_2+L_3$ On peut mettre $(a+b+c)$ en facteur.
$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. On effectue $\begin{matrix} C_1 & \longleftarrow & C_1-C_3 \\ C_2 & \longleftarrow & C_2-C_3 \end{matrix}$:
$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ 0 & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$
2. En procédant de la même façon :
$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c).$
3. Là encore : $L_3 \longleftarrow L_1+L_2+L_3$ On peut mettre $(a+b+c)$ en facteur.
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & bj & cj^2 \\ c & aj & bj^2 \\ 1 & j & j^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a+bj+cj^2 & bj & cj^2 \\ c+aj+bj^2 & aj & bj^2 \\ 0 & j & j^2 \end{vmatrix} =$
$(a+b+c)(a+bj+cj^2)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ j & a & b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c \\ j & a-b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a-b+$
$cj-bj) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$.
4. On effectue $\begin{matrix} L_1 & \longleftarrow & L_1-L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2-L_3 \end{matrix}$:
$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$
5. $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc-ab & ca-ab & ab \\ a-c & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} -b & -a & ab \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(a-b).$

DÉFINITION 25.29 ♡ **Mineur,cofacteur**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
– On appelle *mineur d'indice* (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.
– On appelle *cofacteur d'indice* (i,j) et on note $A_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$.

THÉORÈME 25.52 ♡ **Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
– Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} A_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0}\, a_{i,j_0}\Delta_{i,j_0} \end{aligned}$$

– Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} A_{i_0,j} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j}\, a_{i_0,j}\Delta_{i_0,j} \end{aligned}$$

Démonstration *On peut le vérifier facilement par un calcul immédiat dans les cas $n=2$ et $n=3$.*

25.10 Applications

25.10.1 Colinéarité de deux vecteurs du plan

PROPOSITION 25.53 ♡ **Caractérisation de l'alignement de trois points du plan**

Soit $\mathscr{R}(\mathrm{O}, e_1, e_2)$ un repère du plan. $e = (e_1, e_2)$ forme donc une base du plan. Soient $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ trois points distincts du plan. Alors, M_0, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0}$$

Démonstration *On a :*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ par des opérations sur les colonnes} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ par développement suivant la première ligne} \\
&\Longleftrightarrow \quad \det_e\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1}, \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2} \text{ sont colinéaires} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{les points } \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \text{ sont alignés}
\end{aligned}$$

25.10.2 Inversion de matrice

DÉFINITION 25.30 ♡ **Comatrice**

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A et on note $\mathrm{Com}(\mathrm{A})$ la matrice des cofacteurs de A :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [\mathrm{Com}(\mathrm{A})]_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

PROPOSITION 25.54 ♡

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{A} \times {}^t(\mathrm{Com}\,\mathrm{A}) = {}^t(\mathrm{Com}(\mathrm{A})) \times \mathrm{A} = (\det \mathrm{A})\,\mathrm{I}_n}$$

En particulier, si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\, {}^t(\mathrm{Com}(\mathrm{A}))}$$

Démonstration *Notons, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et posons $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :*

$$[\mathrm{A}^t\mathrm{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k} = \begin{cases} \det(\mathrm{A}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 25.23

– Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $\det(\mathrm{A}) = -1$, $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On calcule $\mathrm{Com}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\, {}^t(\mathrm{Com}(\mathrm{A})) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

– Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(\mathrm{A}) = 3$ donc $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. On calcule alors $\mathrm{Com}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\, {}^t(\mathrm{Com}(\mathrm{A})) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 25.21 On comprend après ces quelques calculs les limitations pratiques de cette méthode. En dimension 2 et 3 les calculs restent faisables mais ils deviennent très lourds dés que $n \geqslant 4$ si la matrice ne possède pas beaucoup de 0.

25.10.3 Orientation du plan et de l'espace

DÉFINITION 25.31 ♡ **Bases de même sens, de sens contraire**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3. Soient e et e' deux bases de E. On dit que :
– e et e' sont de *même sens* (ou ont **même orientation**) si et seulement si $\det_e(e') > 0$.
– Sinon, on dit que e et e' sont de **sens contraires** (ou n'ont **pas la même orientation**).

DÉFINITION 25.32 ♡ **Orientation**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3. *Orienter* E revient à choisir une base e de E. Si e' une autre base de E, on dit qu'elle est **directe** si elle est de même sens que E et *indirecte* sinon.

Exemple 25.24 On oriente $E = \mathbb{R}^2$ en prenant la base canonique e. La base donnée par $e' = ((1,1),(1,-1))$ est indirecte. En effet :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

25.11 Systèmes linéaires

On termine ce chapitre par une étude des systèmes linéaires.

25.11.1 Définitions

DÉFINITION 25.33 ♡ **Système linéaire à n équations et p inconnues**
Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On considère le système linéaire à n lignes et p inconnues $(\mathscr{S})$ donné par :

$$(\mathscr{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

1. *Résoudre ce système* consiste à déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant $(\mathscr{S})$.
2. Le vecteur $b = (b_1, \dots, b_n)$ s'appelle le *second membre du système* $(\mathscr{S})$.
3. On appelle *système homogène associé* au système $(\mathscr{S})$, le système obtenu lorsque $b = 0$. On le note $(\mathscr{S}_0)$ et on note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble de ses solutions.
4. A s'appelle la *matrice du système* $(\mathscr{S})$.
5. rgA s'appelle le *rang du système* et est noté $\operatorname{rg}(\mathscr{S})$.
6. On dit que le système est *compatible* si l'ensemble de ses solutions est non vide.

25.11.2 Interprétations

La compréhension des différentes interprétations qu'on peut avoir d'un système linéaire est un bon test de votre compréhension de l'algèbre linéaire.

Interprétation vectorielle

Notons $C_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, C_p = (a_{1p}, \dots, a_{np}) \in \mathbb{K}^n$ les p vecteurs colonnes de A et $b = (b_1, \dots, b_n)$ le second membre de $(\mathscr{S})$. On a :

$$\boxed{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \iff x_1 C_1 + \dots x_p C_p = b}$$

Donc :
– Le système est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.
– $\operatorname{rg}(\mathscr{S}) = \operatorname{rg}(\{C_1, \dots, C_p\})$.

Interprétation matricielle

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ On a :

$$\boxed{\left(x_1,\dots,x_p\right) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \iff AX = B}$$

Interprétation en termes de formes linéaires

Notons $E = \mathbb{K}^p$, e la base canonique de E et $L_1 = \left(a_{11},\dots,a_{1p}\right),\dots,L_n = \left(a_{n1},\dots,a_{np}\right) \in \mathbb{K}^p$ les n vecteurs lignes de A. Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ n formes linéaires sur E telles que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \operatorname{Mat}_e\left(\varphi_i\right) = L_i$$

On a :

$$\boxed{\begin{gathered} \left(x_1,\dots,x_p\right) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}_0) \\ \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varphi_i\left(x_1,\dots,x_p\right) = 0 \\ \iff \left(x_1,\dots,x_p\right) \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \end{gathered}}$$

Interprétation en termes d'applications linéaires

Considérons $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ munis de leurs bases canoniques respectives e et f. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que $\operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = A$ et x le vecteur de E tel que $\operatorname{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

On a :

$$\boxed{\left(x_1,\dots,x_p\right) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \iff u(x) = b}$$

Donc :
- Le système $(\mathscr{S})$ est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im}(u)$.
- Si u est injective et si le système $(\mathscr{S})$ est compatible alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ ne possède qu'un et un seul élément.
- Si u est surjective, le système $(\mathscr{S})$ est compatible.
- Si u est à la fois surjective et injective alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ ne possède qu'une et une seule solution.

25.11.3 Structure de l'ensemble des solutions

THÉORÈME 25.55 ♡ **Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène**
Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et p inconnues. L'ensemble des solutions du système homogène $(\mathscr{S}_0)$ associé à $(\mathscr{S})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \operatorname{rg}(\mathscr{S})$.

Démonstration *Soit $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Soit $x = \left(x_1,\dots,x_p\right) \in \mathbb{K}^p$. x est solution de $(\mathscr{S}_0)$ si et seulement si $u(x) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} u$. Par conséquent $(\mathscr{S}_0) = \operatorname{Ker} u$. Ceci prouve à la fois que $(\mathscr{S}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ mais aussi que, d'après la formule du rang,* $\dim(\mathscr{S}_0) = \dim\operatorname{Ker} u = \dim\mathbb{K}^p - \operatorname{rg} u = p - \operatorname{rg}\mathscr{S}$.

THÉORÈME 25.56 ♡ **Structure de l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$**
Soit S l'ensemble des solutions du système linéaire $(\mathscr{S})$.

1. Si le système $(\mathscr{S})$ n'est pas compatible alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
2. Sinon, alors il existe une solution particulière x_0 de $(\mathscr{S})$ et on a alors :

$$\mathscr{S} = x_0 + \mathscr{S}_0 = \left\{x_0 + x \in \mathbb{K}^p \mid x \in S_0\right\}$$

Démonstration *Supposons que le système $(\mathscr{S})$ soit compatible, alors $\mathscr{S} \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathscr{S}$. On a :*

$$x \in \mathscr{S} \iff u(x) = b \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u = \mathscr{S}_0 \iff x = x_0 + \mathscr{S}_0$$

25.11.4 Cas Particulier : Les systèmes de Cramer

DÉFINITION 25.34 ♡ **Système de Cramer**
Un système de n équations à n inconnues de rang n est dit de **Cramer**.

Remarque 25.22 Matriciellement, un système de Cramer s'écrit $AX = B$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.57 ♡ **Résolution matricielle d'un système de Cramer**
Un système de Cramer possède une et une seule solution qui s'écrit matriciellement : $X = A^{-1}B$.

Démonstration A *étant inversible, la proposition est immédiate.*

PROPOSITION 25.58 ♡ **Formules de Cramer**
Si $(\mathscr{S})$ est un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution de $(\mathscr{S})$ est le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par B.

Démonstration *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ l'unique solution de $(\mathscr{S})$ alors si $C_1,\dots,C_n$ désignent les vecteurs colonnes de A, on a : $\sum_{k=1}^n x_k C_k = B$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :*

$$\begin{aligned}\det\left(C_1,\dots,C_{i-1},B,C_{i+1},\dots,C_n\right) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_k,C_{i+1},\dots,C_n\right)\\ &= x_i \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\dots,C_n\right) = x_i \det(A)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 25.23 En particulier, si $n = 2$, on a : Soit

$$(\mathscr{S}) = \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}.$$

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Ce système est de Cramer si et seulement si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas, le couple solution de $(\mathscr{S})$ est donné par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{ad-bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}}{ad-bc}$$

25.11.5 Méthode du Pivot de Gauss

Remarque 25.24 Si un système à n équations et à n inconnues est sous forme triangulaire (c'est à dire si la matrice A correspondante est triangulaire et sans zéro sur la diagonale) alors il est de Cramer. En effet, la matrice A est inversible.

Méthode : Résolution d'un système de Cramer par la méthode de Gauss

Soit $(\mathscr{S})$ un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$. La méthode du pivot de Gauss consiste, en utilisant des oel à transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure en effectuant les mêmes opérations sur la matrice colonne B. Le système correspondant est alors équivalent au système initial et possède donc le même ensemble solution.

La descente : $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ -x & -3y & +5z & = & 2 \\ x & +y & +z & = & -1 \end{cases}$

On fait apparaître des zéros : coefficients de x dans les deuxièmes et troisièmes lignes. On ne touche pas à la première.

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & +8z & = & 3 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ & y & +2z & = & 2 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Ces opérations sur les lignes se traduisent par des multiplications à gauche par des matrices. Il suffit de voir le résultat sur la matrice I_3. Donc il s'agit de la matrice

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$G_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$G_1 \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On continue de «sculpter» le système (ou la matrice $\tilde{A}$ obtenue en soudant les matrices A et B) pour faire apparaître un zéro : le coefficient de y dans la troisième ligne.

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & +8z & = & 3 & \\ & & 10z & = & 5 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Cette fois

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à remonter : On trouve successivement $z = \frac{1}{2}$, $y = 1$ et $x = -\frac{5}{2}$.
Il est à remarquer que G_1 et G_2 sont inversibles. Pour trouver leurs inverses, il suffit de défaire ce que faisaient ces matrices.

Pour G_1^{-1} : $\begin{cases} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$.

Donc

$$G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{De même } G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25.12 Exercices

25.12.1 Opérations sur les matrices

Exercice 25.1 ♡

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer :* AB *et* BA.
2. *Calculer :* ${}^t(AB)$ *et* ${}^tB$, ${}^tA$ *et* ${}^tB\,{}^tA$.
3. *Calculer :* $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(B)$, $\mathrm{Tr}(AB)$ *et* $\mathrm{Tr}(BA)$.
4. *Développer :* $(A+B)^2$.

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *On remarque que* $AB \neq BA$.
2. ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* ${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = {}^t(AB)$.
3. $\mathrm{Tr}(A) = 1$, $\mathrm{Tr}(B) = 3$, $\mathrm{Tr}(AB) = 2$ *et* $\mathrm{Tr}(BA) = 2$. *On a bien :* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
4. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ *car* $AB \neq BA$. *De manière plus générale, la formule du binôme ne s'applique pour développer* $(A+B)^n$ *que si* A *et* B *commutent.*

Exercice 25.2 ♡

Calculer lorsque cela est possible les produits AB *et* BA *:*

1. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. *Le produit* AB *n'est pas possible. Par contre :* $BA = B$.
3. $AB = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 25.3 ♡♡

1. *Soient* $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ *et* E_{ij}, E_{kl} *les matrices élémentaires de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *correspondantes. Calculer* $E_{ij} \times E_{kl}$.

2. *Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A commute avec toutes les matrices diagonales. Montrer que A est une matrice diagonale.*
3. *Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que $E_{ij} \times E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}$*
2. *Notons $A = ((a_{ij}))$. Soit $k \in [1, n]$. Comme A commute avec la matrice E_{kk}, on a*

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}$$

et

$$E_{kk}A = a_{ij}E_{ij}E_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{kk}E_{ij}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}E_{kj},$$

Ceci pour tout indice k.

Comme le membre de gauche est une matrice nulle sauf peut-être sur la k-ième colonne et le membre de droite, une matrice nulle sauf peut-être sur la k-ième ligne. On en déduit que pour $i \neq k$, $a_{ik} = 0$ et donc que A est une matrice diagonale. La réciproque est claire.

3. *Soit une matrice $A = ((a_{ij}))$ qui commute avec toutes les matrices symétriques. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La matrice E_{kk} est symétrique, et on calcule*

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}E_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk}E_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{ik}$$

$$E_{kk}A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{kk}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ki}E_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}E_{kj}$$

Par conséquent, les coefficients de la matrice AE_{kk} sont nuls, sauf sur la k-ième colonne où ce sont les coefficients de la k-ième colonne de la matrice A. De même, les coefficients de la matrice $E_{kk}A$ sont tous nuls sauf sur la k-ième ligne, où l'on retrouve les coefficients de la matrice A. Puisque $AE_{kk} = E_{kk}A$, on en déduit que $\forall (i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq k \implies a_{ik} = a_{ki} = 0_{\mathbb{K}}$. La matrice A est donc nécessairement une matrice diagonale : $A = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}$.
Considérons ensuite pour $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, $k \neq \ell$, la matrice symétrique $S = E_{k\ell} + E_{\ell k}$. On calcule

$$AS = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}E_{k\ell} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}E_{\ell k} = d_k E_{k\ell} + d_\ell E_{\ell k}$$

$$SA = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{k\ell}E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{\ell k}E_{ii} = d_\ell E_{k\ell} + d_k E_{\ell k}$$

Puisque le système $(E_{k\ell}, E_{\ell k})$ est libre, on trouve que $d_\ell = d_k$. En définitive, la matrice A doit être une matrice scalaire : $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha I_n$. Réciproquement, une matrice scalaire commute avec toute matrice, donc avec toute matrice symétrique.

Exercice 25.4 ♡♡

Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et deux indices $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$.

1. *Déterminer les matrices AE_{kl} et $E_{kl}A$.*
2. *Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA$.*

Solution :

1. *On sait que $A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{ij}$ donc*

$$AE_{kl} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\delta_{jk}E_{il} = \sum_{i=1\dots n} a_{ik}E_{il}$$

$$E_{kl}A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\delta_{li}E_{kj} = \sum_{j=1\dots n} a_{lj}E_{kj}$$

2. *Si pour tout* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, *alors en particulier, pour tout* $k, l \in [\![1, n]\!]$, $E_{kl}A = AE_{lk}$ *et donc* $\sum_{i=1\dots n} a_{ik}E_{il} = \sum_{j=1\dots n} a_{lj}E_{kj}$. *Mais la famille* (E_{ij}) *est libre donc cette égalité n'a lieu que si* $a_{ik} = 0$ *pour* $i \neq k$ *et si* $a_{i,i} = a_{j,j}$ *pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, *autrement dit que si* A *est scalaire. Réciproquement, si* A *est scalaire alors elle commute avec toutes les matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25.5 ♡♡

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Solution : *Soit* $C = AB$, *où* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *sont deux matrices carrées symétriques. On a* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki} = c'_{ji}$ *avec* $C' = BA$. *Donc* $c_{ij} = c_{ji}$ *si et seulement si* $C = C'$ *c'est-à-dire lorsque* A *et* B *commutent.*
Plus synthétiquement : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA$ *car* $A = {}^tA$ *et* $B = {}^tB$. *Donc* ${}^t(AB) = AB$ *si et seulement si* $AB = BA$.

Exercice 25.6 ♡♡

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ \mathbb{O} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tJJ$, *et* $J\,{}^tJ$.

Solution : *On considère* $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *défini par* $u(e_1) = 0$ *et* $u(e_i) = e_{i-1}$ *pour* $i \geqslant 2$. J *est la matrice de* u *dans* $\mathscr{B}$. ${}^tJ$ *est la matrice de* v *dans* $\mathscr{B}$, *avec* $v(e_i) = e_{i+1}$ *pour* $i \leqslant n-1$ *et* $v(e_n) = 0$. ${}^tJJ$ *est la matrice de* $v \circ u$ *dans* $\mathscr{B}$. *On a* $v \circ u(e_1) = 0$ *et* $v \circ u(e_i) = v(e_{i-1}) = e_i$. *Donc*

$${}^tJJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{de même} \quad J\,{}^tJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.7 ♡♡

On définit pour $i \neq j$, *la matrice* $T_{ij}^{\lambda} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *par*

$$T_{ij}^{\lambda} = I + \lambda E_{ij}$$

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* AT_{ij}^{λ} *et* $T_{ij}^{\lambda}A$. *Interpréter le résultat trouvé.*

Solution : *Soit* e_i *les vecteurs colonnes de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *On a* $T_{ij}^{\lambda}e_k = e_k$ *pour* $k \neq i$ *et* $T_{ij}^{\lambda}e_j = e_j + \lambda e_i$. *On en déduit que la* k*-ième colonne de la matrice de* AT_{ij}^{λ} *est* $AT_{ij}^{\lambda}e_k = Ae_k$ *pour* $k \neq i$ *et* $AT_{ij}^{\lambda}e_j = Ae_j + \lambda Ae_i$. *Moralité : la matrice* AT_{ij}^{λ} *est obtenue en ajoutant* λ *fois la* i*-ème colonne de* A *à sa* j*-ème colonne.*
De même (par exemple en transposant) la matrice $T_{ij}^{\lambda}A$ *est obtenue en ajoutant* λ *fois la* j*-ème ligne de* A *à sa* i*-ème ligne.*
Moralité : *Lorsqu'on multiplie à gauche (par une matrice* T_{ij}^{λ}*) on agit sur les lignes. Quelle action ? Il suffit de le voir sur la matrice* I_n.

Exercice 25.8 ♡♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (X, Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAY = 0.$$

1. *Montrer que* $A = 0$.

2. *Trouver une matrice* 2×2 *non-nulle telle que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = 0.$$

Solution :

1. *Soit* f_j *la* j*-ème matrice de la base naturelle de* $\mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{R})$ *et* e_i *la* i*-ème matrice de la base naturelle de* $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$*. On a* ${}^te_iAf_j = a_{ij}$ *d'où le résultat.*
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.9 ♡♡

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que :*

$$\forall C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad ACB = 0$$

Montrer que $A = 0$ *ou* $B = 0$.

Solution : *On traduit l'énoncé avec des endomorphismes : Soit* $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $\forall w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $u \circ w \circ v = 0$. *Démonter que* $u = 0$ *ou* $v = 0$.
Par contraposée : Supposons $u \neq 0$ *et* $v \neq 0$. *Donc* $\exists x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $z = v(x) \neq 0$ *et* $\exists y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u(y) \neq 0$. *On construit alors* $w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $w(z) = y$. *On a alors* $(u \circ w \circ v)(x) = u(y) \neq 0$. *Donc* $u \circ w \circ v \neq 0$.

Exercice 25.10 ♡♡

Soit deux matrices colonnes non nulles $X, Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la matrice* $X{}^tY$ *est de rang* 1.
2. *Montrer que toute matrice carrée* A *de rang* 1 *peut s'écrire sous la forme ci-dessus.*
3. *Soit une matrice* $A \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *de rang* 1. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$A^2 = \lambda A$$

et exprimer λ *en fonction de* X *et* Y.

Solution :

1. *Le rang de* X *et de* ${}^tY$ *égale* 1 *donc le rang du produit est* $\leqslant 1$. *Par exemple parce que toutes les lignes (ou les colonnes) sont proportionnelles, ou bien parce que si* u *et* v *sont deux applications linéaires,* $u \circ v$ *(si elle existe) a un rang inférieur au rang de* u. *Le rang de* $X{}^tY$ *n'est pas* 0 *manifestement.*
2. *Comme* $A \neq 0$*, on choisit un élément* $a_{ij} \neq 0$. *Comme* A *est de rang* 1*, toutes les lignes sont proportionnelles à la* i*-ème ligne :* $L_k = \alpha_k L_i$. *Donc on peut prendre* $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ *et* $Y = (a_{i1}, \dots, a_{in})$.
3. *On écrit* $A = X{}^tY$*, d'où* $A^2 = AA = X{}^tYX{}^tY$. *Comme* ${}^tYX$ *est un réel, il commute à* X. *Donc* $AA = ({}^tYX)X{}^tY = ({}^tYX)A$. *On peut donc prendre* $\lambda = {}^tYX$.

Exercice 25.11 ♡♡

Déterminer toutes les formes linéaires φ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(AB) = \varphi(B{}^tA)$$

Solution : *Remarque : Si* $n = 1$*, alors toutes les formes linéaires conviennent.*
On prend $n > 1$. *Une forme linéaire est définie par ses images des vecteurs d'une base, donc ici les* $\varphi(E_{ik})$.
Or $E_{ik} = E_{ij}E_{jk}$ *donc en choisissant* $A = E_{ij}$ *et* $B = E_{jk}$ *avec* $k \neq j$ *(c'est possible puisque* $n > 1$*) on a* $B{}^tA = E_{jk}E_{ji} = 0$.
Donc $\varphi(E_{ik}) = 0$ *et* φ *est la forme nulle.*

Exercice 25.12 ♡♡

On considère deux matrices A *et* B *de* $M_2(\mathbb{R})$*, et* $C = AB$.

1. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de* C.
2. *On pose :* $S_1 = a_{21} - a_{11}$; $S_2 = a_{11} + a_{12}$; $S_3 = a_{12} - S_1$; $S_4 = a_{22} - S_3$; $S_5 = b_{22} - b_{12}$; $S_6 = b_{12} - b_{11}$; $S_7 = b_{11} + S_5$; $S_8 = b_{21} - S_7$.
$P_1 = a_{21}b_{11}$; $P_2 = a_{22}b_{21}$; $P_3 = S_1S_5$; $P_4 = S_2S_6$; $P_5 = S_4b_{22}$; $P_6 = a_{12}S_8$; $P_7 = S_3S_7$. *Enfin* $S_9 = P_1 + P_7$; $S_{10} = S_9 + P_3$; $S_{11} = P_4 + P_5$.
Démontrer que $c_{11} = S_{10} + P_6$; $c_{12} = S_{10} + P_4$; $c_{21} = P_1 + P_2$; $c_{22} = S_9 + S_{11}$.
3. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de* C *par cette nouvelle méthode.*

Solution :

1. *Il y a 4 coefficients à calculer. Pour chacun d'eux il y a deux multiplications et une addition. Soit 8 multiplications et 4 additions.*
2. $S_{10}+P_6 = S_9+P_3+a_{12}S_8 = P_1+P_7+S_1S_5+a_{12}(b_{21}-S_7) = a_{21}b_{11}+S_3S_7+(a_{21}-a_{11})(b_{22}-b_{12})+a_{12}b_{21}-a_{12}(b_{11}+S_5) = a_{21}b_{11}+(a_{12}-S_1)(b_{11}+S_5)+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}(b_{22}-b_{12}) = a_{21}b_{11}+a_{12}b_{11}+a_{12}(b_{22}-b_{12})-(a_{21}-a_{11})b_{11}-(a_{21}-a_{11})(b_{22}-b_{12})+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12} = a_{21}b_{11}+a_{12}b_{11}+a_{12}b_{22}-a_{12}b_{12}-a_{21}b_{11}+a_{11}b_{11}-a_{21}b_{22}+a_{21}b_{12}+a_{11}b_{22}-a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12} = a_{11}b_{11}+a_{11}b_{22}-a_{11}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{12}b_{22}-a_{12}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{11}-a_{21}b_{11}-a_{21}b_{22}+a_{21}b_{12}+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12} = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+0 = c_{11}$. *Les trois autres calculs sont tout aussi jubilatoires.*
3. *Il y a 7 multiplications et 11 additions. Le deuxième algorithme est plus rapide dès qu'une addition est 7 fois plus rapide qu'une addition. Dans ce cas on constate que le gain en rapidité est au détriment de la place mémoire utilisée.*

25.12.2 Trace d'une matrice

Exercice 25.13 ♡

Existe-t-il deux matrices $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB - BA = I_n$ *?*

Solution : *Si* $AB-BA = I_n$, *en prenant la trace, on obtiendrait* $\operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = \operatorname{Tr}(I_n)$ *et alors* $\operatorname{Tr}(I_n) = 0$ *ce qui est faux.*

Exercice 25.14 ♡

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB - BA = B$.
Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(B^k) = 0$.

Solution : *On démontre par récurrence :* $H_k : AB^k - B^kA = kB^k$. *On a* H_1 *par hypothèse. D'autre part*

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB-BA) = kB^kB + B^kB = (k+1)B^{k+1}.$$

En prenant la trace, on obtient le résultat.

Exercice 25.15 ♡

Soit deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{Tr}(AX) = \operatorname{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Solution : *Si* $A = ((a_{ij})$ *et* $X = ((x_{ij}))$, *on calcule*

$$\operatorname{Tr}(AX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki}$$

En prenant $X = E_{pq}$, *on a* $x_{ki} = \delta_{kp}\delta_{iq}$, $\operatorname{Tr}(AX) = a_{qp}$, *donc* $\forall q, p \in [1,n]$, $a_{qp} = b_{qp}$ *et par suite* $A = B$.

Exercice 25.16 ♡♡

On se donne deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Trouver toutes les matrices* $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$X + \operatorname{Tr}(X)A = B.$$

Indication 25.24 : Si X *est une solution, prendre la trace de l'équation puis discuter.*

Solution : *Soit une matrice* $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *solution. Alors* $\operatorname{Tr}(X) + \operatorname{Tr}(X)\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$. *Il faut étudier deux cas :*

1. *Si* $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$, *alors* $\operatorname{Tr}(X) = \dfrac{\operatorname{Tr}(B)}{1+\operatorname{Tr}(A)}$ *et alors* $X = B - \dfrac{\operatorname{Tr}(B)}{1+\operatorname{Tr}(A)}A$. *Réciproquement, on vérifie que cette matrice convient.*

2. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$, *alors en prenant la trace dans l'égalité* $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$ *on déduit* $\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ *soit* $\mathrm{Tr}(B) = 0$. *Donc si* $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, *il n'y a pas de solution.*
   Réciproquement, si on suppose $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *alors en posant* $X = B + \lambda A$, *on a bien* $\mathrm{Tr} X = \mathrm{Tr} B + \lambda \mathrm{Tr} A = -\lambda$, *et par conséquent* $X + \mathrm{Tr}(X)A = X - \lambda A = B + \lambda A - \lambda A = B$.
   Dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *l'ensemble des solutions est* $\mathscr{S} = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Conclusion : Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, $\mathscr{S} = \left\{B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)} A\right\}$. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, $\mathscr{S} = \varnothing$. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *alors* $\mathscr{S} = \{B + \lambda A; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 25.17 ♡♡

Trouver toutes les formes linéaires φ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant*

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

Solution : *Soit* φ *une telle forme linéaire. Avec des matrices élémentaires, il vient pour tout* $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $\varphi\left(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}\right) = 0$ *soit* $\varphi\left(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{\ell i}E_{kj}\right) = 0$. *Si* $j = k$ *et* $i \neq \ell$ *il s'ensuit que* $\varphi(E_{i\ell}) = 0$. *Et si* $j = k$ *et* $i = \ell$ *alors* $\varphi\left(E_{ii} - E_{jj}\right) = 0$. *Donc* φ *est nulle sur tous les vecteurs* $E_{i\ell}$ *de la base canonique tel que* $i \neq \ell$ *et constante sur ceux tels que* $i = \ell$. *On en déduit que pour une matrice* $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *alors* $\varphi(A) = \gamma \sum_{i=1}^n a_{ii} = \gamma \mathrm{Tr}(A)$ *où* $\gamma = \varphi(E_{11})$. *Donc* $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Tr})$. *Réciproquement, si* φ *est proportionnelle à la trace, alors* φ *vérifie* $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Exercice 25.18 ♡♡

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On note*

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(A^t B)$$

1. *Calculer* $< A, B >$ *en fonction des coefficients de* A *et* B.
2. *Vérifier que* $< A, B >=< B, A >$
3. *On note* $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$. *Montrer que* $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
4. *Montrer que* $A \mapsto < A, B >$ *et* $B \mapsto < A, B >$ *sont des formes linéaires sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
5. *Montrer que* $|< A, B >| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

On a prouvé que $<,>$ *est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *voir le chapitre 27. L'inégalité prouvée dans la dernière question n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz. Voir le théorème 27.2 page 1063.*

Solution :

1. *On utilise la formule du produit matriciel. Si* $A = \left(a_{ij}\right)$ *et si* $B = \left(b_{ij}\right)$ *Pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\left[A^t B\right]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$ *donc* $\boxed{< A, B >= \mathrm{Tr}\left(A^t B\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}}$.
2. *C'est évident d'après la formule précédente.*
3. *On utilise à nouveau la formule précédente :* $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. *Le résultat en découle immédiatement.*
4. *On montre facilement la linéarité de* $A \mapsto < A, B >$ *en utilisant la linéarité de* Tr. *D'après la question 2.,* $B \mapsto < A, B >$ *est aussi linéaire.*
5. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$,
   $$0 \leqslant \|A + tB\|^2 =< A + tB, A + tB >= \|B\|^2 t^2 + 2 < A, B > t + \|A\|^2 .$$
   On obtient ainsi un trinôme du second degré en t. *Son discriminant est* $\Delta =< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2$. *Comme ce trinôme est positif, il admet au plus une racine réelle et donc* $\Delta \leqslant 0$. *On en déduit que* $< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \leqslant 0$ *et donc que* $|< A, B >| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

25.12.3 Rang d'une matrice

Exercice 25.19 ♡

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *2.* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *3.* $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xlongequal{L_3\leftarrow L_3-L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}=\boxed{3}$$

2.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&-1&1&-1\\3&2&0&1\\4&3&-1&1\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&-1&1&2\\1&-1&2&-1\\0&2&3&1\\-1&3&4&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_1\leftrightarrow L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&2&3&1\\-1&3&4&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4+L_1}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&0&2\\0&2&3&1\\0&2&6&0\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4/2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&2&3&1\\0&1&3&0\end{pmatrix}\xlongequal[L_4\rightarrow L_4+L_2]{L_3\rightarrow L_3+2L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&0&3&5\\0&0&5&2\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4-\frac{5}{3}L_3}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&0&3&5\\0&0&0&-\frac{11}{3}\end{pmatrix}=\boxed{4}$$

3.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&2&1&0&1&1\\1&2&1&0&-1&2\\2&3&1&-1&0&1\\-1&0&1&2&3&1\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_4}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&2&1&2&1&1\\0&2&1&1&-1&2\\-1&3&1&2&0&1\\2&0&1&-1&3&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_1\leftrightarrow L_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\2&0&1&-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{L_4\leftarrow L_4+2L_1}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\0&6&3&3&3&3\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4/3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\0&2&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[L_4\leftarrow L_4-L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&0&0&1&2&-1\\0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&0&2&1\\0&2&-1&1&2\\0&0&2&1&-1\\0&0&2&0&-1\end{pmatrix}=\boxed{4}$$

On a supprimé la troisième colonne, combinaison linéaire des deux premières.

Exercice 25.20 ♡♡

Déterminer suivant la (ou les) valeur(s) du (des) paramètre(s) le rang des matrices :

1. $A=\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&3-a\end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}$.
3. $C=\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos2\theta\\\cos\theta&\cos2\theta&\cos3\theta\\\cos2\theta&\cos3\theta&\cos4\theta\end{pmatrix}$.
4. $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.
5. $E=\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\0&a&b&0&0\\0&0&a&b&0\\0&0&0&a&b\\b&0&0&0&a\end{pmatrix}$.

Solution :

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{transpo.}}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a&-1&2\\0&2-a&0\\0&1&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{si } a\neq1}1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2-a&0\\1&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{transpo.}}$$

$$1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2-a&1\\0&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{si } a\neq2}2+\operatorname{rg}(3-a)$$

De plus, on vérifie facilement que si $a=1$ *ou* $a=2$ *alors* $\mathrm{rg}A=2$.*Donc* $\mathrm{rg}A=\begin{cases}2 & \text{si } a=1,2 \quad \text{ou} \quad 3\\ 3 & \text{sinon}\end{cases}$.

2.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\ b+c&c+a&a+b\\ bc&ca&ab\end{pmatrix}\overset{\text{transpo.}}{=\!=\!=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&b+c&bc\\ 1&c+a&ca\\ 1&a+b&ab\end{pmatrix}\xlongequal[]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&b+c&bc\\ 0&a-b&c(a-b)\\ 0&a-c&b(a-c)\end{pmatrix}=$$

$$1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a-b&c(a-b)\\ a-c&b(a-c)\end{pmatrix}\xlongequal{\text{si } a\neq b \text{ et } a\neq c}1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&c\\ 1&b\end{pmatrix}=\begin{cases}3&\text{si } b\neq c\\ 2&\text{si } b=c\end{cases}.$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\mathrm{rg}B=\begin{cases}1 & \text{si } a=b=c\\ 2 & \text{si deux parmi les trois nombres } a,\ b \text{ et } c \text{ sont égaux et le troisième différent}\\ 3 & \text{si } b\neq c \quad \text{et} \quad a\neq b \quad \text{et} \quad a\neq c\end{cases}$

3. *Si* $\theta\neq 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ \cos\theta&\cos 2\theta&\cos 3\theta\\ \cos 2\theta&\cos 3\theta&\cos 4\theta\end{pmatrix}\xlongequal{\substack{L_2\leftarrow L_2-\cos\theta L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\cos 2\theta L_1}}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\cos 2\theta-\cos^2\theta&\cos 3\theta-\cos\theta\cos 2\theta\\ 0&\cos 3\theta-\cos 2\theta\cos\theta&\cos 4\theta-\cos^2 2\theta\end{pmatrix}=$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&-\sin^2\theta&-\sin 2\theta\sin\theta\\ 0&-\sin 2\theta\sin\theta&-\sin^2 2\theta\end{pmatrix}\xlongequal{\substack{L_2\leftarrow \frac{L_2}{-\sin\theta}\\ L_3\to\frac{L_3}{-\sin 2\theta}}}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\end{pmatrix}\xlongequal{L_3\leftarrow L_3-L_2}$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\\ 0&0&0\end{pmatrix}=2.$$

Par ailleurs si $\theta=0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, $rg C=2$.

4.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\ a&b&c\\ a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&a&a^2\\ 1&b&b^2\\ 1&c&c^2\end{pmatrix}\xlongequal{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}\begin{pmatrix}1&a&a^2\\ 0&b-a&b^2-a^2\\ 0&c-a&c^2-a^2\end{pmatrix}=1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}b-a&b^2-a^2\\ c-a&c^2-a^2\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{si } b\neq a \text{ et } c\neq a}1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&b+a\\ 1&c+a\end{pmatrix}\xlongequal{L_2\leftarrow L_2-L_1}1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&b+a\\ 0&c-b\end{pmatrix}=2+\mathrm{rg}(c-b)=\begin{cases}3&\text{si } c\neq b\\ 2&\text{si } c=b\end{cases}$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\mathrm{rg}D=\begin{cases}1 & \text{si } a=b=c\\ 2 & \text{si deux parmi les trois nombres } a,\ b \text{ et } c \text{ sont égaux et le troisième différent}\\ 3 & \text{si } b\neq c \quad \text{et} \quad a\neq b \quad \text{et} \quad a\neq c\end{cases}.$

5. *Supposant* $a\neq 0$ *et* $b\neq 0$ *:*

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ b&0&0&0&a\end{pmatrix}\xlongequal{L_5\leftarrow aL_5-bL_1}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&-b^2&0&0&a^2\end{pmatrix}\xlongequal{L_5\leftarrow aL_5+b^2L_2}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&b^3&0&a^3\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{L_5\leftarrow aL_5-b^3L_3}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&-b^4&a^4\end{pmatrix}\xlongequal{L_5\leftarrow aL_5+b^4L_4}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&0&b^5+a^5\end{pmatrix}=\begin{cases}5&\text{si } a^5+b^5\neq 0\\ 4&\text{si } a^5+b^5=0\end{cases}$$

En résumé, (et dans le cas où a *et* b *sont réels) :* $\mathrm{rg}(E)=0$ *si* a *et* b *sont non nuls.* $\mathrm{rg}(E)=5$ *si* a *ou* b *est nul mais pas en même temps.* $\mathrm{rg}E=4$ *si* $a=1$ *et* $b=-1$ *ou si* $a=-1$ *et* $b=1$. *Dans tous les autres cas* $\mathrm{rg}(E)=5$.

Exercice 25.21 ♡

Calculer le rang des familles de vecteurs $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ suivantes avec :

1. $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$.
2. $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,2,1)$.
3. $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,-1,1)$.

Solution :

1. *On a très clairement une base de* $\mathbb{R}^3$. *Le rang est* 3.
2. v_1 *et* v_2 *forment une famille libre.* $v_3 = v_1 + v_2$. *Le rang est* 2.
3. *Le rang de la famille* v *est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. *En opérant sur les lignes, on obtient :*

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}, \text{ puis } \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}. \text{ Le rang est donc } 3.$$

Exercice 25.22 ♡

Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x, -z) \end{array} \right.$.
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \longmapsto & (s+t, 2s-t, t) \end{array} \right.$.
3. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.
4. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P \end{array} \right.$.

Solution :

1. *C'est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ *qui est clairement de rang* 3.
2. *C'est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\0&1\end{pmatrix}$ *qui est clairement de rang* 2 *en regardant les deux dernières lignes.*
3. *L'image de la base* $(1, X, X^2)$ *par* θ *est* $(0, 1, 2X)$ *qui est de rang* 2. *Donc* θ *est de rang* 2.
4. *L'image de la base* $(1, X, X^2, X^3)$ *par* θ *est* $(-1, 0, X^2, 2X^3)$ *qui est de rang* 3. *Donc* θ *est de rang* 3.

Exercice 25.23 ♡♡

Soit $M = \begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$.

1. *Calculer* M^2.
2. *Déterminer le rang de* M.
3. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ *telles que* $AB = M$. *Démontrer que* $BA = 9I_2$.

Solution :

1. $M^2 = \begin{pmatrix}64+4+4 & 16+10-8 & -16+8-10\\ 16+10-8 & 4+25+16 & -4+20+20 \\ -16+8-10 & -4+20+20 & 4+16+25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72&18&-18\\18&45&36\\-18&36&45\end{pmatrix} = 9M.$
2. M *est de rang 2.* ($4L_2 - L_1 = 4L_3 + L_1$).
3. AB *est de rang 2, donc* $\text{rg}(A) \geqslant 2$, *donc* $\text{rg}(A) = 2$. *De même* $\text{rg}(B) = 2$. *Donc* A *est la matrice d'une application linéaire injective.* $\exists A' \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, *telle que* $A'A = I_2$. *De même* B *est la matrice d'une application linéaire surjective.* $\exists B' \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, *telle que* $BB' = I_2$. *Comme* $ABAB = 9AB$, *on en déduit que* $A'ABABB' = 9A'ABB' = 9I_2I_2 = 9I_2$.

25.12.4 Calcul de déterminants de taille 2 ou 3

Exercice 25.24 ♡

En variant les techniques utilisées (Règle de Sarrus, développement suivant une ligne, une colonne, en faisant apparaître des zéros,...) Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\2&4&2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&1&1\\5&8&3\\2&-1&2\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}3&4&-2\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}-3&2&9\\-1&0&-1\\11&-5&-12\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1&-1&0\\5&-5&5\\2&1&3\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&3&4\\-1&1&8\end{vmatrix}$

Solution :

a) *On peut opérer sur les lignes :* $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$ *et* $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\2&4&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\0&0&2\end{vmatrix} = 2.$

b) *En développant par rapport à la deuxième ligne :*
$\begin{vmatrix}-3&2&9\\-1&0&-1\\11&-5&-12\end{vmatrix} = -1\times(-1)\times\begin{vmatrix}2&-9\\-5&-12\end{vmatrix} + (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix}-3&2\\11&-5\end{vmatrix} = (-24+45)+(15-22) = 21-7 = 14.$

c) *La présence des trois* 1 *à la première ligne incite à soustraire la première colonne aux deux autres :*
$\begin{vmatrix}1&1&1\\5&8&3\\2&-1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\5&3&-2\\2&-3&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&-2\\-3&0\end{vmatrix} = -6.$

d) *En additionnant les colonnes :* $C_2 \longleftarrow C_2 + C_1$
$\begin{vmatrix}1&-1&0\\5&-5&5\\2&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\5&0&5\\2&3&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0\\5&5&0\\2&3&3\end{vmatrix} = -15.$

e) *Avec la règle de Sarrus, alors ?* $\begin{vmatrix}3&4&-2\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix} = 27+4+6-8-24-6 = -1.$

f) $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ $\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&3&4\\-1&1&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&-2\\0&4&2\\0&2&6\end{vmatrix} = 24-4 = 20.$

Exercice 25.25 ♡

Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix}0&-1&10\\0&2&5\\0&1&1\end{vmatrix}$
2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix}-1&2&3\\1&-2&5\\1&-2&2\end{vmatrix}$
3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&2&-3\\3&1&2\end{vmatrix}$
4. $\Delta_4 = \begin{vmatrix}1&2&1\\0&0&3\\0&0&1\end{vmatrix}$
5. $\Delta_5 = \begin{vmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{vmatrix}$
6. $\Delta_6 = \begin{vmatrix}1&\cos 2x&2\cos^2 x\\1&-\cos 2x&2\sin^2 x\\\cos x\sin x&\cos x\sin x&\sin 2x\end{vmatrix}$

Solution :

1. *Une colonne de* Δ_1 *est nulle donc* $\Delta_1 = 0$.
2. *Les deux premières colonnes de* Δ_2 *sont proportionnelles, donc* $\Delta_2 = 0$.
3. *La première colonne de* Δ_3 *est somme des deux autres donc* $\Delta_3 = 0$.
4. Δ_4 *étant diagonale, le déterminant* Δ_4 *est égal au produit de ces termes diagonaux. Un de ceux-ci étant nul, il en est de même de* Δ_4.
5. $\Delta_5 \xlongequal{C_3 \to C_2 + C_3} \begin{vmatrix}1&a&a+b+c\\1&b&a+b+c\\1&c&a+b+c\end{vmatrix}$ *et les première et troisième colonnes de* Δ_5 *sont proportionnelles. Il vient* $\Delta_5 = 0$.
6. *La dernière colonne de* Δ_6 *est somme des deux autres donc* $\Delta_6 = 0$.

Exercice 25.26 ♡♡

Calculer, sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
(appelé déterminant de Vandermonde).

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$

où a, b, c sont trois réels.

Solution :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xlongequal{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$
$\boxed{(a+b+c)^3}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2abc}$ *par application de la règle de Sarrus.*

3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xlongequal{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$

$(1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1+a+b+c}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C1+C2+C_3} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) = \boxed{\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$\xlongequal{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3} \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} -2\begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \boxed{-2abc(b-a)(c-a)(c-b)}$ *car on reconnaît un déterminant de Vandermonde.*

7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \xlongequal[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & 2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & -2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} \\ 0 & 2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} & -2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \end{vmatrix} = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \cos\frac{b+a}{2} & \sin\frac{b+a}{2} \\ 0 & \cos\frac{c+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \end{vmatrix} =$

$-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\left(\sin\frac{c+a}{2}\cos\frac{b+a}{2} - \sin\frac{b+a}{2}\cos\frac{c+a}{2}\right) = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\left(\frac{c+a}{2} - \frac{b+a}{2}\right) =$

$\boxed{-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}}$

Exercice 25.27 ♡

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60$$

Solution : *Facile par permutations des colonnes.*

Exercice 25.28 ♡

Les nombres 119*,* 153 *et* 289 *sont tous divisibles par* 17*. Montrer, sans le développer que le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *est divisible par 17.*

Solution : *Notons* Δ *ce déterminant. On a :* $1000\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 50 & 3 \\ 200 & 80 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 119 & 10 & 9 \\ 153 & 50 & 3 \\ 289 & 80 & 9 \end{vmatrix} =$ $17\begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}$ *où* a*,* b *et* c *désignent respectivement le quotient de* 119*,* 153 *et* 289 *par* 17*. On obtient* $:\Delta = 17m$ *avec* $m = \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}$ *qui est un entier. Comme* 17 *est premier avec* 1000*, appliquant le lemme de Gauss,* 17 *divise* Δ*.*

Exercice 25.29 ♡

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*. Considérons les polynômes* $P_a = (X-a)^2, P_b = (X-b)^2, P_c = (X-c)^2$*. Déterminer pour quelles valeurs de* (a,b,c) *la famille* $\mathscr{P} = (P_a, P_b, P_c)$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *?*

Solution : *La matrice de la famille* $\mathscr{P}$ *dans la base canonique* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est* $M = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. Utilisant les déterminants de Vandermonde, on trouve* $\det M = -2(b-a)(c-a)(c-b)$*. La famille* $\mathscr{P}$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *si et seulement si les scalaires* a*,* b *et* c *sont deux à deux distincts.*

Exercice 25.30 ♡♡♡

Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

Solution : *On développe suivant la première ligne et on reconnaît les formules d'addition :*

$$\Delta = \cos(a-b)\left[\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)\right] - \cos(b-c)\left[\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)\right] + \cos(c-a)\left[\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b)\right] =$$
$$\cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \frac{1}{2}\left(\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)\right)$$

puis on utilise les deux formules $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ *et* $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ *:*

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}\left(2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin 2(c-a)\right)\\ &= \sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin(c-a)\cos(c-a)=\sin(a-c)\left(\cos(a+c-2b)-\cos(c-a)\right)\\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)\end{aligned}$$

Exercice 25.31 ♡

Soient

$$P_1=2X^2-X+1,\quad P_2=X^2+2X,\quad P_3=X^2-1$$

Montrer que la famille $\mathscr{P}=(P_1,P_2,P_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : *Notant* $e=\left(X^2,X,1\right)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$*, on a :*

$$\mathrm{Mat}_e(\mathscr{P})=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

qui est inversible. La famille $\mathscr{P}$ *est donc une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 25.32 ♡

Á quelle condition sur le réel a *la famille* $e=(e_1,e_2,e_3)$ *:*

$$e_1=(a,1,1)\quad e_2=(1,a,1)\quad e_3=(1,1,a)$$

forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution : *La famille* e *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si* $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\neq 0$. *Ce déterminant vaut :* $(a-1)^2(a+2)$. *La famille* e *est donc libre si et seulement si* $a\neq 1$ *et* $a\neq -2$.

25.12.5 Inversion de matrice

Exercice 25.33 ♡

Inverser

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

1. *en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.*
2. *en utilisant la comatrice.*

Solution :

1. *On effectue les mêmes opérations sur les lignes de* A *et de* I_3.

$$\begin{array}{rrrlclrrr}
-3&1&0&&&&1&0&0\\
2&0&1&&&&0&1&0\\
1&2&-1&&&&0&0&1\\
&&&&&&&&\\
-3&1&0&&&&1&0&0\\
0&2&3&L_2&\leftarrow&3L_2+2L_1&2&3&0\\
0&7&-3&L_3&\leftarrow&3L_3+L_1&1&0&3\\
&&&&&&&&\\
-6&0&-3&L_1&\leftarrow&2L_1-L_2&0&-3&0\\
0&2&3&&&&2&3&0\\
0&0&-27&L_3&\leftarrow&2L_3-7L_2&-12&-21&6\\
&&&&&&&&\\
-54&0&0&L_1&\leftarrow&9L_1-L_3&12&-6&-6\\
0&18&0&L_2&\leftarrow&9L_2+L_3&6&6&6\\
0&0&-27&&&&-12&-21&6\\
&&&&&&&&\\
9&0&0&L_1&\leftarrow&L_1/(-6)&-2&1&1\\
0&9&0&L_2&\leftarrow&L_2/2&3&3&3\\
0&0&9&L_3&\leftarrow&L_3/(-3)&4&7&-2
\end{array}$$

Chaque opération sur les lignes est la multiplication à gauche par une matrice inversible. Donc A *est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *On calcule* $\det(A) = 9$ *et* $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *donc* $A^{-1} = \dfrac{{}^t\mathrm{com}(A)}{\det(A)} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.34 ♡

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
2. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$
5. $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25.35 ♡

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *donnée par* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $A^2 - 2A - I_2 = 0$. *On dit que* $X^2 - 2X - 1$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Solution :

1. *On montre par un calcul direct que* $A^2 - 2A - I_2 = 0$.
2. *L'égalité précédente amène :* $A(A - 2I_2) = I_2$. A *est donc inversible et sa matrice inverse est :* $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$
3. *On retrouve ce résultat en utilisant la comatrice ou en passant par un système.*

Exercice 25.36 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme que* $P = X^3 - 3X + 3$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Solution : *Même déroulement que l'exercice précédent. On trouve* $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{3}A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.37 ♡

Soient deux matrices carrées $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $AB = 0$. *Montrer que si* A *est inversible, alors* $B = 0$.

Solution : *Si* A *est inversible alors on peut écrire :*

$$AB = 0 \implies A^{-1} \times AB = A^{-1} \times 0 \implies B = 0.$$

Exercice 25.38 ♡♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique. On pose* $M = I + A$.

1. *Soit une matrice colonne* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Calculer la matrice* ${}^tXAX$
2. *En déduire que la matrice* M *est inversible.*

Solution :

1. *Si* $A = (a_{ij})$ *alors* ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x i x_j$. *Comme* A *est antisymétrique, pour tout* $i \neq j$ $a_{ji} x i x_j = -a_{ij} x i x_j$ *et* $a_{ii} = 0$. *Alors* $\boxed{{}^tXAX = 0}$.
2. *Soit* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Alors*

$$MX = 0 \implies {}^tXMX = 0 \implies {}^tX(I+A)X = 0 \implies {}^tXX + {}^tXAX = 0 \implies {}^tXX = 0$$

en vertu de la première question. Mais si $X = (x_i)$, ${}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2$ *et* ${}^tXX = 0$ *implique que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ *et que* $X = 0$. *On en déduit que* M *est inversible.*

Exercice 25.39 ♡♡

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *et* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *la famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *admettant* A *comme matrice dans la base* e. *On a donc :*

$$f_1 = e_1 + ae_2,\ f_2 = e_2 + ae_3,\ \dots,\ f_{n-2} = e_{n-2} + ae_{n-1},\ f_{n-1} = e_{n-1} + ae_n,\ f_n = e_n.$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} e_n & = & f_n \\ e_{n-1} & = & f_{n-1} - af_n \\ e_{n-2} & = & f_{n-2} - af_{n-1} + a^2 f_n \\ \vdots & = & \vdots \\ e_2 & = & f_2 - af_3 + a^2 f_4 - a^3 f_5 + \dots + (-1)^{n-2} a^{n-2} f_n \\ e_1 & = & f_1 - af_2 + a^2 f_3 - a^3 f_4 + \dots + (-1)^{n-1} a^{n-1} f_n \end{array}$$

donc f est une base de $\mathbb{K}^n$, A est inversible et

$$A^{-1} = \operatorname{Mat}_f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^2 & -a & \ddots & & \\ -a^3 & a^2 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{n-2}a^{n-2} & (-1)^{n-3}a^{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-1}a^{n-1} & (-1)^{n-2}a^{n-2} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.40 ♡♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $I_n + A$ est inversible. Soit $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

1. *Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.*
2. *Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.*

Solution :

1. *On a $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$, donc $I_n - A = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)$ donc $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$, ce qu'il fallait vérifier.*
   Un argument plus savant : $(I_n + A)^{-1}$ est un polynôme en A, et comme tel commute avec n'importe quel polynôme en A, par exemple $I_n - A$. En effet, soit $B = I_n + A$. La famille $I_n, B, B^2, \dots, B^{n^2}$ est liée. On peut écrire $\lambda_0 I_n + \lambda_1 B + \dots \lambda_k B^k = 0$ où k désigne le plus grand indice $\leqslant n^2$ pour lequel $\lambda_k \neq 0$. On a $\lambda_0 \neq 0$, sinon on aurait $B(\lambda_1 I_n + \dots \lambda_k B^{k-1} = 0$ et donc B ne serait pas inversible. Donc on peut écrire
   $$I_n = B\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}\right).$$
   Donc $B^{-1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}$ est un polynôme en B donc un polynôme en $A = B - I_n$.
2. *$B = (2I_n - I_n - A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - (I_n + A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$. D'où $I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}$, ce qui montre bien que $I_n + B$ est inversible. De plus $(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A)$, d'où $A = 2(I_n + B)^{-1} - I_n$.*

Exercice 25.41 ♡♡

Soit A une matrice carrée nilpotente de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice $(I_n - A)$ est inversible.

Solution : *On suppose que A est nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$. On a donc $A^k = 0$ pour tout $k \geqslant p$ et $A^k \neq 0$ pour tout $k < p$. Mais*

$$(I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}\right) = (I_n - A) + \left(A - A^2\right) + \dots + \left(A^{p-1} - A^p\right) = I_n$$

par télescopage et car $A^p = 0$. Donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}$.

Exercice 25.42 ♡♡

Soit une matrice U triangulaire supérieure telle que tous les éléments de la diagonale soient non-nuls. Montrer que la matrice U est inversible. (On montrera que $UX = 0 \Longrightarrow X = 0$)

Solution : *Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ telle que $UX = 0$. On obtient un système d'équations triangulaire sur les coordonnées de X qui se résout de proche en proche en partant de la dernière équation et on obtient finalement que $X = 0$. Par conséquent, U est inversible.*
Une autre façon de voir est de considérer que la matrice est celle d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base (X^k). L'hypothèse « U triangulaire supérieure avec tous les éléments de la diagonale non-nuls » se traduit par : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \deg(u(X^k)) = k$. Donc u transforme la base (X^k) en une famille échelonnée en degrés, donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc u est bijectif, donc U est inversible.

Exercice 25.43 ♡♡

On considère la matrice $M = ((m_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$. Calculer M^2 et M^{-1}.

Solution : *Faire d'abord le calcul pour* $n=3$. *En notant* $M^2 = ((a_{ij}))$, *on tire que* $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj} = \sum_{k\notin\{i,j\}} \dfrac{i}{j}$

$$a_{ij} = \begin{cases} (n-2)\dfrac{i}{j} & \text{si } i \neq j \\ (n-1) & \text{si } i = j \end{cases}$$

On remarque que $M^2 = (n-2)M + (n-1)I_n$ *d'où l'on tire que* M *est inversible et que* $M^{-1} = \dfrac{1}{n-1}.(M-(n-2)I_n)$.

Exercice 25.44 ♡♡♡

Inverser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : *Avec la forme de la matrice* A, *on peut faire le pari que la matrice inverse peut s'écrire, si elle existe,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z & t & u & v \\ v & x & y & z & t & u \\ u & v & x & y & z & t \\ t & u & v & x & y & z \\ z & t & u & v & x & y \\ y & z & t & u & v & x \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AA^{-1} = I_6$ *se traduit, pour la première colonne de* AA^{-1}, *par*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} x & +6v & +5u & +4t & +3z & +2y & = & 1 \\ 2x & +v & +6u & +5t & +4z & +3y & = & 0 \\ 3x & +2v & +u & +6t & +5z & +4y & = & 0 \\ 4x & +3v & +2u & +t & +6z & +5y & = & 0 \\ 5x & +4v & +3u & +2t & +z & +6y & = & 0 \\ 6x & +5v & +4u & +3t & +2z & +y & = & 0 \end{array}\right.$$

Il n'est pas difficile de voir que la (les ?) solutions de ce système fournit une solution pour les autres colonnes.
Maintenant, en additionnant les lignes, en posant $S = x+v+u+t+z+y$, *on obtient* $21S = 1$.
Ensuite on multiplie la $2^{\text{ème}}$ *la* $4^{\text{ème}}$ *et la* $6^{\text{ème}}$ *ligne par* -1 *et on additionne les six lignes pour obtenir* $-3x+3v-3u+3t-3z+3y = 1$ *soit* $3S_1 - 3S_2 = -1$ *en posant* $S_1 = x+u+z$ *et* $S_2 = v+t+y$. *Ce qui donne* $S_1 = -\dfrac{1}{7}$ *et* $S_2 = \dfrac{4}{21}$.
Si on continue dans la même idée, pourquoi ne pas multiplier la $2^{\text{ème}}$ *et la* $5^{\text{ème}}$ *ligne par* j *et la* $3^{\text{ème}}$ *et la* $6^{\text{ème}}$ *ligne par* j^2 *avant d'additionner le tout :* $(5+7j+9j^2)(x+t)+(9+5j+7j^2)(v+z)+(7+9j+5j^2)(u+y) = 1$. *En utilisant* $7(1+j+j^2) = 0$, *on a* $(-2+2j^2)(x+t)+(2-2j)(v+z)+(2j-2j^2)(u+y) = 1$. *En factorisant par* $(2-2j)$, *on a* $j^2(x+t)+(v+z)+j(u+y) = \dfrac{1}{2(1-j)} = \dfrac{1-j^2}{2(1-j)(1-j^2)} = \dfrac{1}{6}(1-j^2)$. *En conjuguant, on obtient* $j(x+t)+(v+z)+j^2(u+y) = \dfrac{1}{6}(1-j)$. *En posant* $T_1 = x+t$, $T_2 = v+z$, $T_3 = u+y$ *on a*
$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} T_1 & + & T_2 & + & T_3 & = & \dfrac{1}{21} \\ j^2T_1 & + & T_2 & + & jT_3 & = & \dfrac{1}{6}(1-j^2) \\ jT_1 & + & T_2 & + & j^2T_3 & = & \dfrac{1}{6}(1-j) \end{array}\right.$ *. Bon, on sent qu'il y a de l'idée mais il n'y a rien de décisif. Il faut aller encore plus loin :*
Soit $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{6}\right)$. *On multiplie la* $k^{\text{ème}}$ *ligne par* ζ^k *et on additionne le tout :*
$xS + \zeta vS + \zeta^2 uS + \zeta^3 tS + \zeta^4 zS + \zeta^5 yS = 1$ *en posant* $S = 1+2\zeta+3\zeta^2+4\zeta^3+5\zeta^4+6\zeta^5$. *Soit* $P(X) = X\dfrac{X^6-1}{X-1}$, *on a* $S = P'(\zeta)$.
Or $P'(X) = \dfrac{X^6-1}{X-1} + X\dfrac{6X^5(X-1)-(X^6-1)}{(X-1)^2}$, *d'où* $S = \dfrac{6}{\zeta-1}$.

On obtient ainsi en faisant jouer le rôle de ζ par $\zeta^2, \zeta^3, \dots$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x & +v & +u & +t & +z & +y & = & \dfrac{1-1}{6} & +\dfrac{1}{21} \\ x & +\zeta v & +\zeta^2 u & +\zeta^3 t & +\zeta^4 z & +\zeta^5 y & = & \dfrac{\zeta-1}{6} & \\ x & +\zeta^2 v & +\zeta^4 u & +\zeta^6 t & +\zeta^2 z & +\zeta^4 y & = & \dfrac{\zeta^2-1}{6} & \\ x & +\zeta^3 v & +\zeta^6 u & +\zeta^9 & +\zeta^{12} z & +\zeta^{15} y & = & \dfrac{\zeta^3-1}{6} & \\ x & +\zeta^4 v & +\zeta^8 u & +\zeta^{12} t & +\zeta^{16} z & +\zeta^{20} y & = & \dfrac{\zeta^4-1}{6} & \\ x & +\zeta^5 v & +\zeta^{10} u & +\zeta^{15} t & +\zeta^{20} z & +\zeta^{25} y & = & \dfrac{\zeta^5-1}{6} & \end{array}\right.$$

On trouve x en additionnant les lignes, en utilisant $1+\zeta^k+\zeta^{2k}+\zeta^{3k}++\zeta^{4k}++\zeta^{5k}=0$ pour $1 \leqslant k \leqslant 5$: $6x = \dfrac{1}{21} - 1$ d'où $x = -\dfrac{10}{63}$. Pour trouver v, on multiplie la $k^{\text{ème}}$ ligne par ζ^{5k} et on additionne le tout : $6v = 1 + \dfrac{1}{21}$ d'où $v = \dfrac{11}{63}$.
Pour trouver t, on multiplie la k-ième ligne par ζ^{4k} et on additionne le tout : $6u = \dfrac{1}{21}$ d'où $t = \dfrac{1}{126}$. Le même calcul donne le même résultat pour les autres inconnues : $t = z = y = \dfrac{1}{126}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{126}\begin{pmatrix} -20 & 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 22 & -20 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 22 & -20 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 22 & -20 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & -20 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 22 & -20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.45 ♡♡♡

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ à diagonale dominante *:*

$$\forall i \in [\![1,n]\!]^2, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A est inversible. Cette propriété est connue sous le nom de lemme d'Hadamard.

Solution : *Supposons que A ne soit pas inversible. Alors il existe $X = (x_i) \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = 0$. Comme X est non nul, on sait que $\alpha = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \neq 0$. De plus, on a encore $A(X/\alpha) = 0$. On peut donc supposer que $\max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = 1$. On note i_0 l'indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. L'égalité $AX = 0$ amène pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$ ou encore $-a_{ii} x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j$. En particulier, pour $i = i_0$, cette égalité devient en passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire :*

$$\left|a_{i_0 i_0}\right| = \left|a_{i_0 i_0} x_{i_0}\right| = \left|\sum_{j=1, j \neq i_0}^n a_{i_0 j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i_0}^n \left|a_{i_0 j}\right| \left|x_j\right| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i_0}^n \left|a_{i_0 j}\right|$$

car $\max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = 1$. Mais comme la matrice est à diagonale dominante, on a aussi $|a_{i_0 i_0}| > \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent A est inversible.

Exercice 25.46 ♡♡♡

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, Démontrer qu'il existe un unique polynôme $U_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n, vérifiant*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}, \sin \vartheta . U_n(\cos \vartheta) = \sin(n+1)\vartheta.$$

Démontrer que

$$U_{n+1}(X) + U_{n-1}(X) = 2XU_n(X) \qquad (*)$$

Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1, \forall p \geqslant 1, U_{n+p} = U_p U_n - U_{p-1} U_{n-1} \qquad (**).$$

2. *Soit*

$$\mathrm{B}_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour $x \neq \cos \dfrac{k\pi}{n+1}, \mathrm{B}_n(x)$ *est inversible et son inverse est la matrice symétrique définie par*

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mathrm{U}_{i-1}(x)\mathrm{U}_{n-j}(x)}{\mathrm{U}_n(x)} \text{ pour } i \leqslant j$$

et

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mathrm{U}_{j-1}(x)\mathrm{U}_{n-i}(x)}{\mathrm{U}_n(x)} \text{ pour } i \geqslant j.$$

Solution :

1. *Existence : On l'établit par récurrence. On peut prendre* $\mathrm{U}_0(\mathrm{X}) = 1, \quad \mathrm{U}_1(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}$*,*
et puisque $\sin(n+2)\vartheta + \sin n\vartheta = 2\cos\vartheta \sin(n+1)\vartheta$ *on a nécessairement*

$$\sin\vartheta\,\mathrm{U}_{n+1}(\cos\vartheta) + \sin\vartheta\,\mathrm{U}_{n-1}(\cos\vartheta) = 2\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{U}_n(\cos\vartheta).$$

Donc on choisit $\mathrm{U}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{U}_n(x) - \mathrm{U}_{n-1}(x)$ *sur* $[-1;1]$*. On en déduit que les* U_n *sont des fonctions polynômes, appelés* polynômes de Tchebychev *(de deuxième espèce). Les polynômes* $\mathrm{U}_n(\mathrm{X})$ *ainsi construits conviennent et appartiennent à* $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$*.*
Unicité : La différence de deux tels polynômes s'annulerait sur $[-1;1]$ *ce qui donne l'unicité.*
On a bien entendu

$$\mathrm{U}_{n+1}(\mathrm{X}) + \mathrm{U}_{n-1}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_n(\mathrm{X}). \qquad (*)$$

U_n *est de degré* n *par une récurrence immédiate.*
Les $\xi_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), 1 \leqslant k \leqslant n$ *sont les* n *racines distinctes de* U_n*.*
Enfin, en utilisant trois fois $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b))$*, on a d'une part :*

$$\sin^2\vartheta\,\mathrm{U}_{n+p}(\cos\vartheta) = \sin\vartheta\sin(n+p+1)\vartheta = \frac{1}{2}\cos(n+p)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(n+p+2)\vartheta,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta\,\mathrm{U}_p(\cos\vartheta)\mathrm{U}_n(\cos\vartheta) - \sin^2\vartheta\,\mathrm{U}_{p-1}(\cos\vartheta)\mathrm{U}_{n-1}(\cos\vartheta) &= \sin(p+1)\vartheta\sin(n+1)\vartheta - \sin p\vartheta\sin n\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p+n+2)\vartheta \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta + \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta \end{aligned}$$

On a bien établi (**)

2. *Soit* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *(en posant* $\mathrm{U}_{-1}(x) = 0$ *dans le cas où* $j = n$*)*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}b_{kj} &= b'_{ij-1}b_{j-1j} + b'_{ij}b_{jj} + b'_{ij+1}b_{j+1j} = b'_{ij-1}b_{j-1j} + 2xb'_{ij} + b'_{ij+1} \\ &= \frac{(-1)^{i+j-1}\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j+1} + (-1)^{i+j}2x\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j-1}}{\mathrm{U}_n(x)} \\ &= (-1)^{i+j-1}\frac{\mathrm{U}_{i-1}\left(\mathrm{U}_{n-j+1} - 2x\mathrm{U}_{n-j} + \mathrm{U}_{n-j-1}\right)}{\mathrm{U}_n(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'après $(*)$ *où l'on remplace* n *par* $n-j$*.*

Pour $i=j$ (en posant $U_{-1}(x)=0$ dans le cas où $j=n$ et donc $b'_{nn+1}=0$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}b_{ki} = b'_{ii-1}b_{i-1i}+b'_{ii}b_{ii}+b'_{ii+1}b_{i+1i} &= b'_{ii-1}b_{i-1i}+2xb'_{ii}+b'_{ii+1}\\ &= -\frac{U_{i-2}U_{n-i}+2xU_{i-1}U_{n-i}-U_{i-1}U_{n-i-1}}{U_n(x)}\\ &= \frac{1}{U_n(x)}\left(-U_{i-2}U_{n-i}+U_{i-1}\left(2xU_{n-i}+U_{n-i-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{U_n(x)}\left(-U_{i-2}U_{n-i}+U_{i-1}U_{n-i+1}\right)=\frac{1}{U_n(x)}U_{n-i+1+i-1} \text{ d'après } (**)\\ &= \frac{1}{U_n(x)}U_n=1.\end{aligned}$$

25.12.6 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 25.47 ♡

Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}^*$ et les matrices A suivantes :

1. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

Solution : *Par des récurrences faciles, on trouve :*

1. $A^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$
2. $A^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix}$
3. $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 25.48 ♡

1. *Calculer les puissances de* $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.
2. *On pose :* $F_0=0$ *;* $F_1=1$ *;* $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ *(suite de Fibonacci) .*
   Démontrer que pour tous entiers naturels n et p, $F_{n+p}=F_{n+1}F_p+F_nF_{p-1}$.

Solution :

1. *Par récurrence,* $\forall n\in\mathbb{N}^*\ A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$.
2. *On calcule le coefficient de la* 1^ère^ *ligne et* 2^ème^ *colonne de* $A^{n+p}=A^nA^p$. *Comparer avec l'exercice 20.21 p. 764*

Exercice 25.49 ♡

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $A-I_3$ *est nilpotente d'ordre* 3 *(c'est à dire que* $(A-I_3)^2\neq 0$ *et que* $(A-I_3)^3=0$
2. *En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton* A^n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct, on montre que* $B=A-I_3$ *vérifie* $B^3=0$ *et* $B^2\neq 0$.

2. *Utilisant la formule du binôme, ce qui est valide car* $I_3 \times B = B \times I_3$*, on obtient, pour* $n \geqslant 3$ *:*

$$\begin{aligned} A^n &= (B+I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B^1 + \binom{n}{2}B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-2) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable si $n = 0, 1, 2$.

Exercice 25.50 ♡

Calculer A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de deux manières différentes.*

Solution : *Même déroulement que dans l'exercice précédent : on forme la matrice* $B = A - I_3$ *et on montre qu'elle est nilpotente d'ordre* 3*. On applique ensuite la formule du binôme et on trouve :* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. On peut aussi prouver ce résultat en effectuant une récurrence.*

Exercice 25.51 ♡♡

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 5X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$*, déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^2 - 5X + 4$.
4. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct.*
2. *On déduit de la question précédente que :* $A\left(\frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A\right) = I_2$. A *est donc inversible d'inverse :* $\frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A$.
3. *En utilisant le théorème de la division euclidienne, il existe des polynômes à coefficients réels* Q *et* R *tels que :* $X^n = Q\left(X^2 - 5X + 4\right) + R$ *et* $\deg R < 2$*. Le polynôme* R *est donc de la forme* $R = aX + b$*. Remarquant que les racines de* $X^2 - 5X + 4$ *sont* 1 *et* 4*, on obtient le système :* $\begin{cases} a + b &= 1 \\ 4a + b = 4^n \end{cases}$ *qui admet comme solution :* $a = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ *et* $b = \frac{1}{3}(4 - 4^n)$.
4. *On en déduit que si* $n \geqslant 2$*,* $A^n = Q(A)\left(A^2 - 5A + 4I_3\right) + R(A) = R(A) = \boxed{\frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)A + \frac{1}{3}\left(4 - 4^n\right)I_2}$

Exercice 25.52 ♡♡

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *remplie de* 1 *:*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* J^2 *puis pour* $k \in \mathbb{N}$, J^k.
2. J *est-elle inversible ?*

3. *On considère la matrice*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de A.

Solution :

1. $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ *puis par récurrence, pour* $k \geqslant 1$, $\mathrm{J}^k = n^{k-1}\mathrm{J}$.
2. *Puisque* $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$, *il vient que* $\mathrm{J}(\mathrm{J} - n\mathrm{I}) = 0$ *et alors si* J *était inversible, en multipliant à gauche par* J^{-1}, *on aurait* $\mathrm{J} = n\mathrm{I}$ *ce qui est faux pour* $n \geqslant 2$.
   Remarque : La matrice J *est visiblement de rang 1.*
3. *Écrivons* $\mathrm{A} = 2\mathrm{I} - \mathrm{J}$ *et en utilisant le binôme (*I *et* J *commutent), on trouve pour* $n \geqslant 1$ *que*

$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k \mathrm{J}^k = 2^n\mathrm{I} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1}\Big)\mathrm{J}$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1} = \dfrac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k - 2^n\right) = \dfrac{(-1)^n - 2^n}{3}$. *Et finalement,*

$$\mathrm{A}^n = 2^n\mathrm{I} + \frac{(-1)^n - 2^n}{3}\mathrm{J}.$$

Exercice 25.53 ♡

On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Solution : *Décomposons la matrice sous la forme* $\mathrm{A} = \mathrm{H} - \mathrm{I}$ *où*

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}^2 = a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}^3 = 0$$

Avec le binôme, on trouve finalement que

$$\mathrm{A}^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & \frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}$$

Exercice 25.54 ♡

On considère la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Calculer ses puissances A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Solution : *On pose* $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{J}$ *avec* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On vérifie que* $\mathrm{J}^2 = \mathrm{I}_2$. *Comme* I_2 *et* J *commutent, on peut appliquer la formule du binôme :*

$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} \mathrm{J}^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} \mathrm{I}_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} \mathrm{J} = \mathrm{S}\mathrm{I}_2 + \mathrm{T}\mathrm{J}.$$

Maintenant $(a-b)^n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \mathrm{S} - \mathrm{T}$. *Comme* $(a+b)^n = \mathrm{S} + \mathrm{T}$, *on en déduit* $\mathrm{S} =$

$\frac{1}{2}\left[(a+b)^n+(a-b)^n\right]$ *et* $T=\frac{1}{2}\left[(a+b)^n-(a-b)^n\right]$. *Donc*

$$A^n=\begin{pmatrix} S & T\\ T & S\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n\\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 25.55 ♡

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&b\\b&0&a\end{pmatrix}$. *Calculer les puissances des matrices* A,B.

Solution : *On écrit* $A=I+J$ *avec* $J=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. *On calcule* $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *et* $J^3=0$. *En appliquant le binôme,* $A^n=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2$.

On écrit $B=aI+bP$ *avec* $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. *Alors* $P^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ *et* $P^3=I$. *En appliquant la formule du binôme,* $B^n=\alpha I+\beta P+\gamma P^2$ *avec* $\alpha=\sum_{k=0,k=3p}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$, $\beta=\sum_{k=0,k=3p+1}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$ *et* $\gamma=\sum_{k=0,k=3p+2}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$.

Pour calculer ces trois sommes (voir aussi B.2.2 p. 1162), on développe $(a+b)^n$, $(a+jb)^n$ *et* $(a+j^2b)^n$. *On trouve ainsi*

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=(a+b)^n\\ \alpha+\beta j+\gamma j^2=(a+jb)^n\\ \alpha+\beta j^2+\gamma j=(a+j^2b)^n\end{cases}.$$

Soit $V=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ *et* $D=\begin{pmatrix}(a+b)^n\\(a+jb)^n\\(a+j^2b)^n\end{pmatrix}$. *Posons aussi* $\overline{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$. *On a* $V\overline{V}=3I_3$, *donc* $X=\frac{1}{3}\overline{V}D$, *soit*

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n\right)\\ \beta=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n\right)\\ \gamma=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n\right)\end{cases}.$$

Autrement dit $B^n=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\gamma&\alpha&\beta\\\beta&\gamma&\alpha\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n & (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n\\ (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n & (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n\\ (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 25.56 ♡

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$. *Calculer* A^n. *(on décomposera* $A=I_2+4J$*)*

Solution : *On a* $A=I_2+4J$, *avec* $J=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$. *Comme* $J^2=0$, *on en déduit, puisque* I_2 *et* J *commutent,* $A^n=I_2+4nJ=\begin{pmatrix}4n+1&-4n\\4n&-4n+1\end{pmatrix}$.

Exercice 25.57 ♡♡

1. *Soit la matrice* $H=((h_{ij}))\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $h_{ij}=1$. *Calculer* H^k.
2. *En déduire les puissances de la matrice* $A=((a_{ij}))$ *où* $a_{ij}=(1-\delta_{ij})$.
3. *Montrer que la matrice* A *est inversible en calculant son rang.*
4. *Trouver l'inverse de la matrice* A *(on le cherchera sous la forme* $aI+bH$*).*

Solution :

1. *On montre par récurrence que* $\mathrm{H}^k = n^{k-1}\mathrm{H}$ *pour* $k \geqslant 1$ *et* $\mathrm{H}^0 = \mathrm{I}$.
2. $\mathrm{A} = \mathrm{H} - \mathrm{I}$. *En utilisant la formule du binôme,*
$$\mathrm{A}^p = (-1)^p\mathrm{I} + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}n^k(-1)^{p-k}\right)\mathrm{H} = (-1)^p\mathrm{I} + \frac{(n-1)^p}{n}\mathrm{H} - \frac{(-1)^p}{n}.\mathrm{H}$$
3. *Par les opérations* $\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \mathrm{C}_1$, *puis en ajoutant toutes les colonnes de la matrice obtenue à la première,* A *a même rang que la matrice triangulaire supérieure avec pour éléments* $(n-1), -1, \dots, -1$ *sur la diagonale. Par conséquent, pour* $n \geqslant 2$, *le rang de* A *vaut* n *et donc* A *est inversible.*
4. *En calculant*
$$(a\mathrm{I} + b\mathrm{H})(\mathrm{H} - \mathrm{I}) = -a\mathrm{I} + (a + (n-1)b)\mathrm{H}$$
il suffit de prendre $a = -1$ *et* $b = \dfrac{1}{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$. *Par conséquent,* A *est inversible et*
$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{n-1}\mathrm{H} - \mathrm{I}$$

Exercice 25.58 ♡♡

1. *Soit la matrice* $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Calculer les matrices* J^2 *et* J^n *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Calculer les puissances de la matrice* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & 0 \\ b & a & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Les matrices de cette forme sont appelées* matrices de Jordan.

Solution :

1. *On a* $\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On déduit donc* J^2 *de* J *« en baissant d'un cran la diagonale de* 1 *dans la matrice ».*

   On déduit J^3 *de* J^2 *par le même procédé et ainsi de suite. On obtient alors* $\mathrm{J}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{J}^n = 0$ *et* $\mathrm{J}^m = 0$ *pour tout* $m \geqslant n$.
2. *On remarque que* $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}$. *Comme* I_n *et* J *commutent, on peut appliquer la formule du binôme. On obtient pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *:*
$$(a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J})^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k\mathrm{J}^k$$
et
$$\mathrm{A}^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \binom{m}{m}b^m & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \binom{m}{m}b^m & \dots & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m < n$$

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & & & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{m}{n}a^{m-n}b^n & \dots & & \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & \dots & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m \geqslant n$$

25.12.7 Représentation matricielle d'une application linéaire

Exercice 25.59 ♡

Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. *vérifier que u est linéaire.*
2. *déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.*
3. *déterminer son rang.*
4. *Déterminer u^{-1} quand cette application existe.*
5. *calculer l'image du vecteur V donné en utilisant cette matrice.*

1. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-2y-3z) \end{array} \right.$ *et* $V = (0,1,-1)$..
2. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-z, z-x) \end{array} \right.$ *et* $V = (1,2,-1)$.
3. *On pose* $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array} \right.$ *et* $V = (-1,0,2)$.
4. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) - P \end{array} \right.$ *et* $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$.
5. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$ *et* $V = X^2 - X + 1$.
6. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M \end{array} \right.$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & EM \end{array} \right.$ *où* $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*
   (b) $A = \mathrm{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e' celle de $\mathbb{R}^2$.*
   (c) $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 2$
   (d) *u ne peut être bijective car $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas de même dimension.*
   (e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_{e'} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0,1)$.
2. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*
   (b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   (c) $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 3$
   (d) *On en déduit que u est bijective. De plus* $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* u^{-1} :
   $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(x-z, x+2y+z, x+z) \end{array} \right.$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0,3,-2)$.

3. (a) *u est linéaire par bilinéarité du produit vectoriel.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} A = 2$.

(d) *u n'est donc pas bijective.*

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (-2,3,-1)$.

4. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *où* $e = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} A = 3$.

(d) *u n'est donc pas bijective.*

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

5. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *où e' est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e celle de* $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} A = 3$.

(d) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $u^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2x + \left(-3x + 4y - z\right)X + \left(x - 2y + z\right)X^2\right) \end{cases}$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 3X^2 + X + 1$.

6. (a) *u est linéaire car l'opération de transposition est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} A = 4$.

(d) *On vérifie sans peine que* $A^{-1} = A$ *ce qui se vérifie par ailleurs en remarquant que la transposition est une symétrie de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} A = 4$.

(d) *On vérifie que* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On montre par ailleurs que :* $u^{-1} : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & E^{-1}M \end{cases}$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 25.60 ♡

Soit l'endomorphisme $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{cases}$.

1. *Montrer que* φ *est linéaire.*
2. *Écrire la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 12 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n(n-1) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.61 ♡

Soit $\varphi : P \mapsto XP' + P$ *où* P *est un polynôme.*

1. *Prouver que* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. *Calculer la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
3. *Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.*
4. *En déduire que* φ *est bijective et calculer l'image réciproque de chacun des éléments de la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *par* φ.

Solution :

1. *La linéarité provient de la linéarité de la dérivation et de la multiplication par* X. *Reste à démontrer que* $XP' + P$ *est un polynôme et que* $\deg(XP'+P) \leqslant 3$ *ce qui ne pose pas de difficulté.*
2. *On a* $\varphi\left(X^k\right) = XkX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k$. *D'où la matrice :* $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.
3. $M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & \frac12 & 0 & 0\\0 & 0 & \frac13 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac14\end{pmatrix}$.
4. *On a* $\varphi^{-1}\left(X^k\right) = \dfrac{1}{k+1}X^k$.

Exercice 25.62 ♡

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et les vecteurs* $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ *donnés par :*

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{ch} x, \quad f_2 : x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad f_3 : x \mapsto x \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto x \operatorname{sh} x$$

1. *Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel* F *de* E *engendré par la famille* $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.
2. *Soit* $\varphi : f \mapsto f''' - 2f'' + f' - f$. *Montrer que* $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
3. *Déterminer la matrice de* φ *dans la base* f.
4. φ *est-elle un automorphisme de* F *dans* F *? Si oui, déterminer la matrice de* φ^{-1} *dans la base* f.
5. *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :* $f''' - 2f'' + f' - f = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$.

Solution :

1. $\dim F = 4$ *car la famille* f *est libre. En effet supposons* $\forall x \in \mathbb{R}, a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x + dx \operatorname{sh} x = 0$, *en regardant en* 0, *on a* $a = 0$ *on a donc* $dx \operatorname{sh} x = -(b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x)$ *qui est donc une fonction impaire : d'où* $d = 0$. *Comme en* $+\infty$, $b \operatorname{sh} x = o(x \operatorname{sh} x)$ *on en déduit que* d, *puis* c *sont nuls.*
2. *La linéarité est claire.* $\varphi(f_1) = f_2 - 2f_1 + f_2 - f_1 = 2f_2 - 3f_1, \varphi(f_2) = 2f_1 - 3f_2, \varphi(f_3) = 2f_4 - 3f_3 + 4f_1 - 4f_2$ *et* $\varphi(f_4) = 2f_3 - 3f_4 + 4f_2 - 4f_1$.
3. $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
4. $M^{-1} = -\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & -4 \\ 5 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Comme* M^{-1} *existe,* φ *est un automorphisme de* F.
5. *On cherche une solution* $u \in F$, *vérifiant* $\varphi(u) = f_2 + f_3 = v$. *Il suffit de prendre* $u = \varphi^{-1}(u)$ *pour cela on calcule* $-\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & -4 \\ 5 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ *D'où* $u = -\dfrac{1}{5}(-3 \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x + 3x \operatorname{ch} x + 2x \operatorname{sh} x)$.

Exercice 25.63 ♡♡

On considère un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension* 3 *et* f *un endomorphisme non nul de* E. *Montrez que* $f^2 = 0$ *si et seulement s'il existe une base* e *de* E *telle que*

$$\operatorname{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : *Si* $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. *D'après le théorème du rang,*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$$

Comme $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$, *il vient que* $3 \leqslant 2\dim \operatorname{Ker} f$ *et donc que* $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$. *Comme* f *n'est pas l'endomorphisme nul,* $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ *et* $\dim \operatorname{Im} f = 1$. *Donc il existe un vecteur* $e_1 \in E$ *non-nul tel que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1)$. *On complète en une base* (e_1, e_3) *de* $\operatorname{Ker} f$ *que l'on complète ensuite en une base* (e_1, e_2, e_3) *de* E. *Comme* $f(e_2) \in \operatorname{Im} f$, *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(e_2) = \lambda e_1$. *Mais* λ *n'est pas nul (sinon* $f = 0$*) ; on pose alors* $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\lambda} e_2$. *La matrice de* f *dans la base* $e = (e_1, \varepsilon_2, e_3)$ *est de la forme souhaitée. La réciproque est évidente.*

Exercice 25.64 ♡♡

On considère la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *donnée par :* $\forall \left(i, j\right) [\![1, n+1]\!]$, $\quad a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. *On suppose que* A *est la matrice d'un endomorphisme* $\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ *dans la base canonique* $e = (1, X, \dots, X^n)$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$.

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}_n[X]$. *Expliciter* $\theta(P)$.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.
3. *Calculer* A^m *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Soient* $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $V = \operatorname{Mat}_e(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. *On a :*

$$\operatorname{Mat}_e(\theta(P)) = AV = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \binom{k}{0} a_k \\ \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} a_k \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-1} a_n \\ \binom{n}{n} a_n \end{pmatrix}$$

et donc $\theta(\mathrm{P}) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}a_k\right)\mathrm{X} + \ldots + \left(\binom{n-1}{n-1}a_{n-1} + \binom{n}{n-1}a_n\right)\mathrm{X}^{n-1} + \binom{n}{n}a_n\mathrm{X}^n$, *ce qui amène, en regroupant par coefficients et en utilisant la formule du binôme :*

$$\begin{aligned}\theta(\mathrm{P}) &= a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{X}^k + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathrm{X}^k + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\\ &= a_n(\mathrm{X}+1)^n + a_{n-1}(\mathrm{X}+1)^{n-1} + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\end{aligned}$$

On a alors montré que $\boxed{\theta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)}$.

2. θ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et , pour tout* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\theta^{-1}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$. *On déduit de la question précédente que* A *est inversible et que :* $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{Mat}_e\left(\theta^{-1}\right) = \left(b_{ij}\right)$ *avec pour tout* $i, j\in[\![0,n]\!]$, $\boxed{b_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$
3. *De la même façon que précédemment,* $\mathrm{A}^m = \mathrm{Mat}_e(\theta^m)$ *et, pour tout* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\theta^m(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+m)$ *donc* $\mathrm{A}^m = \left(c_{ij}\right)$ *avec pour tout* $i, j\in[\![0,n]\!]$, $\boxed{c_{ij} = m^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$.

Exercice 25.65 ♡♡

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *On définit l'application*

$$f_{\mathrm{A}} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX}\end{array}\right.$$

1. *Vérifier que* f_{A} *est un endomorphisme de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, *et déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Comparer* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}}$ *et* $\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$ *où* u_{A} *est l'unique endomorphisme de matrice* A *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Solution :

1. *Si* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, *on trouve* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix}$.
2. *En général on a* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$. *Si* A *est inversible, alors* f_{A} *est inversible, et* f_{A}^{-1} *est définie par*
$f_{\mathrm{A}}^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}\end{array}\right.$. *Donc* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}} = 4 = 2\,\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$.
Si A *est nulle, il en est de même pour* f_{A}.
Si A *est de rang* 1, *alors il existe une relation de dépendance linéaire entre les deux colonnes. On retrouve cette relation entre la premières et troisième colonne de* M *d'une part et entre la deuxième et la quatrième d'autre part. Donc l'espace engendré par les colonnes de* M *est de dimension inférieure ou égale à* 2. *Par ailleurs la première et la deuxième colonne sont linéairement indépendantes. D'où le résultat.*

Exercice 25.66 ♡♡♡

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $a_{ij} = (-1)^i.\binom{n-j-1}{i}$ $(0\leqslant i, j\leqslant n-1)$.

1. *Démontrer que* $\mathrm{A}^3 = (-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$.
Indication 25.24 : On pourra considérer $\mathrm{L} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\\ \mathrm{P(X)} & \longmapsto & (1-\mathrm{X})^{n-1}.\mathrm{P}\left(\frac{1}{1-\mathrm{X}}\right)\end{array}\right.$.
2. *En déduire que*
$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{i+k+\ell}\binom{n-k-1}{i}\binom{n-\ell-1}{j}\binom{n-j-1}{\ell} = (-1)^{n-1}\delta_{ij}$$
pour tout $(n, i, j)\in(\mathbb{N}^*)^3$, $i, j\leqslant n$.

Solution :

1. *Remarquons que* L *est bien linéaire, et que* $\mathrm{L}(\mathrm{X}^k) = (1-\mathrm{X})^{n-1}.\dfrac{1}{(1-\mathrm{X})^k} = (1-\mathrm{X})^{n-k-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. L *est donc bien un endomorphisme.* $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}^k) = (1-\mathrm{X})^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{1-\mathrm{X}}\right)^{n-k-1} = (1-\mathrm{X})^{n-1}\left(\dfrac{-\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\right)^{n-k-1} = (-\mathrm{X})^{n-k-1}(1-\mathrm{X})^k$.
   $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}^k) = (1-\mathrm{X})^{n-1}\left(-\dfrac{1}{1-\mathrm{X}}\right)^{n-k-1}\left(1-\dfrac{1}{1-\mathrm{X}}\right)^{k} = (1-\mathrm{X})^{n-1}\left(-\dfrac{1}{1-\mathrm{X}}\right)^{n-k-1}\left(\dfrac{-\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\right)^{k} = (-1)^{n-1}\mathrm{X}^k$.
   Donc $\mathrm{L}^3 = (-1)^{n-1}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}$.
   Enfin La matrice de L *dans la base naturelle de* $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ *est donnée par ses vecteurs colonnes. La* $j^{\text{ème}}$ *est donnée par* $\mathrm{L}(\mathrm{X}^j) = (1-\mathrm{X})^{n-j-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^i\binom{n-j-1}{i}\mathrm{X}^i = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-j-1}{i}\mathrm{X}^i$. *On retrouve donc bien la matrice* A.
   On a donc bien $\mathrm{A}^3 = (-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$.

2. *Le calcul de* $\mathrm{B} = \mathrm{A}^3$ *s'obtient par*
   $b_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{ik}a_{k\ell}a_{\ell j} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-k-1}{i}(-1)^k\binom{n-\ell-1}{k}(-1)^\ell\binom{n-j-1}{\ell}$. *D'où le résultat.*

25.12.8 Structure formée de matrices

Exercice 25.67 ♡

Soit l'ensemble

$$\mathscr{J} = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathscr{J}$ *est un groupe abélien.*

Solution : *Soit* $\mathrm{J}(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{J} = \mathrm{J}(1)$. *On a* $\mathrm{J}^2 = 2\mathrm{J}$ *et* $\mathrm{J}(x)\mathrm{J}(y) = 2xy\mathrm{J} = \mathrm{J}(2xy)$. *On a donc la stabilité et la commutativité. On a aussi* $\mathrm{J}(x)\mathrm{J}(\frac12) = \mathrm{J}(x)$ *donc* $\mathrm{J}(\frac12)$ *est élément neutre et* $\mathrm{J}(x)\mathrm{J}(y) = \mathrm{J}(\frac12)$ *lorsque* $2xy = \frac12$ *soit* $y = \frac{1}{4x}$. *Tout élément admet bien un symétrique.*

Exercice 25.68 ♡

Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det \mathrm{M} = 1\}\ ?$$

Solution : *Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *ne peut avoir pour inverse que* $\begin{pmatrix} \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12\end{pmatrix}$ *qui n'appartient pas à l'ensemble.*
Notons $\mathrm{G} = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det\mathrm{M} = 1\}$ *et montrons que* G *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
– *la matrice identité appartient à* G.
– *si* $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{G}$ *alors* $\mathrm{AB} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ *et* $\det \mathrm{AB} = \det\mathrm{A}\times\det\mathrm{B} = 1\times 1 = 1$, *et donc* $\mathrm{AB}\in\mathrm{G}$.
– *Si* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ *alors* $\frac{1}{\det\mathrm{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$ *appartient à* G *et est l'inverse de* A.

Exercice 25.69 ♡

1. *L'ensemble* $\mathrm{E} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$ *muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *est-il un groupe ?*
2. *L'ensemble* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *des matrices symétriques réelles d'ordre* 2 *muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *est-il un groupe ?*

Solution :

1. *Oui.* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. *On a un groupe abélien.*
2. *Non. Le produit de deux matrices symétriques n'a aucune raison d'être symétrique :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   La loi n'est pas interne.

Exercice 25.70 ♡

1. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad - bc \neq 0$ *et* $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ *est il un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*
2. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est-il un sous groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*
3. *Existe-t-il une valeur* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *telle que l'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad - bc \neq 0$ *et* $a \leqslant \mathrm{M}$ *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*

Solution :

1. *L'ensemble* G *des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad - bc \neq 0$ *et* $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ *n'est pas un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *En effet les deux matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* G *et leur produit* $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ *n'appartient pas à* G.
2. *L'ensemble* H *des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est un sous groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *En effet,*
   - I_2 *élément neutre de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *appartient à* H.
   - *Soient* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ *deux éléments de* H *alors* $\mathrm{MM}' = \begin{pmatrix} ac & ad + bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ *donc le produit de deux éléments de* H *appartient à* H.
   - *Soit* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. *Alors* $\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *appartient à* H.
3. *Soit* $\mathrm{K_M}$ *l'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad - bc \neq 0$ *et* $a \leqslant \mathrm{M}$. *Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *telle que* $\mathrm{K_M}$ *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.
   Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{K_M}$ *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *Alors* I_2 *appartient à* $\mathrm{K_M}$ *donc* $\mathrm{M} \geqslant 1$. *Ainsi, les matrices* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* K_n *donc le produit* $\mathrm{AA}_n = \begin{pmatrix} 1+n & 2 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ *appartient à* K_n. *En conséquence, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $1 + n \leqslant \mathrm{M}$, *ce qui est absurde.*

Exercice 25.71 ♡

Soient les ensembles

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathrm{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \ \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L *et* M *sont des anneaux, des corps.*

Solution : *Soit* $\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $\mathrm{A}(x) + \mathrm{A}(y) = \mathrm{A}(x+y)$ *et* $\mathrm{A}(x) + \mathrm{A}(y) = \mathrm{A}(x+y)$. *On vérifie ainsi que* M *est un anneau et même un corps. De fait,* $\mathrm{A} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{A}(x)$ *est un morphisme d'anneaux.*
Soit $\mathrm{B}(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} = x\mathrm{A}(1)$. *On a* $\mathrm{A}(1)^2 = 0$. *On en déduit que* $\mathrm{A}(x)\mathrm{A}(y) = 0 = \mathrm{A}(0)$. *La multiplication est donc associative, commutative, distributive par rapport à l'addition. En revanche il n'y a pas d'élément neutre. Bien entendu,* M *n'est pas un corps.*

Exercice 25.72 ♡

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On note* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des matrices qui commutent avec* A.
Montrer que $\mathscr{C}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *et déterminer sa dimension.*

Solution : $\mathscr{C}$ *est le noyau de* $f_\mathrm{A} : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} - \mathrm{XA} \end{cases}$ *et en tant que tel est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
On a clairement $\mathrm{A} \in \mathscr{C}$ *et* $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{C}$. *Remarquons aussi que les matrices de* $\mathscr{C}$ *commutent aussi avec* $\mathrm{S} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}$, *on a* $\mathrm{SM} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{MS} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$. *On a donc* $-b = c$ *et* $a = d$. *Donc* $\mathscr{C}$ *est bien le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *engendré par* A *et* I_2 *(ou par* S *et* I_2.*)*

Exercice 25.73 ♡

Posons :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{E} = \left\{x\mathrm{I} + y\mathrm{J} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. *Vérifier que* $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$ *et montrer que l'application* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x + iy & \longmapsto & x\mathrm{I} + y\mathrm{J} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de corps.*

Solution : *θ est linéaire, et $\theta(x+iy) = x\mathrm{I} + y\mathrm{J} = 0$ n'est vérifié que pour $x = y = 0$. θ est donc un isomorphisme linéaire entre E et $\mathbb{C}$.*
Une fois établi $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$, on en déduit que $\theta((x\mathrm{I}+y\mathrm{J})(x'\mathrm{I}+y'\mathrm{J})) = \theta((xx'-yy')\mathrm{I} + (xy'+yx')\mathrm{J}) = \theta(x\mathrm{I}+y\mathrm{J})\theta(x'\mathrm{I}+y'\mathrm{J})$. Comme on a $\theta(\mathrm{I}) = 1$, on a bien un isomorphisme de corps.

Exercice 25.74 ♡♡

Soit $c > 0$.

$$\mathrm{M}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{c} \\ \frac{x}{c} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x \in]-c; c[.$$

Démontrer que cet ensemble de matrices est un sous-groupe. (de quoi ?)

Solution : *On pose $\varphi = \operatorname{argth}\left(\frac{x}{c}\right)$; Soit $x = c.th\varphi$. Or $1 - th^2\varphi = \dfrac{1}{ch^2\varphi}$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = ch\varphi$, et $\dfrac{\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = sh\varphi$. Donc*
$\mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$. *En posant $\vartheta = \operatorname{argth}\left(\frac{y}{c}\right)$,*
on a $\mathrm{M}(x).\mathrm{M}(y) = \begin{pmatrix} ch(\varphi+\vartheta) & sh(\varphi+\vartheta) \\ sh(\varphi+\vartheta) & ch(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}$. On obtient bien un sous-groupe du groupe des matrices inversibles. On l'appelle le groupe de Lorentz.

Exercice 25.75 ♡♡

On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrez qu'aucun élément de V n'est inversible. Montrez que $(\mathrm{V}, +, \times)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Solution : *Soit $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B}$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{MX} = 0$. Donc M n'est pas inversible.*
Pour la suite, on a besoin de quelques calculs euphorisants : $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = -(\mathrm{A}+\mathrm{B})$; $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B} - 2\mathrm{A}$; $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A} - 2\mathrm{B}$. On en déduit que V est stable par multiplication. On remarque ensuite que $(\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B})(\lambda'\mathrm{A}+\mu'\mathrm{B}) = \left[(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu') - 3\lambda\lambda'\right]\mathrm{A} + \left[(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu') - 3\mu\mu'\right]\mathrm{B}$. On en déduit que la multiplication est commutative dans V. On cherche l'élément neutre de V sous la forme $\lambda'\mathrm{A} + \mu'\mathrm{B}$. On doit avoir $(\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B})(\lambda'\mathrm{A}+\mu'\mathrm{B}) = \lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B}$ pour tous λ et μ, donc en particulier lorsque $\lambda - \mu = 0$, ce qui donne $\lambda' = \mu' = -\frac{1}{3}$. On pose alors $\mathrm{E} = -\frac{1}{3}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$. Ensuite on vérifie que $\mathrm{A}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + 3\mathrm{A} = \mathrm{B}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + 3\mathrm{B} = 0$ ce qui veut bien dire que $\mathrm{AE} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{BE} = \mathrm{B}$. On en déduit par linéarité que E est élément neutre de V pour la multiplication. Enfin $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{AB} = -(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = -3\mathrm{E}$. Donc en posant $\mathrm{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, on a $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{E}$.
Maintenant on a tout reconstitué : (E, J) est une base de V et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{V} \\ z = a + bi & \longmapsto & a\mathrm{E} + b\mathrm{J} \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'anneaux qui transporte la structure de corps de $\mathbb{C}$ sur V.

Exercice 25.76 ♡♡♡

Pour tout $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & -\sin 2\vartheta & \sin^2\vartheta \\ \cos\vartheta.\sin\vartheta & \cos 2\vartheta & -\sin\vartheta.\cos\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \sin 2\vartheta & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$

1. *Démontrer que $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ est un groupe.*
2. *Calculer $\det\Gamma_\vartheta$.*

Solution :

1. *Soit* $A = \Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. *On a*

$$\begin{array}{rcl}
a_{1,1} & = & \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
 & = & \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
 & = & \big(\cos\vartheta.\cos\varphi - \sin\vartheta.\sin\varphi\big)^2 = \cos^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,2} & = & -\cos^2\vartheta.\sin 2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \sin^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
 & = & -\sin 2\varphi.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi = -(\cos 2\vartheta\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi) \\
 & = & -\sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,3} & = & \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
 & = & \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
 & = & \big(\cos\vartheta.\sin\varphi + \sin\vartheta.\cos\varphi\big)^2 = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,1} & = & \cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin^2\varphi \\
 & = & \sin\vartheta.\cos\vartheta.(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi \\
 & = & \frac{1}{2}(\sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos 2\vartheta.\sin 2\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta+2\varphi) \\
 & = & \sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,2} & = & -\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin 2\varphi \\
 & = & \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - 2\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi = \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin 2\varphi \\
 & = & \cos 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,3} & = & \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin^2\varphi - \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta.\cos^2\varphi \\
 & = & -a_{2,1} = -\sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,1} & = & \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
 & = & a_{1,3} = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,2} & = & -\sin^2\vartheta.\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
 & = & -a_{1,2} = \sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,3} & = & \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi + \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
 & = & a_{1,1} = \cos^2(\vartheta+\varphi).
\end{array}$$

Finalement $\Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = \Gamma_{\vartheta+\varphi}$. *On a donc un morphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* Γ, *qui fait donc de* Γ *un groupe.*

2. *Un calcul avec la règle de Sarrus n'est jamais méprisable :*

$$\begin{array}{rcl}
\det\Gamma_\vartheta & = & \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin^2\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
 & & -\sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta. + \sin 2\vartheta.\cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin 2\vartheta \\
 & = & \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
 & = & \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + 2.\sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \qquad . \\
 & = & \cos 2\vartheta.(\cos^4\vartheta - \sin^4\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
 & = & \cos 2\vartheta.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
 & = & \cos 2\vartheta.\cos 2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta = \cos^2(2\vartheta) + \sin^2(2\vartheta) = 1.
\end{array}$$

Si on utilise le fait que $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta\in\mathbb{R}\}$ *est un groupe, alors un argument plus savant permet d'aboutir au même résultat :*
Tous les éléments de Γ_ϑ *sont en valeur absolue inférieurs á* 1. *Donc* $|\det\Gamma_\vartheta| \leqslant \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} 1 \leqslant 6$.
Or $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est un morphisme de groupes. Son image est donc un sous-groupe borné de* $\mathbb{R}$. *Il est donc inclus dans* $\{-1;1\}$. *De plus,* $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *son image est donc un intervalle. C'est donc* $\{1\}$. *Donc,* $\forall\vartheta\in\mathbb{R}$, $\det\Gamma_\vartheta = 1$.

Exercice 25.77 ♡

Pour chacun des sous-ensembles suivants :

1. *Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de* $E = \mathfrak{M}_3(E)$.
2. *En donner une base et la dimension.*

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & a \\ b & -a & b \\ a & -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & c-b & a \\ 3b+c & a-b & a+2c \\ a+3c & b & -a-c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R} \right\}$$

Solution :

1. $F_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
2. $F_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 25.78 ♡

Soit E *l'ensemble des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *de la forme :* $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. *Donner une base de* E.
2. *Montrer que* E *est un sous-anneau commutatif de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.
3. *Déterminer les éléments inversibles de* E.
4. *Déterminer les diviseurs de zéro de* E.

Solution :

1. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul.* φ *est donc bijective. Une base de* E *est donc, par exemple,* $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$.
2. $\varphi(a,b).\varphi(a',b') = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+ab'+ba' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & aa'-ab'-ba' \end{pmatrix} = \varphi(aa', ab'+ba')$. E *est donc stable par multiplication. Comme il contient* $I_2 = \varphi(1,0)$, *c'est un sous-anneau de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.
3. *Les éléments inversibles de* E *sont ceux pour lesquels* $a \neq 0$. *On a alors* $\varphi(a,b)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right)$.
4. *En résolvant le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} aa' & = & 0 \\ ab'+ba' & = & 0 \end{array} \right.$ *On obtient par exemple* $a=0$ *ce qui interdit* $b=0$ *et implique* $a'=0$. *Donc les diviseurs de zéro sont les* $(\varphi(0,b).\varphi(0,b'))$ *avec* $bb' \neq 0$.

Exercice 25.79 ♡♡

Une matrice $A = (a_{i,j})$ *de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *est dite magique si elles vérifie les* 4 *conditions suivantes :*

1. *Pour tout* $j \in \{1,2,3\}$, *on a :* $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 0$.
2. *Pour tout* $i \in \{1,2,3\}$, *on a :* $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 0$.
3. *On a :* $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0$.
4. $a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0$.

On notera $\mathscr{M}$ *l'ensemble des matrices magiques.*

1. *Montrer que l'ensemble des matrices magiques possède une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
2. *Montrer que si* $M \in \mathscr{M}$ *alors* ${}^tM \in \mathscr{M}$.
3. *Caractériser les matrices magiques antisymétriques et les matrices symétriques. On notera* $\mathscr{A}$ *l'ensemble des matrices magiques antisymétriques et* $\mathscr{S}$ *l'ensemble des matrices magiques symétriques.*
4. *Prouver que* $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$.
5. *Interpréter le résultat obtenu.*

Solution :

1. $\mathscr{M}$ *est l'intersection des noyaux de huit formes linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *comme intersection de sous-espaces vectoriels.*
2. *C'est clair, les rôles des formes linéaires* $A \longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_{ik}$ et $A \longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_{ki}$ *étant échangés.*
3. *Soit* $A \in \mathscr{A}$. *On a* $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$ *et*
   $\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   Soit $A \in \mathscr{S}$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $a_{31} = a$ *et* $a_{22} = -2a$. *On pose* $b = a_{12}$ *d'où* $a_{21} = b$, $a_{11} = -a-b$, $a_{33} = b+3a$, $a_{23} = a_{32} = 2a-b$. *La somme de la* $3^{\text{ème}}$ *colonne donne* $6a = 0$. *Donc* $\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ b & 0 & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.

4. $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est la somme directe de l'espace des matrices symétriques et de l'espace des matrices symétriques. Donc a fortiori $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$. ($\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A})$).
5. On en déduit que $\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b-a & a \\ a+b & 0 & -a-b \\ -a & a-b & b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 25.80 ♡

(Extrait des petites Mines 2006)

I-Étude de deux ensembles de matrices

Soit (x,y) *un élément quelconque de* $\mathbb{R}^2$*. On note* $\mathrm{M}_{x,y}$ *la matrice*

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$$

Soit Σ *le sous-ensemble de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *tel que* $\Sigma = \left\{\mathrm{M}_{x,y} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. *Quelle relation doivent vérifier* x *et* y *pour que la matrice* $\mathrm{M}_{x,y}$ *ne soit pas inversible ? Calculer le produit* $\mathrm{M}_{x,y} \times \mathrm{M}_{-x,y}$*. En déduire l'inverse de* $\mathrm{M}_{x,y}$ *lorsqu'il existe.*
2. Σ *est-il un sous-espace vectoriel de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$ *? On justifiera sa réponse.*

   Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{J} = \left\{\mathrm{A} + \mathrm{M}_{x,y} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
3. *Montrer que* J *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.
4. *Quelle est la dimension de* J *? Déterminer une base de* J.
5. *Montrer que la loi* $\times$ *est interne dans* J.

II - Étude d'une application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

Soit B *une matrice quelconque de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$*. Soit* φ_{B} *l'application de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *qui à la matrice* X *associe la matrice* $\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \mathrm{B} \times \mathrm{X}$.

1. *Montrer que* φ_{B} *est un endomorphisme de l'espace vectoriel* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.
2. *On suppose dans cette question que* $\mathrm{B} = \mathrm{M}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) φ_{B} *est elle surjective ? Bijective ?*
   (b) *Déterminer la matrice de* φ_{B} *dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *est constituée des matrices* $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ *où*

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *On prend dans cette question* $\mathrm{B} = \mathrm{M}_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. φ_{B} *est-elle surjective ? Bijective ?*

Solution : *I.*

1. $\mathrm{M}_{x,y}$ *n'est pas inversible lorsque* $x^2 - y^2 - 2y = 0$*. Dans les autres cas,* $\mathrm{M}_{x,y}$ *est inversible dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$*, mais peut-être pas dans* Σ.
   $\mathrm{M}_{x,y} \times \mathrm{M}_{-x,y} = (y^2 - x^2 + 2y)\mathrm{I}_2$*. Donc, lorsque* $x^2 - y^2 - 2y \neq 0$, $\mathrm{M}_{x,y}^{-1} = \mathrm{M}\left(-\frac{x}{y^2-x^2+2y}, \frac{y}{y^2-x^2+2y}\right)$ *qui appartient bien à* Σ.
2. *La matrice nulle n'appartient pas à* Σ*. Donc* Σ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.
3. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{A} + \mathrm{M}_{x,y} \end{array} \right.$ *est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul.* φ *est donc bijective.*
4. *Une base de* E *est donc, par exemple,* $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$. J *est de dimension* 2.
5. $\varphi(x,y).\varphi(x',y') = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - xy' - yx' + yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' + xy' + yx' + yy' \end{pmatrix}$
   $= \varphi(xx' + yy', xy' + yx')$*. C'est bien dire que la loi* $\times$ *est interne dans* J.

II.

1. *On a* $\mathrm{B}(\lambda \mathrm{X}+\mu \mathrm{Y})=\lambda \mathrm{BX}+\mu \mathrm{BY}$. *De plus* $\mathrm{BX}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. φ_{B} *est donc un endomorphisme de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.
2. (a) *On a* $\mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$. *On a* $\varphi_{\mathrm{B}^{-1}}\left(\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})\right)=\mathrm{B}^{-1}.\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})=\mathrm{B}^{-1}\mathrm{BX}=\mathrm{X}$. *On a donc* $\varphi_{\mathrm{B}^{-1}}=\left(\varphi_{\mathrm{B}}\right)^{-1}$.

   (b) *On a* $\mathrm{BE}_{1,1}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\mathrm{E}_{1,1}+2\mathrm{E}_{2,1}$. *On obtient ainsi la première colonne de la matrice de* φ_{B} *dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$. *On trouve de la même façon les autres colonnes :* $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\2&0&3&0\\0&2&0&3\end{pmatrix}$.
3. *Cette fois* B *n'est pas inversible. Puisqu'il n'est pas question d'obtenir une solution à* $\varphi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})=\mathrm{I}_2$, φ_{B} *n'est pas surjective et donc pas bijective.*

Exercice 25.81 ♡♡

Soit une sous-algèbre $\mathscr{A}$ *de l'algèbre* $\mathrm{L}(\mathrm{E})$. *On suppose que* $\forall f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$, $f^2\in\mathscr{A}\implies f\in\mathscr{A}$. *Montrer que* $\mathscr{A}=\mathrm{L}(\mathrm{E})$.

Solution : *Raisonnons de façon équivalente sur les matrices carrées. Supposons que* $\mathscr{A}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $\forall \mathrm{M}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{M}^2\in\mathscr{A}\implies \mathrm{M}\in\mathscr{A}$. *Il suffit de montrer que toute matrice* E_{ij} *de la base canonique appartient à* $\mathscr{A}$. *Comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{L}(\mathrm{E})$, $0_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}\in\mathscr{A}$. *Or si* $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{E}_{ij}^2=\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{ij}=\delta_{ij}\mathrm{E}_{ij}$. *Par conséquent, si* $i\neq j$, $\mathrm{E}_{ij}^2\in\mathscr{A}$ *et donc* $\mathrm{E}_{ij}\in\mathscr{A}$. *Soit maintenant* $i\in[\![1,n]\!]$. *Soit* $j\neq i$. *On sait que* $\mathrm{E}_{ij},\mathrm{E}_{ji}\in\mathscr{A}$ *et comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathrm{L}(\mathrm{E})$, *le produit* $\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{ji}=\mathrm{E}_{ii}$ *est encore dans* $\mathscr{A}$. *Comme* $\mathscr{A}$ *contient toutes les matrices de la base canonique et que c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

25.12.9 Changement de base

Exercice 25.82 ♡

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ *muni de sa base canonique* $e=(e_1,e_2)$. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *donné par :*

$$f(e_1)=e_1+e_2 \quad\text{et}\quad f(e_2)=-e_1+2e_2$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique* e.
2. *Soit* $v=xe_1+ye_2\in\mathbb{R}^2$. *Calculer les composantes* x' *et* y' *de* $f(v)$ *dans la base canonique* e.
3. *On pose :* $\varepsilon_1=e_2$ *et* $\varepsilon_2=e_1+e_2$. *Prouver que* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ *est une base de* E.
4. *Déterminer* $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ *ainsi que* $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}$.
5. *En déduire la matrice* B *de* f *dans la base* ε *et en déduire les expressions de* $f(\varepsilon_1)$ *et* $f(\varepsilon_2)$ *en fonction de* ε_1 *et* ε_2.

Solution :

1. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$
2. *Par linéarité de* f : $f(v)=\left(x-y,x+2y\right)$
3. *Comme* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ *et que cette matrice est inversible, la famille* ε *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Comme* $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *alors* $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}=(\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$
5. *La formule de changement de base amène* $\mathrm{B}=\mathrm{Mat}_\varepsilon(f)=\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}\mathrm{Mat}_e(f)\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$. *Après calcul, on trouve :* $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3&3\\-1&0\end{pmatrix}$

Exercice 25.83 ♡

Soit (e_1,e_2,e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *On pose :*

$$f_1=e_1-e_2+2e_3,\quad f_2=e2+e_3,\quad e_1+2e_3$$

1. *Prouver que* $\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Écrire la matrice de passage de la base e à la base f.*
3. *Déterminer la matrice de passage de la base f à la base e.*
4. *On considère le vecteur u de coordonnées $(-1,0,2)$ dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base f ?*
5. *On considère l'endomorphisme* $\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-2z,-x-z,-x+2y) \end{array}\right.$. *Déterminer la matrice de θ dans la base f.*

Solution :

1. *On a :* $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Le déterminant de cette matrice est -1. On en déduit que la famille f est libre et comme elle est de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Par définition :* $\mathrm{P}_{e\to f} = \mathrm{Mat}_e(f)$.
3. *De même* $\mathrm{P}_{f\to e} = \left(\mathrm{P}_{e\to f}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. *D'après la formule de changement de base* $\mathrm{Mat}_f\, u = \mathrm{P}_{f\to e}\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
5. *On a :* $\mathrm{Mat}_e(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *En utilisant la formule de changement de base* $\mathrm{Mat}_f(\theta) = \mathrm{P}_{f\to e}\mathrm{Mat}_e(\theta)\,\mathrm{P}_{e\to f}$, *on trouve* $\mathrm{Mat}_f(\theta) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ -12 & -6 & -11 \end{pmatrix}$

Exercice 25.84 ♡

Soient :

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2+1, \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{X}+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3 = 2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}$$

On note $\mathscr{B} = \left(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2\right)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}' = (\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. *Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, puis celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.*
3. *Soit* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2-\mathrm{X}+2$. *Donner les composantes de* P *dans la base $\mathscr{B}'$.*
4. *On considère l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *donné par* $\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP}' \end{array}\right.$. *Déterminer la matrice de θ dans la base $\mathscr{B}'$.*

Solution :

1. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{B}'\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\det\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{B}'\right) = 1$ *donc la famille $\mathscr{B}'$ est libre. Cette famille est de plus de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *ce qui prouve que c'est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. *On a* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{B}'\right)$ *et* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\theta) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta) \mathrm{P}_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 25.85 ♡

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *et* $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ *tous deux munis de leurs bases canoniques respectives qu'on notera* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *et* $f = (f_1, f_2)$. *Soit* $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto \quad (x+y, y-z) \end{cases}$.

1. *Prouver que* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et écrire la matrice de* u *relativement aux bases* e *et* f.
2. *On considère les familles de vecteurs* $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *avec* $e'_1 = (0, 1, -1)$, $e'_2 = (1, 0, 2)$, $e'_3 = (1, 1, 0)$ *et* $f' = (f'_1, f'_2)$ *avec* $f'_1 = (1, 0)$, $f'_2 = (1, 1)$. *Montrer que* e' *et* f' *sont des bases de respectivement* E *et* F *et écrire les matrices de changement de base de* e *vers* e' *et de* f *vers* f'.
3. *En déduire la matrice de* u *relativement aux bases* e' *et* f'.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* u *est linéaire. De plus* $\mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. *On écrit* $\mathrm{Mat}_e e' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et comme* $\det(\mathrm{Mat}_e e') = 1$ *on en déduit que* e' *est une base de* E. *De même* $\mathrm{Mat}_f(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det(\mathrm{Mat}_f(f')) = 1$. *La famille* f' *est donc une base de* F. *De plus* $\mathrm{P}_{e \to e'} = \mathrm{Mat}_e e'$ *et* $\mathrm{P}_{f \to f'} = \mathrm{Mat}_f f'$.
3. *La formule de changement de bases est* $\mathrm{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = \mathrm{P}_{f' \to f} \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) \mathrm{P}_{e \to e'}$ *et comme* $\mathrm{P}_{f' \to f} = (\mathrm{P}_{f \to f'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $\mathrm{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.86 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* e, *on considère la famille de vecteurs* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *donnés par* $\varepsilon_1 = (1, 0, 2)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)$, $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$. *Posons* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E. *Donner une base de* E *adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.*
2. *Écrire, dans la base* e, *la matrice de la projection* p *de* E *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire les matrices, dans la base* e *de :*
   (a) *la projection* p' *de* E *sur* G *parallèlement à* F.
   (b) *la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G.

Solution :

1. *On a* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det \mathrm{A} = -1$. *La famille* ε *est donc une base de* E. *On en déduit que* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *forme une base de* F *et que* (ε_3) *forme une base de* G. *Ces deux sous-espaces sont de plus clairement supplémentaires et la base* ε *est adaptée à cette supplémentarité.*
2. *On a :* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et, en utilisant les formules de changement de base* $\mathrm{Mat}_e(p) = \mathrm{P}_{e \to \varepsilon} \mathrm{Mat}_\varepsilon(p) \mathrm{P}_{\varepsilon \to e}$ *avec* $\mathrm{P}_{e \to \varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $\mathrm{P}_{\varepsilon \to e} = (\mathrm{P}_{e \to \varepsilon})^{-1}$. *Après calculs, on trouve* $\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) On sait que $p+p'=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Donc $\mathrm{Mat}_e(p')=\mathrm{I}_3-\mathrm{Mat}_e(p)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$

(b) On sait aussi que $s=2p-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Donc $\mathrm{Mat}_e(s)=2\,\mathrm{Mat}_e(p)-\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-3&-2&2\\0&1&0\\-4&-2&3\end{pmatrix}$.

Exercice 25.87 ♡

Soit $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$, $\varepsilon_1=(0,0,1)$, $\varepsilon_2=(1,1,1)$ *et* $\varepsilon_3=(0,1,1)$. *On pose :* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ *et* $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Prouver que* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* E *et en déduire que* $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique* e *de* E *de la projection* p *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire, dans la base canonique de* E*, la matrice de la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G *et la matrice de la projection* p' *sur* G *parallèlement à* F.

Solution :

1. Comme la matrice $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est inversible, la famille ε est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base de F et que (ε_3) est une base de G, on en déduit que $\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.
2. On sait que $\mathrm{Mat}_\varepsilon(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc grâce aux formules de changement de base $\mathrm{Mat}_e(p)=\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}\mathrm{Mat}_\varepsilon(p)\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}$ avec $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ et $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}=(\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$. On effectue les calculs et on trouve $\mathrm{Mat}_e(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$
3. On sait que $s=2p-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et que $p+p'=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ donc $\mathrm{Mat}_e(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_e(p')=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

Exercice 25.88 ♡

Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&1&0\\4&1&-4\end{pmatrix}$ *et* $e=(e_1,e_2,e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par* A *dans la base* e. *On pose* $\varepsilon_1=(1,0,1)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(1,0,2)$ et $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}\,f$ *et de* $\mathrm{Im}\,f$.

Solution :

1. On vérifie que $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ est inversible donc ε est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. D'après la formule de changement de base $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f)=\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}\mathrm{Mat}_e(f)\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ avec $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ et $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}=(\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$. Il vient $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.
3. Les deux derniers vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f)$ sont non colinéaires et le premier est nul donc $\mathrm{rg}\,f=2$ et $\dim\mathrm{Im}\,f=2$. Les vecteurs $f(\varepsilon_2)=(1,1,0)$ et $f(\varepsilon_3)=(0,0,-2)$ sont non colinéaires et dans l'image de f. Il forment donc une base de $\mathrm{Im}\,f$. La formule du rang permet d'affirmer que $\dim\mathrm{Ker}\,f=1$. Comme $f(\varepsilon_1)=0$, une base de $\mathrm{Ker}\,f$ est (ε_1).

Exercice 25.89 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e=(e_1,e_2,e_3)$*. On considère* f *l'endomorphisme de* E *dont la matrice dans la base* e *est* $A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\1&0&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^2*. Que peut-on en déduire au sujet de* f *?*
2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*
3. *Prouver de deux façons différentes que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
4. *Quelle est la matrice de* f *relativement à une base adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $A^2=A$*. On a alors* $f^2=f$ *et* f *est donc un projecteur de* E*.*
2. *Soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*. On a :* $AX=0$ *si et seulement si* $\begin{cases}3x-2y-4z&=0\\x-2z&=0\\x-y-z&=0\end{cases}$ *c'est-à-dire si et seulement si* $X\in\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$*.*
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f=Vect(\varepsilon_1)$ *où* $\varepsilon_1=2e_1+e_2+e_3$*. Par ailleurs, posons* $\varepsilon_2=f(e_1)$ *et* $\varepsilon_3=f(e_2)$*. On vérifie, par un calcul matriciel facile que* $\varepsilon_2=3e_1+e_2+e_3$ *et que* $\varepsilon_3=-2e_1+e_3$*. Les vecteurs* ε_2 *et* ε_3 *sont dans* $\operatorname{Im} f$ *et sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre. En appliquant la formule du rang, on montre que* $\dim\operatorname{Im} f=2$*. Il s'ensuit que cette famille est une base de* $\operatorname{Im} f$*.*
3. *Comme* f *est un projecteur,* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont nécessairement supplémentaires dans* E*.*
4. *Utilisant la question précédente, la famille* ε *est adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*. On obtient facilement :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$*.*

Exercice 25.90 ♡

Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $A=\begin{pmatrix}2&4&4\\0&4&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}$*. Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* e *est* A*.*

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$*. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Déterminer une base à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$ *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Écrire* f *comme composée de transformations vectorielles élémentaires.*

Solution :

1. *Pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*, on vérifie facilement que* $f(x,y,z)=(2x+4y+4z,4y+2z,-4y-2z)$*. On en déduit que* $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *où* $\varepsilon_1=(2,1,-2)$ *et que* $\operatorname{Im} f=Vect(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *où* $\varepsilon_2=(1,0,0)$ *et* $\varepsilon_3=(0,1,-1)$*. On vérifie facilement que la famille* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* E*. Comme* (ε_1) *est une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et que* $(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$*, on sait que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
2. *La famille* ε *est adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*. Utilisant la formule de changement de base :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=P_{\varepsilon\to e}\operatorname{Mat}_e(f)P_{e\to\varepsilon}$ *où* $P_{e\to\varepsilon}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ *et où* $P_{\varepsilon\to e}={P_{e\to\varepsilon}}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}$*, on obtient*
   $$\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&4&4\\0&4&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
3. f *est alors la composée de l'homothétie vectorielle de rapport* 2 *et de la projection de* $\mathbb{R}^3$ *sur le plan* $\operatorname{Im} f$ *parallèlement au plan* $\operatorname{Ker} f$*.*

Exercice 25.91 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e=(e_1,e_2,e_3)$. *On considère* $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *représenté dans la base* e *par la matrice* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la famille* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_1=(-1,1,-1)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$ *et* $\varepsilon_3=(0,1,1)$ *est une base de* E. *Écrire la matrice de passage de la base* e *à la base* ε.
2. *Calculer la matrice de* u *dans la base* ε.
3. *En déduire la matrice de* u^n *dans la base* e.

Solution :

1. *Comme* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ *et que* $\det(\mathrm{Mat}_e(\varepsilon))=1$, *la famille* f *est de rang* 3 *et forme donc une base de* E. *De plus* $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$.
2. *Appliquant les formules de changement de bases :* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)=\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}\mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ *avec* $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}=(\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_e(u)=\mathrm{A}$. *On en déduit que* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
3. *Notons* $\mathrm{P}=\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ *et* $\mathrm{A}_0=\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$. *On a donc :* $\mathrm{Mat}_e(u^n)=\mathrm{A}^n=\left(\mathrm{PA}_0\mathrm{P}^{-1}\right)^n=\mathrm{PA}_0^n\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1+2^n&2^n&0\\1-2^n&0&2^n\end{pmatrix}$

Exercice 25.92 ♡

On considère le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $e=(e_1,e_2,e_3)$. *Soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté dans la base* e *par la matrice* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-3&-1&3\\-2&-2&3\end{pmatrix}$. *Le but de cet exercice est de trouver une base* ε *de* E *tel que dans cette base la matrice de* u *est diagonale. On dira alors qu'on a diagonalisé* u.

1. *Développer le polynôme* $\mathrm{P}(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)$. P *est appelé* **polynôme caractéristique** *de* u.
2. *Calculer les racines de* P. *Les trois réels trouvés sont appelées* **valeurs propres** *de* u.
3. *Déterminer des vecteurs* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ *de* E *en sorte que* (ε_1) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u-id)$, (ε_2) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u-2id)$ *et* (ε_3) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u+id)$. *Ces trois vecteurs sont des* **vecteurs propres** *de* u.
4. *Montrer que* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* E.
5. *Vérifier que la matrice de* u *dans la base* ε *est diagonale.*

Solution :

1. *On a :* $\mathrm{P}(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&1\\-3&-1-\lambda&3\\-2&-2&3-\lambda\end{vmatrix}$. *En effectuant les opérations élémentaires* $\mathrm{C}_1\leftarrow\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_3$ *puis* $\mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$, *on a* $\mathrm{P}(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda+1&-2&1\\0&-1-\lambda&3\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda+1)(-1-\lambda)(2-\lambda)$.
2. *Les valeurs propres de* u *sont* 1, -1 *et* 2.
3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Posons* $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. *On a :* $u(x)-x=0$ *si et seulement si* $\mathrm{AX}-\mathrm{X}=0$ *qui est équivalent au système* $\begin{cases}-2y+z-x=0\\-3x-2y+3z=0\\-2x-2y+2z=0\end{cases}$ *On vérifie que l'ensemble des solution de ce système est donné par* $\mathrm{V}ect(\varepsilon_1)$ *avec*

$\varepsilon_1 = (1,0,1)$. *Donc* $\operatorname{Ker}(u - id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *On montre de même que* $\operatorname{Ker}(u-2id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ *avec* $\varepsilon_2 = (-1,1,0)$ *et que* $\operatorname{Ker}(u+id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_3 = (1,1,1)$.

4. *Comme* $P = \operatorname{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et que* $\det(P) =_1$, *la famille* ε *est de rang* 3 *et forme une base de* E.

5. *On a :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(u) = P_{\varepsilon\to e}\operatorname{Mat}_e(u)P_{e\to\varepsilon}$ *avec* $P_{\varepsilon\to e} = (\operatorname{Mat}_e(\varepsilon))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et donc :*

$\operatorname{Mat}_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.93 ♡♡

Soit $E = \mathbb{R}^2$. *Déterminer tous les endomorphismes* $u \in L(E)$ *tels que :*

$$\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(1,2),\ \text{et } \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1,1)$$

Solution : *Posons* $f_1 = (1,2)$ *et* $f_2 = (0,1)$. *Comme* f_1 *et* f_2 *ne sont pas colinéaires,* $u(f_2)$ *est non nul et élément de* $\operatorname{Im} u$. *Il existe donc* $\alpha \neq 0$ *tel que* $u(f_2) = (\alpha,\alpha)\,\alpha e_1 + \alpha e_2 = \alpha f_1 - \alpha f_2 =$. *On vérifie facilement que* $f = (f_1, f_2)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$. *Il est clair que* $\operatorname{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. *De plus,* $P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $\operatorname{Mat}_e(u) = P_{e\to f}\operatorname{Mat}_f(u)P_{f\to e} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $u(x,y) = \alpha(-2x+y, -2x+y)$. *Réciproquement, on vérifie facilement que tous les endomorphismes de cette forme satisfont l'hypothèse.*

Exercice 25.94 ♡♡

1. *Soit un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie et un endomorphisme* $u \in L(E)$ *de rang* 1. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $u^2 = \lambda u$.
2. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\underbrace{(\operatorname{rg}(A) = 1)}_{(i)} \iff \underbrace{(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^{*2}\ A = X\,{}^tY)}_{(ii)}$.

Solution :

1. *Comme* $\operatorname{rg}(u) = 1$, *d'après la formule du rang,* $\operatorname{Ker} u$ *est de dimension* $n-1$ *où* $n = \dim E$. *Soit* e' *une base de* $\operatorname{Ker} u$. *On applique le théorème de base incomplète pour compléter par un vecteur* $e_n \in E$ *en une base* e *de* E. *Comme* $\operatorname{Vect}(e_n) = \operatorname{Im} u$, *il existe* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $u(e_n) = \lambda e_n$. *Soit* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ *alors* $u(x) = x_n u(e_n) = x_n\lambda e_n$ *et* $u^2(x) = x_n\lambda^2 e_n = \lambda u(x)$ *et la propriété est prouvée.*
2. $(i) \implies (ii)$ *Supposons que* $\operatorname{rg}(A) = 1$. *Soit* b *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$. *Il existe* $u \in L(\mathbb{K}^n)$ *tel que* $\operatorname{Mat}_b(u) = A$. *Comme* $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = 1$, *d'après la question* 1, *on sait qu'il existe une base* e *de* $\mathbb{K}^n$ *tel que* $u(e_i) = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$ *et* $u(e_n) = \lambda e_n$ *où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *Donc*

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda X_0\,{}^tX_0$$

avec $X_0 = {}^t(0,\dots,0,1) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. *Si* $P = P_{b\to e}$ *alors* $A = PX_0\,{}^tX_0P^{-1} = X\,{}^tY$ *avec* $X = \lambda PX_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *et* $Y = {}^tP^{-1}X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. *Remarquons que* X *et* Y *sont non nuls car c'est le cas de* X_0 *et que* P *est inversible.*

$(ii) \implies (i)$ *Réciproquement, si* $A = X\,{}^tY$ *avec* $X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ *et* $Y = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ *alors*

$$A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de A *sont colinéaires donc* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 1$ *car* X *est non nul.*

25.12.10 Matrices semblables, équivalentes

Exercice 25.95 ♡

Trouver les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à une matrice diagonale.

Solution : *Ce sont celles qui sont déjà des matrices diagonales, c'est-à-dire celles pour lesquelles $i = j$. En effet supposons l'espace d'un instant qu'une matrice E_{ij} soit semblable à une matrice diagonale D avec $i \neq j$. On en déduit que $0 = \mathrm{E}_{ij}^2$ est semblable à D^2, donc $\mathrm{D}^2 = 0$ donc $\mathrm{D} = 0$ puisque D est diagonale. Donc le rang de D égale 0, alors que celui de E_{ij} égale 1. Comme deux matrices semblables ont même rang, on a une contradiction.*

Exercice 25.96 ♡

Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}{}^t\mathrm{P}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.*

Exercice 25.97 ♡

Les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Solution : *En regardant l'action de ces matrices sur les vecteurs colonnes de la base naturelle, on voit que $\mathrm{B}^3 = 0$ et $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}$. A et B ne peuvent pas être semblables.*

Exercice 25.98 ♡

Soient deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec A inversible.

1. *Montrer que AB et BA sont semblables.*
2. *Montrer que le résultat est faux si A n'est pas inversible.*

Solution :

1. *Si A est inversible, il suffit d'écrire $\mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{BA})\mathrm{A}^{-1}$*
2. *Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'ont pas même rang et n'ont donc aucune chance d'être semblables.*

Exercice 25.99 ♡

On considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{D} & a \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que B est inversible. Montrer que A est inversible si et seulement si

$$a \neq {}^t\mathrm{DB}^{-1}\mathrm{C}$$

Solution : *Si A n'était pas inversible, il existerait X tel que $\mathrm{AX} = 0$ avec $\mathrm{X} \neq 0$. De plus, $x_n \neq 0$ (car B inversible). En notant $\widetilde{\mathrm{X}} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, on obtiendrait que $\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{X}} + x_n\mathrm{C} = 0$ et ${}^t\mathrm{D}\widetilde{\mathrm{X}} + a x_n = 0$, d'où la relation.*
Réciproquement, si $a = {}^t\mathrm{DB}^{-1}\mathrm{C}$, alors on construit un vecteur $\mathrm{X} = -\left(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{C}, -1\right)$, on a $\mathrm{AX} = 0$ avec bien sûr $\mathrm{X} \neq 0$.

Exercice 25.100 ♡♡

On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \nearrow & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.*
2. *Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, calculer la matrice PAP.*
3. *En déduire qu'une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Solution :

1. *Soit* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *la base canonique de* E. *Alors il existe un unique* $u \in L(E)$ *tel que* $\mathrm{Mat}_e(u) = P$. *On a pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{n-i+1}$ *et* $u^2(e_i) = e_i$, *donc* $P^2 = I_n$. *Par conséquent,* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $P^{-1} = P$.
2. *Puisque* $P = \sum_{k=1}^n E_{k,n-k+1}$,

$$PAP = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n} a_{ij} E_{k,n-k+1} E_{ij} E_{n-l+1,l} = \sum_{i,j,k,l} \delta_{n+1-k,i} \delta_{j,n+1-l} E_{k,l} = \sum_{k,l} a_{n+1-k,n+1-l} E_{kl}$$

   La matrice PAP *s'obtient en faisant deux symétries de* A *par rapport aux deux diagonales.*
3. *Puisque* $P^{-1} = P$, PAP^{-1} *est une matrice triangulaire supérieure lorsque* A *est une matrice triangulaire inférieure.*

Exercice 25.101 ♡♡

Á quelle condition deux matrices E_{pq} *et* E_{kl} *de la base canonique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *sont-elles semblables ?*

Solution : *Considérons l'espace vectoriel* $E = \mathbb{K}^n$ *muni de sa base canonique.*

1. *Une condition nécessaire est que les matrices aient même trace. Donc si* $p = q$ *et* $k \neq l$, *(ou bien* $p \neq q$ *et* $k = l$*), les deux matrices ne sont pas semblables.*
2. *Montrons que deux matrices* E_{pp} *et* E_{qq} $(p \neq q)$ *sont semblables. Soit* u *l'unique endomorphisme de* E *tel que* $\mathrm{Mat}_e(u) = E_{pp}$. *Considérons la base* e' *obtenue en permutant les deux vecteurs* e_p *et* e_q. *Dans la base* e', *la matrice de* u *est* E_{qq}. *Par conséquent, les deux matrices* E_{pp} *et* E_{qq} *représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables. Complément : écrivez la matrice de passage de la base* e *vers la base* e', *et son inverse.*
3. *Soient quatre indices* $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ *avec* $p \neq q$ *et* $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ *avec* $k \neq l$. *Notons* u *l'unique endomorphisme ayant pour matrice* E_{pq} *dans la base* e. *Considérons la base* e' *obtenue en échangeant les vecteurs* $e_q \leftrightarrow e_l$ *et* $e_p \leftrightarrow e_k$. *Alors la matrice de l'endomorphisme* u *dans la base* e' *est la matrice* E_{kl} *(faire un dessin et vérifier ce résultat même lorsque* $p = q$ *ou* $k = l$*). Donc les matrices* E_{pq} *et* E_{kl} *sont semblables. Pouvez-vous écrire la matrice de passage* $P_{e \to e'}$ *correspondante ? Quel est son inverse ?*

Exercice 25.102 ♡♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^2 = I$ *et telle que* A *n'est pas une matrice scalaire. Montrer que* A *est semblable à la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit* $E = \mathbb{R}^2$ *et* $e = (e_1, e_2)$ *la base canonique de* E. *Il existe un unique endomorphisme* u *de* E *ayant* A *comme matrice dans la base* e. *Puisque* $A^2 = I$, $u^2 = \mathrm{id}$ *et donc* u *est une symétrie vectorielle. On a*

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}).$$

En effet, on peut toujours écrire $x = \frac{1}{2}(x + u(x)) + \frac{1}{2}(x - u(x))$ *avec* $x + u(x) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $x - u(x) \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. *L'intersection de* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ *étant bien sûr réduite au vecteur nul.*
Comme A *n'est pas scalaire,* $u \neq \mathrm{id}$ *et* $u \neq -\mathrm{id}$. *Par conséquent, aucun des deux noyaux n'est* $\mathbb{R}^2$ *tout entier. Les noyaux* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ *sont donc des droites vectorielles. Considérons* $f_1 \neq 0$ *un vecteur de* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et* $f_2 \neq 0$ *un vecteur de* $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. *D'après le théorème sur les bases adaptées à une somme directe,* $f = (f_1, f_2)$ *est une base de* E. *Dans cette base,*

$$D = \mathrm{M}at_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, il existe un unique endomorphisme v *ayant* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *comme matrice dans la base canonique. Comme* $B^2 = \mathrm{id}$, *le même raisonnement montre que* v *est une symétrie vectorielle et permet de construire une base* g *dans laquelle* $\mathrm{M}at_g(v) = D$.
Par conséquent, puisque A *et* D *sont semblables et que* B *et* D *sont semblables, on en déduit que* A *et* B *sont semblables.*

Exercice 25.103 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et un endomorphisme* $f \in L(E)$ *de rang* 1.

1. *Si l'on suppose que* $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$*, montrer qu'il existe une base* ε *de* E *et un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. *En déduire que pour tout endomorphisme* f *de rang* 1*, il existe un scalaire* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $f^2 = \alpha f$.
3. *Soit une base* e *quelconque de* E*, et un endomorphisme* $f \in L(E)$ *quelconque. On note* $B = \operatorname{Mat}_e(f)$ *la matrice de l'endomorphisme* f *dans la base* e*. Montrer l'équivalence*

$$\underbrace{\left(\operatorname{rg}(f) = 1\right)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\left(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2 \text{ non nuls tels que } B = X\,{}^tY\right)}_{(ii)}$$

(On se contentera de la démonstration dans le cas où $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$*). voir exercice 25.94 p.1025.*

Solution :

1. *D'après la formule du rang,*

$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$$

donc $\operatorname{Ker} f$ *est un hyperplan de* E *de dimension* $(n-1)$*. Comme* $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1$*, il existe un vecteur* $a \neq 0$ *tel que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$*. Puisque l'on a supposé que* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$*, et que* $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$*, on sait que*

$$E = \operatorname{Vect}(a) \oplus \operatorname{Ker} f$$

le système (a) *est une base de* $\operatorname{Im} f$*, et si l'on suppose* $n \geqslant 2$*, puisque* $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$*, il existe une base de* $\operatorname{Ker} f$ *de la forme* $(\varepsilon_2 \dots, \varepsilon_n)$*. Le théorème de la base adaptée à une somme directe nous dit alors que le système* $\varepsilon = (a, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ *est une base de* E*. Comme* $f(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$*, il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $f(a) = \lambda a$*. La matrice de* f *dans la base* ε *est donc bien de la forme souhaitée.*
2. *Dans le cas où* $a \in \operatorname{Ker} f$*, on a* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ *et donc* $f^2 = 0$*. Le résultat est montré avec* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$.
   On peut donc supposer que $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ *et alors* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$*. D'après a), on a construit une base* ε *dans laquelle la matrice de* f *était simple :* $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \lambda E_{11}$*. On calcule alors* $A^2 = \lambda^2 E_{11} E_{11} = \lambda^2 E_{11} = \lambda A$ *et on en déduit que* $f^2 = \lambda f$.
3. *Supposons que* $\operatorname{rg} f = 1$*. Lorsque* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$*, on a construit une base* ε *dans laquelle la matrice de* f *s'écrivait* $A = \lambda E_{11}$*. Posons* X' *la matrice colonne avec un* λ *sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes, et* Y' *la matrice colonne avec un* 1 *sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes. Un calcul direct montre que*

$$A = X'\,{}^tY'$$

Mais puisque les matrices A *et* B *représentent le même endomorphisme* f *dans deux bases différentes* ε *et* e*, elles sont semblables. En notant* P *la matrice de passage de la base* ε *vers la base* e*, on a*

$$A = PBP^{-1} = (PX')\,{}^tY'P^{-1} = (PX')^t\,({}^tP^{-1}Y')$$

et il suffit de poser $X = PX' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *et* $Y = {}^tP^{-1}Y' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *pour avoir* $B = X\,{}^tY$.
Si l'on suppose maintenant que $B = X\,{}^tY$*, en notant* $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *et* $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$*, la matrice* B *s'écrit :*

$$B = ((x_i y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles à la matrice colonne X*. En utilisant l'algorithme du rang, on trouve que cette matrice est de rang* 1 *(la colonne* X *est non-nulle).*

25.12.11 Systèmes linéaires

Exercice 25.104 ♡

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ *les systèmes :*

1. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y-z=2 \\ 2z=8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -x-3y+5z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+y+z=-1 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-3y+z=4 \\ x-3y-4z=5 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y+3z=0 \\ x+2y+6z=2 \\ 7x+3y+9z=14 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-2y+4z=1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ -x-y+z=-1 \end{cases}$

Solution :

1. *En remontant, on trouve successivement :* $z=4;\ y=2;\ x=-1$.
2. $\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 4 \\ x & - & 3y & - & 4z & = & 5 \end{cases}\begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3-L_1 \end{matrix}\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & - & 3z & = & 2 \\ & - & 2y & - & 6z & = & 4 \end{cases}.$
   Les deux dernières équations sont équivalentes. Le système est de rang 2 *et compatible. En prenant* z *comme paramètre, l'ensemble des solutions est* $\{(-5z-1,-3z-2,z) \mid z\in\mathbb{K}\}$.
3. *Système de Cramer :* $\left\{\left(-\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.
4. *Système de rang* 2 *et compatible.* $\{(2,-3z,z) \mid z\in\mathbb{K}\}$.
5. *Système de Cramer :* $\{(-2,1,2)\}$.
6. *Système de rang* 2 *mais pas compatible. Pas de solution.*
7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ *soit* $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3x\quad +5z=0 \end{cases}$. *Le système est de rang* 2*, donc compatible. En prenant* z *comme paramètre, l'ensemble des solutions est* $\left\{\left(-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}z,z\right) \mid z\in\mathbb{K}\right\}$.
8. *Le système est clairement de rang* 1 *et compatible (on a trois fois la même équation). L'ensemble des solutions est le plan d'équation* $x+y-z=1$.

Exercice 25.105 ♡

Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leur ensemble solution :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}\qquad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Solution : *Premier système : Matrice de rang* 3 *(inversible) donc une unique solution* $(0,0,0)$.
Deuxième système : Matrice de rang 2*, système non compatible, pas de solution.*
Troisième système : Matrice de rang 2*, système non compatible, pas de solution.*

Exercice 25.106 ♡

Discuter, suivant la valeur de m*, la dimension de l'espace des solutions des systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+mz=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$

Solution :

1. *Si* $m=1$ *ou* $m=-1$*, alors le système est de rang* 1*. L'espace des solutions est de dimension* 2*. Sinon le système est de rang* 2 *et l'espace des solutions est de dimension* 1*. Dans ce dernier cas, l'ensemble des solutions est* $\{(x,0,-x), x\in\mathbb{R}\}$.
2. *Si* $m=1$*, alors le système est de rang* 1*. L'espace des solutions est de dimension* 2*. Si* $m=-2$*, alors le système est de rang* 2*. L'espace des solutions est de dimension* 1*. Sinon le système est de Cramer. L'espace des solutions est de dimension* 0.

Exercice 25.107 ♡

On considère, pour un paramètre réel m*, les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+my+z=0 \quad\text{et}\quad mx+y-mz=0\right\}$$
$$\text{et}\quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-my+z=0\right\}$$

1. *Déterminer la dimension de* F *et de* G.
2. *Discuter suivant les valeurs de* m *la dimension du sous-espace vectoriel* $F\cap G$.

Solution :

1. *Que m soit égal à 1 ou non,* $\dim F = 1$ *car le rang de* $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \end{pmatrix}$ *égale* 2. $\dim G = 2$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = -4m^2$. *Si $m = 0$, alors $F \cap G$ est de dimension 1, et de dimension 0 sinon.*

Exercice 25.108 ♡

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t &=& b_1 \\ x+3y+4z+5t &=& b_2 \\ x+3y+3z+2t &=& b_3 \\ x+y+z+t &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t &=& b_1 \\ x+4y+7z+3t &=& b_2 \\ y+2z &=& b_3 \\ x+2y+3z+2t &=& b_4 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& b_1 \\ -x+3y+t &=& b_2 \\ 2x-2y+2z-2t &=& b_3 \\ 2y+z &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t &=& b_1 \\ -2x-4y-2z-4t &=& b_2 \\ -x-2y-z-2t &=& b_3 \\ 3x+6y+3z+6t &=& b_4 \end{array}\right.$$

Solution :
(S_1) *: solution unique quels que soient b_1, b_2, b_3, b_4.*
(S_2) *: solutions si $b_2 = b_1 + b_3$.*
(S_3) *: solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.*
(S_4) *: solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$.*

Exercice 25.109 ♡

Résoudre les systèmes suivants à l'aide du déterminant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ -x+2y+4z=0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ -x-2y-5z=-1 \end{array}\right.$$

Solution : *Premier système :* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ *et* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *donc le système est de rang* $\leqslant 2$. *Comme* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ *le système est de rang* 2. *On a une droite de solution, l'intersection des deux plans $x+y-z=0$ et $x+3y+z=0$, autrement dit la droite vectorielle engendrée par* $(-2, 1, -1)$.
Deuxième système : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ *donc le système est de rang* $\leqslant 2$. *Comme* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *le système est de rang* 2 *et on peut choisir x comme paramètre. On résout alors en y et z le système des deux premières équations en fonction de x. Soit $y = 3-3x$ et $z = x-1$. On vérifie enfin avec la troisième équation : $-x-6+6x-5x+5 = -1$.*

Exercice 25.110 ♡♡

Soit f l'application linéaire qui fait correspondre au vecteur (x, y, z) le vecteur (a, b, c, d) dont les coordonnées sont définies par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -x-y+mz=a \\ -mx+y+mz=b \\ x-y-mz=c \\ mx+y+z=d \end{array}\right.$$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, le rang de f. En déduire le nombre de solutions du système précédent puis le résoudre en fonction du second membre.

Solution : *Après permutation des deuxièmes et troisièmes lignes, on effectue des oel sur le tableau :*

$$\left(\begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & m & a \\ 1 & -1 & -m & c \\ -m & 1 & m & b \\ m & 1 & 1 & d \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + mL_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & m & a \\ 0 & -2 & 0 & a+c \\ 0 & 1+m & m-m^2 & b-ma \\ 0 & 1-m & 1+m^2 & d+ma \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrr|c} & -1 & -1 & m & a \\ & 0 & -2 & 0 & a+c \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1+m}{2}L_2 & 0 & 0 & m-m^2 & b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c) \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1-m}{2}L_2 & 0 & 0 & 1+m^2 & d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c) \end{array}$$

En prenant les lignes L_1, L_2 *et* L_4 *on voit que le rang du système égale* 3. *Donc s'il existe une solution, alors elle est unique.*
On résout donc le système (triangulaire) en x, y *et* z *grâce aux lignes* L_1, L_2 *et* L_4. *La ligne* L_3 *sert de vérification : Si*

$$\left(m-m^2\right)z = \frac{m-m^2}{1+m^2}\left(d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c)\right) = b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c),$$

alors le système est compatible et admet une solution unique. Sinon il n'admet pas de solution.

Exercice 25.111 ♡♡

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c *les solutions du système :*

$$\begin{cases} mx+my+mz=a \\ x+my+z=b \\ x+y+mz=c \end{cases}$$

Solution : *La matrice de ce système linéaire est* $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ *et* $\operatorname{rg}(A)=\begin{cases} 2 & \text{si } m=0 \\ 1 & \text{si } m=1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

– *Si* $m=0$ *le système devient :* $\begin{cases} 0=a \\ x+z=b \\ x+y=c \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $a=0$. *Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est :* $(b, c-b, 0)+\operatorname{Vect}(-1,1,1)$.
– *Si* $m=1$ *le système est :* $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+z=b \\ x+y+z=c \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $a=b=c$. *Dans ce cas, l'ensemble solution est* $(a,0,0)+\operatorname{Vect}((-1,1,0),(0,1,-1))$
– *Le système est de Cramer si* $m\neq 0$ *et* $m\neq 1$. *Il admet une et une seule solution donnée par :*

$$\left(\frac{(m+1)a-cm-mb}{m(m-1)}, -\frac{-mb+a}{m(m-1)}, -\frac{a-cm}{m(m-1)}\right)$$

Exercice 25.112 ♡♡

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c *les solutions du système :*

$$\begin{cases} x-y-mz=a \\ x+2y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$$

Solution : *La matrice de ce système linéaires est* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -m \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\operatorname{rg}(A)=\begin{cases} 2 & \text{si } m=5 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

– *Si* $m=5$ *le système devient :* $\begin{cases} x-y-5z=a \\ x+2y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$ *qui est équivalent à :* $\begin{cases} x-y-5z= a \\ y+2z=\dfrac{b-a}{3} \\ y+2z=\dfrac{c-a}{2} \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $\dfrac{b-a}{3}=\dfrac{c-a}{2}$. *Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est :* $\left(\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{b-a}{3}, 0\right)+\operatorname{Vect}(3,-2,1)$.
– *Le système est de Cramer si* $m\neq 5$. *Il admet une et une seule solution donnée par :*

$$\left(-\frac{3a+(m+1)b+(1-2m)c}{m-5}, \frac{2a-(m+1)c+(m-1)b}{m-5}, -\frac{a+2b-3c}{m-5}\right)$$

Exercice 25.113 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+by+z = 1 \\ x+by+z = b \\ x+by+az = 1 \end{cases}$$

Solution : Le déterminant de la matrice vaut $(a-1)^2 b$.

1. $a \neq 1, b \neq 0$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\dfrac{1-b}{a-1}, \dfrac{ab+b-2}{(a-1)b}, \dfrac{1-b}{a-1}\right)\right\}$.
2. $a = 1$, le système est compatible si et seulement si $b = 1$ et dans ce cas, $\mathscr{S} = (1,0,0) + \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$.
3. $b = 0, a \neq 1$: le système est incompatible.

Exercice 25.114 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Solution : Le déterminant du système égale $b(a+2)(a-1)^2$.
Si $b = 0$, le système est toujours incompatible. Sinon,

1. $a \neq -2, 1$:
$$\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{(a-1)(a+2)b}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$$
2. $a = -2, b \neq -2$, $\varnothing$.
3. $a = 1, b \neq 1$, $\varnothing$.
4. $a = -2$ et $b = -2$, $(-1-2y, y, -1-x-y)$.
5. $a = 1$ et $b = 1$, $(x, y, x-y)$.

Exercice 25.115 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + ay + bz = a \\ x - 2ay + bz = b \end{cases}$$

Solution : On soustrait les deux lignes pour obtenir $\begin{cases} x + ay + bz = a \\ -3ay = b - a \end{cases}$.
Si $a = 0$, deux cas se présentent : Si $b = 0$ alors le système est de rang 1 et les solutions sont $(0, y, z)$. Si $b \neq 0$ alors le système n'est pas compatible.
Si $a \neq 0$, alors $y = \frac{a-b}{3a}$ et $x + bz = \frac{2a+b}{3}$ qui est une équation de droite dans le plan $y = \frac{a-b}{3a}$.

Exercice 25.116 ♡

Résoudre $\begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 31 \end{cases}$ et $\begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32{,}1 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 22{,}9 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33{,}1 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 30{,}9 \end{cases}$.

Commentaire.

Solution : $(1,1,1,1)$ est la solution du premier système. $(9{,}2; -12{,}6; 4{,}5; -1{,}1)$ est la solution du deuxième système. Dans cet exemple, une petite perturbation $(0{,}1; -0{,}1; 0{,}1; -0{,}1)$ du vecteur de données entraîne une grosse perturbation du vecteur de solutions.