Chapitre 3

Dimension des espaces vectoriels

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.
John von Neumann.

Pour bien aborder ce chapitre

Après avoir mis en place les bases d'algèbre linéaire nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la notion de dimension. La dimension d'un espace vectoriel est liée au nombre de paramètres (ou parle aussi de degrés de liberté) qu'il faut considérer pour pouvoir le décrire. Ainsi pour choisir un couple de $\mathbb{R}^2$ il faut choisir une abscisse et une ordonnée. Il y a deux paramètres (ou deux degrés de liberté). On verra que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. De même, pour choisir un polynôme aX^2+bX+c de $\mathbb{R}_2[X]$, il faut choisir a, b et c. On verra là aussi que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Dans certains cas, il faut une infinité de paramètres pour décrire les vecteurs de l'espace considéré. Par exemple, pour choisir une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il faut choisir chaque terme $u_0, u_1, \ldots$. Ou encore pour choisir une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il faut choisir l'image de chaque point de $\mathbb{R}$ par f. Ces deux espaces sont de dimension infinie.
Même s'il sera utile de se souvenir de ces considérations, la définition précise de la notion de dimension demande quelques efforts qui nous en éloignent un moment. On peut remarquer que toute base du plan compte exactement deux vecteurs. De même toute base de l'espace en compte trois. Le plan est de dimension 2 et l'espace de dimension 3. Si on arrive à définir, pour un espace vectoriel quelconque ce qu'est une base (quand il en a) et qu'on parvient à montrer que deux bases sont toujours de même cardinal alors on tiendra notre définition. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs que contient une base donnée (quand ce nombre est fini).
Ceci est cohérent avec notre intuition initiale. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de l'espace vectoriel considéré E, alors choisir un vecteur dans E revient à choisir ses n composantes sur la base, il y a bien n degrés de liberté.
Nous traiterons les notions de base et de dimension dans les premières sections de ce chapitre. Nous nous occuperons ensuite à étudier les conséquences de ces notions en algèbre linéaire. En particulier, nous démontrerons deux formules fondamentales :

– la formule de Grassmann
– la formule du rang

qui permettront de beaucoup simplifier les démonstrations de supplémentarité et celles de bijectivité (elles permettront de diviser par deux le travail à faire quand on n'en dispose pas).

24.1 Familles de vecteurs

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

24.1.1 Combinaisons linéaires

DÉFINITION 24.1 ♡ **Combinaison linéaire**
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$. On appelle **combinaison linéaire de ces n vecteurs** tout vecteur $v \in E$ de la forme :

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot v_k$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 24.1 ♡ **Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n-vecteurs de E et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ alors

$$f(\lambda_1\cdot v_1+\dots+\lambda_n\cdot v_n)=\lambda_1\cdot f(v_1)+\dots+\lambda_n\cdot f(v_n).$$

Démonstration *Par une récurrence immédiate.*

24.1.2 Familles libres

DÉFINITION 24.2 ♡♡♡ **Famille liée**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est *liée*, ou que les vecteurs $v_1,\dots,v_p$ sont *linéairement dépendants* si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres ou autrement dit si et seulement si il existe un p-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ de scalaires non tous nuls vérifiant $\lambda_1\cdot v_1+\dots+\lambda_p\cdot v_p=0$.

Exemple 24.1
- Trois vecteurs du plan sont toujours liés. De même, 4 vecteurs de l'espace sont toujours liés. On comprend bien intuitivement ces deux affirmations. On les démontrera dans l'exemple 24.7 page 903.
- Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $u_1=(1,0,1,-1)$, $u_2=(3,-2,2,-3)$ et $u_3=(-1,2,0,1)$ forment une famille liée. En effet, $u_2=2u_1-u_3$.
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $f_1: x\mapsto\cos^2 x$, $f_2: x\mapsto\sin^2 x$ et $f_3: x\mapsto\cos 2x$ sont liées. En effet, $f_3=f_1-f_2$.

Pour définir une famille de vecteurs linéairement dépendants, il suffit de prendre la négation de la définition précédente : $v=(v_1,\dots,v_p)$ est une famille liée de vecteurs de E si et seulement si pour toute famille de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$, si $\lambda_1\cdot x_1+\dots+\lambda_p\cdot x_p=0$ alors $\lambda_1=\dots=\lambda_p=0$. On a alors la définition suivante :

DÉFINITION 24.3 ♡♡♡ **Famille libre**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est **libre**, ou que les vecteurs $v_1,\dots,v_p$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si la famille n'est pas liée ou autrement dit si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \lambda_1\cdot v_1+\dots+\lambda_p\cdot v_p=0 \implies \lambda_1=\dots=\lambda_p=0$$

PLAN 24.1 : Pour montrer qu'une famille est libre

1. *Soit* $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ *tel que* $\lambda_1\cdot v_1+\dots+\lambda_n\cdot v_n=0$.
2. *... alors* $\lambda_1=\dots=\lambda_p=0$
3. *Donc la famille est libre.*

PLAN 24.2 : Pour montrer qu'une famille est liée

1. *Posons* $\lambda_1=\dots,\dots,\lambda_p=\dots$
2. *Un des* λ_i *pour* $i\in[\![1,p]\!]$ *au moins est non nul*
3. *On a bien par ailleurs :* $\lambda_1\cdot v_1+\dots+\lambda_n\cdot v_n=0$.
4. *Donc la famille est liée.*

Exemple 24.2
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est libre. En effet, soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(0,0)$. Alors $(\alpha,\beta)=(0,0)$ et donc $\alpha=\beta=0$.
- On démontre de même que dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est libre.
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la famille $(\sin,\cos,\exp)$ est libre. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha\sin+\beta\cos+\gamma\exp=0$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\exp x=0$ ce qui s'écrit aussi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\frac{\sin x}{\exp x}+\beta\frac{\cos x}{\exp x}+\gamma=0$. On montre facilement en utilisant le théorème des gendarmes que $\lim_{+\infty}\frac{\sin x}{\exp x}=\lim_{+\infty}\frac{\cos x}{\exp x}=0$. On en déduit que $\gamma=0$. On a alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\sin x+\beta\cos x=0$. Si on fait $x=0$ on obtient $\beta=0$ et si on fait $x=\pi/2$, il vient que $\alpha=0$. On a alors bien montré que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Remarque 24.1 Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
- Si l'un des vecteurs est nul, la famille est liée.
- Si l'un des vecteurs de la famille apparaît plus d'une fois dans la famille alors la famille est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre

24.1.3 Familles génératrices

DÉFINITION 24.4 ♡♡♡ **Famille génératrice**
On dit qu'une famille $\left(v_1,\dots,v_p\right)$ de p vecteurs de E *engendre* l'espace vectoriel E (ou est *génératrice de* E) si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire de la famille $\left(v_1,\dots,v_p\right)$:

$$\forall v\in \mathrm{E},\quad \exists\left(\lambda_1,\dots,\lambda_p\right)\in\mathbb{K}^p:\quad v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot v_i$$

Autrement dit : $\mathrm{V}ect\left(\left\{v_1,\dots,v_p\right\}\right)=\mathrm{E}$.

PLAN 24.3 : Pour montrer qu'une famille est génératrice

1. *Soit* $v\in\mathrm{E}$.
2. *Posons* $\lambda_1=\dots,\dots,\lambda_p=\dots$
3. *On a bien :* $v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot v_i$

Exemple 24.3

- Dans $\mathbb{R}^2$, soient $x_1=(1,0)$ et $x_2=(1,0)$. La famille (x_1,x_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $v=\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ alors $v=x(1,0)+y(0,1)$.
- On montre de même que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.
- La famille $((1,0,1),(0,1,1))$ engendre le plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y=z$. En effet $\mathrm{F}=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid x+y-z=0\right\}=\left\{\left(x,y,x+y\right)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{V}ect((1,0,1),(0,1,1))$.
- La famille $\left(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\dots,\mathrm{X}^n\right)$ engendre $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. En effet, si $\mathrm{P}\in\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ alors il existe $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{P}=a_n\mathrm{X}^n+\dots+a_0$.
- On considère l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des fonctions en escaliers sur $[0,1]$. On considère les fonctions $f_{a,b}$ définies pour $a\leqslant b$ par $f_{a,b}(x)=1$ pour $a\leqslant x\leqslant b$ et $f_{a,b}(x)=0$ sinon. La famille $(f_{a,b})_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant 1}$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$, mais n'est pas libre : $f_{0,1/2}+f_{1/2,1}-f_{0,1}-f_{1/2,1/2}$.

Remarque 24.2 Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

24.1.4 Bases

DÉFINITION 24.5 ♡♡♡ **Base**
On dit qu'une famille $\left(v_1,\dots,v_p\right)$ de vecteurs de E est une *base* de E si et seulement si, à la fois :

1. $\left(v_1,\dots,v_p\right)$ est une famille libre de E.
2. $\left(v_1,\dots,v_p\right)$ est une famille génératrice de E.

Exemple 24.4

- La famille $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet, si $a,b\in\mathbb{R}$ sont tels que $a.1+b.i=0$ alors $a+ib=0$ et donc $a=b=0$. La famille est donc libre. Pour tout nombre complexe, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $z=a+ib$. La famille est donc aussi génératrice de $\mathbb{C}$. C'est donc une base de $\mathbb{C}$.
- Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On a prouvé dans l'exemple 24.2 que cette famille est libre et dans l'exemple 24.3 qu'elle engendre $\mathbb{R}^3$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée des vecteurs $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(1,-1,1)$ et $e_3=(0,1,1)$ est une base. La famille est libre : soit $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=0$. Alors $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 & =0\\ -\alpha_2+\alpha_3 & =0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & =0\end{cases}$ ce qui amène $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. La famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $\left(x,y,z\right)=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=0$. On obtient alors le système $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 & =x\\ -\alpha_2+\alpha_3 & =y\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & =z\end{cases}$ et on trouve $\alpha_1=2x+y-z$, $\alpha_2=-x-y+z$ et $\alpha_3=-x+z$ donc (e_1,e_2,e_3) engendre $\mathbb{R}^3$. C'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

De manière plus générale, on a :

PROPOSITION 24.2 ♡ Base canonique de $\mathbb{K}^n$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$. Il existe une base privilégiée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dite canonique et donnée par :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & = & (0,0,0,\dots,1) \end{array}$$

Démonstration *La famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ alors : $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Elle est de plus libre : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, alors on a : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ ce qui prouve que $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0$.*

PROPOSITION 24.3 ♡ Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il existe une base privilégiée de $\mathbb{K}_n[X]$ dite canonique et donnée par : $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$.

Démonstration *Voir le chapitre sur les polynômes. Nous reviendrons sur cette proposition plus loin dans ce chapitre.*

PROPOSITION 24.4 ♡ Base de $\mathbb{C}(X)$
La "réunion" des familles $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{(X-a)^n}\right)_{\substack{a\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}^*}}$ est une base de $\mathbb{C}(X)$.

Démonstration *C'est exactement la traduction du théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ en termes de combinaisons linéaires. On peut aussi trouver une base de $\mathbb{R}(X)$.*

THÉORÈME 24.5 ♡♡♡ Composantes d'un vecteur relativement à une base
Une famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $v \in E$, il $\boxed{\text{existe}}$ une $\boxed{\text{unique}}$ famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\boxed{v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n}$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est alors appelé famille des *composantes* (ou *coordonnées*) de v dans la base e.

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$

- $\boxed{\text{Existence}}$ *Comme la famille e est une base, elle est génératrice de E et donc pour tout $v \in E$, il existe un n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{k=1}^p \lambda_i \cdot e_i$*
- $\boxed{\text{Unicité}}$ *Supposons qu'il existe deux n-uplets de scalaires : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\left(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\right)$ tels que :*

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_i \cdot e_i.$$

On a donc : $\sum_{k=1}^p \left(\lambda'_i - \lambda_i\right) \cdot e_i = 0$. Mais e étant une base de E, elle est libre et cette dernière égalité n'est possible que si : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda'_i - \lambda_i = 0$ c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda'_i = \lambda_i$ ce qui prouve l'unicité.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que pour tout $v \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :*

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$$

et montrons que e est une base de E. Il est clair que e est génératrice. Montrons que e est libre. La seule décomposition de 0_E sur les vecteurs de la famille e est $0_E = 0e_1 + \dots 0e_n$. Par conséquent, si le n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0_E$, on a nécessairement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i = 0$ ce qui prouve que e est libre.

24.2 Dimension d'un espace vectoriel

24.2.1 Espace vectoriel de dimension finie

DÉFINITION 24.6 ♡ **Espace vectoriel de dimension finie**
On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*. De plus, par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

Exemple 24.5
- K^n est de dimension finie car sa base canonique est une famille génératrice finie de K^n.
- De la même façon, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.
- Par contre, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Voir l'exemple 24.9 pour une démonstration.
- De la même façon, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie. Voir l'exercice 24.32 page 924.

LEMME 24.6 ♡ **Augmentation d'une famille libre**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E\setminus\{0\}$. On suppose que :

H1 $\mathscr{L} = (l_1,\dots,l_n)$ est une famille libre de vecteurs de E.

H2 $x \notin Vect(\mathscr{L})$

Alors $(l_1,\dots,l_n,x)$ est encore une famille libre de vecteurs de E.

Démonstration *Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que : $\alpha_1 l_1+\dots+\alpha_n l_n+\alpha x = 0$. Supposons que les $n+1$ scalaires ne sont pas tous nuls. Il y a alors deux possibilités :*

1. *$\alpha = 0$ et donc $\alpha_1 l_1+\dots+\alpha_n l_n = 0$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tous nuls, ce qui n'est pas possible car la famille $\mathscr{L}$ est, d'après la première hypothèse, libre dans E.*
2. *$\alpha \neq 0$. Dans ce cas, on peut alors écrire x comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$ ce qui contredit la seconde hypothèse.*

On montre ainsi par l'absurde que la famille $(l_1,\dots,l_n,x)$ est libre.

LEMME 24.7 ♡ **Diminution d'une famille liée**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{G} = \left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. On suppose que :

H1 $g_{n+1} \in Vect\left(g_1,\dots,g_n\right)$ (c'est-à-dire, g_{n+1} est combinaison linéaire des vecteurs $g_1,\dots,g_n$).

Alors :

$$Vect\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right) = Vect\left(g_1,\dots,g_n\right)$$

C'est-à-dire qu'on peut retirer le vecteur g_{n+1} à $\mathscr{G}$ sans modifier le sous-espace engendré par $\mathscr{G}$.

Démonstration *D'après l'hypothèse, il existe un n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de scalaires de $\mathbb{K}$ tels que : $g_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k$. Posons $F = Vect\left(g_1,\dots,g_n\right)$ et montrons que la famille $\left(g_1,\dots,g_n\right)$ génère aussi F. Soit $x\in F$. Il existe $(x_1,\dots,x_{n+1})$ un $(n+1)$-uplet de scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n+1} x_i g_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1} g_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_i + x_{n+1}\alpha_k\right) g_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que $Vect\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right) \subset Vect\left(g_1,\dots,g_n\right)$. Il est par ailleurs clair que $Vect\left(g_1,\dots,g_n\right) \subset Vect\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)$ et l'égalité est alors établie.

THÉORÈME 24.8 ♡ **Fondamental : On peut compléter une famille libre en une base en puisant dans une famille génératrice**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q,n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

H1 $\mathscr{L} = (l_1, \dots, l_p)$ est une famille libre de vecteurs de E.

H2 $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_q)$ est une famille génératrice de vecteurs de E.

alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$$

où $l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathscr{G}$.

Démonstration *On va procéder de manière algorithmique. Si la famille $\mathscr{L}$ est génératrice, le théorème est démontré, sinon on construit une base ainsi. Posons $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}$.*

- $\boxed{1^{\text{ère}} \text{ étape :}}$
  - *Si $g_1 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0$. D'après le lemme 24.7, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\})$*
  - *Si $g_1 \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0 \cup \{g_1\}$. D'après le lemme 24.6, la famille $\mathscr{L}_1$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\})$.*

  Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\}) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_1 \text{ est libre}}$$

- *Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i + 1 \leqslant q$.*
- $\boxed{i^{\text{ème}} \text{ étape :}}$ *On suppose que la famille $\mathscr{L}_i$ est construite en sorte que :*

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_{i-1} \cup \{g_i\}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1, \dots, g_i\})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{L}_i \text{ est libre}}$$

- $\boxed{i+1^{\text{ème}} \text{ étape :}}$ *On construit maintenant $\mathscr{L}_{i+1}$.*
  - *Si $g_{i+1} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i$. D'après le lemme 24.7, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i)$*
  - *Si $g_{i+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\}$. D'après le lemme 24.6, la famille $\mathscr{L}_{i+1}$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\})$.*

  Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\}) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_{i+1} \text{ est libre}}$$

- *On construit ainsi par récurrence les familles $\mathscr{L}_0, \dots, \mathscr{L}_q$.*

La famille $\mathscr{L}_q$ vérifie alors :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_q) = \mathrm{Vect}(\mathscr{L} \cup \mathscr{G}) \supset \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_q \text{ est libre}}$$

et est donc libre et génératrice de E. *$\mathscr{L}_q$ est donc une base de* E.

Remarque 24.3 Cette démonstration fournit un algorithme explicite pour fabriquer des bases dans un espace vectoriel de dimension finie.

COROLLAIRE 24.9 ♡ **Existence de base**
Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une base.

Démonstration *Par définition, un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. Soit $x \neq 0 \in \mathscr{G}$. La famille constituée du singleton $\{x\}$ est libre dans* E. *Par application de la proposition précédente, on peut la compléter en une base de* E *en la complétant par des vecteurs de $\mathscr{G}$ bien choisis.*

COROLLAIRE 24.10 ♡ **Théorème de la base incomplète**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. D'après le théorème précédent appliqué à $\mathscr{L}$ et à $\mathscr{G}$, on prouve l'existence d'une base de* E *construite par complétion de la base $\mathscr{L}$.*

24.2.2 Dimension

LEMME 24.11 **Lemme de Steinitz**
Soient $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathscr{T} = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ deux familles de vecteurs de E. On suppose que :

H1 $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad y_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{S})$

alors $\mathscr{T}$ est liée.

Démonstration *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété à démontrer. Nous allons effectuer une récurrence sur n.*

- *Si $n=1$ alors $\mathscr{S}=\{x_1\}$ et $\mathscr{T}=\{y_1,y_2\}$. Par hypothèse, $y_1=\alpha_1 x_1$ et $y_2=\alpha_2 x_1$ où $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$. Ces deux scalaires ne sont pas tous deux nuls sinon $\mathscr{T}$ ne compte qu'un élément. On a alors $\alpha_2 y_1-\alpha_1 y_2=0$ et $\mathscr{T}$ est liée. Donc P_1 est vraie.*
- *Soit $n\in\mathbb{N}$.*
- *Supposons que P_{n-1} est vraie et prouvons que c'est alors aussi le cas de P_n. Soient $\mathscr{S}=(x_1,\dots,x_n)$ et $\mathscr{T}=(y_1,\dots,y_n,y_{n+1})$ des familles de vecteurs comme dans l'énoncé du lemme. On a :*

$$\begin{cases} y_1 & =\sum_{i=1}^n \alpha_i^1 x_i \\ \vdots & = \vdots \\ y_{n+1} & =\sum_{i=1}^n \alpha_i^{n+1} x_i \end{cases}$$

où $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_i^j\in\mathbb{K}$. Il y a deux cas possibles :

■ *Si $\boxed{\forall k\in[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_n^k=0}$ alors $(y_1,\dots,y_n)$ est une famille de vecteurs qui sont tous combinaisons linéaires de la famille $(x_1,\dots,x_{n-1})$. Par application de l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $(y_1,\dots,y_n)$ est une famille liée. Il en est alors de même de $(y_1,\dots,y_{n+1})$.*

■ *Sinon $\boxed{\exists k\in[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_n^k\neq 0}$. Quitte à ré-indicer les vecteurs de $\mathscr{T}$, on peut supposer que $\alpha_n^{n+1}\neq 0$. Posons alors : $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad z_k=y_k-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}$. Chacun des vecteurs de la famille $(z_1,\dots,z_n)$ est alors élément de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(z_1,\dots,z_n)$ est donc liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k z_k=0$, ce qui s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n \lambda_k\left(y_k-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}\right)=0$ ou encore : $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k-\dfrac{\sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}=0$ et prouve que la famille $(y_1,\dots,y_{n+1})$ est bien liée.*

- *Le théorème est alors prouvé par application du théorème de récurrence.*

THÉORÈME 24.12 ♡ **Le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.**
Soient :
– $\mathscr{S}$ une famille libre de E.
– $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.
alors : $\boxed{\mathrm{Card}\mathscr{L}\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{G}}$.

Démonstration *Supposons que ce ne soit pas le cas : $\mathrm{Card}\mathscr{L}>\mathrm{Card}\mathscr{G}$. Posons $m=\mathrm{Card}\mathscr{G}$ et supposons que $\mathscr{G}=(x_1,\dots,x_m)$ et que $(y_1,\dots,y_{m+1})$ soient $m+1$ vecteurs de $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, on a : $\forall i\in[\![1,n+1]\!],\quad y_i\in\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Par application du lemme de Steinitz 24.11, cela implique que $(y_1,\dots,y_{m+1})$ est une famille liée de E, ce qui contredit le fait que $\mathscr{L}$ est une famille libre de E. Le théorème est alors prouvé par l'absurde.*

THÉORÈME 24.13 ♡ **Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal**
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration *Comme E est de dimension finie, E possède au moins une base. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Comme $\mathscr{B}_1$ est libre et $\mathscr{B}_2$ est génératrice, on a $\mathrm{Card}\mathscr{B}_1\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{B}_2$. De même, $\mathscr{B}_2$ est libre et $\mathscr{B}_1$ est génératrice, donc $\mathrm{Card}\mathscr{B}_2\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{B}_1$. Par conséquent : $\mathrm{Card}\mathscr{B}_1=\mathrm{Card}\mathscr{B}_2$.*

Ce théorème, associé au théorème 24.9, permet de donner un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 24.7 ♡ **Dimension d'un espace vectoriel**
– Si $\mathrm{E}=\{0\}$, on dit que E est de **dimension** 0 et on note $\dim\mathrm{E}=0$.
– Sinon, si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, on appelle **dimension** de E le cardinal d'une base de E et on le note $\dim\mathrm{E}$.

Exemple 24.6
– $\dim\mathbb{K}^n=n$.
– $\dim\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]=n+1$.

Application 24.7

Une famille f d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace E de dimension n est toujours liée. En effet, si elle était libre alors on aurait une famille libre f de cardinal plus grand que celui de n'importe quelle base e de E. Or e est une famille génératrice de E et le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.

THÉORÈME 24.14 ♡ **Caractérisation des bases**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}$. Soit $\mathscr{S}$ une famille de vecteurs de E de cardinal p.

1. Si $\mathscr{S}$ est libre alors $p\leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.
2. Si $\mathscr{S}$ est génératrice alors $p\geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.

Démonstration *Comme* E *est de dimension* n*, il possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n*.*

- *Si* $\mathscr{S}$ *est libre alors appliquant la proposition 24.12, on a :* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$.
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est génératrice. Si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $x_0 \not\in \mathrm{V}ect(\mathscr{S})$*. La famille* $\mathscr{S} \cup \{x_0\}$ *est, d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 24.6, encore libre. On doit donc encore avoir, en vertu de la proposition 24.12,* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \cup \{x_0\} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$*. Mais cette dernière égalité est équivalente à* $n+1 \leqslant n$*. On a ainsi montré par l'absurde que* $\mathscr{S}$ *est génératrice.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors on a, par application de la proposition 24.12,* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \geqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$
- *Si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors en appliquant la proposition 24.12, on a :* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \geqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$*.*
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est libre. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe* $x_0 \in \mathscr{S}$ *tel que* $x_0 \in \mathrm{V}ect(\mathscr{S} \setminus \{x_0\})$*. Par application du lemme de réduction d'une famille liée 24.7,* $\mathscr{S} \setminus \{x_0\}$ *est encore génératrice mais on a alors* $n-1 = \operatorname{Card}\mathscr{S} \setminus \{x_0\} \geqslant n$ *ce qui contredit la proposition 24.12.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est une base alors elle est libre et on a* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \leqslant n$ *et donc* $p = n$*.*

Remarque 24.4 Comme on va le voir dans les exemples suivants, ce théorème permet de diviser par deux le travail à entreprendre pour montrer qu'une famille est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donné.

Exemple 24.8

- Reprenons le quatrième point de l'exemple 24.4. Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ et montrons que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On montre comme dans l'exemple 24.4 que cette famille est libre. On conclut en remarquant que $\operatorname{Card}(e) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc e est une base de $\mathbb{R}^3$. On n'a pas besoin de montrer que e est génératrice de $\mathbb{R}^3$! C'est automatique.
- Montrons que la famille $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ avec $\mathrm{P}_1 = 5$, $\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{X} - 1$ et $\mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On commence par montrer que la famille est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1\mathrm{P}_1 + \alpha_2\mathrm{P}_2 + \alpha_3\mathrm{P}_3 = 0$. Alors $\alpha_3\mathrm{X}^2 + (2\alpha_2 - 4\alpha_3)\mathrm{X} + (5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 0$. Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls et on obtient le système : $\begin{cases} 5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est bien libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathrm{P}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ donc P est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Exemple 24.9

Montrons que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de dimension infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathrm{E}_n = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est libre et $\operatorname{Card}(\mathrm{E}_n) = n+1$. Supposons que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ contient une famille libre, E_{n+1} qui est de cardinal $n+1$, ce qui est impossible. Donc $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de dimension infinie.

BIO 21 Hermann Günther Grassmann, né le 15 avril 1809 à Stettin et mort le 26 septembre 1877 à Stettin (Allemagne).

Hermann Grassmann est le troisième enfant d'une famille de douze. Son père enseigne les mathématiques. Devant les piètres qualités intellectuelles de son fils (mémoire peu fiable, trouble de la concentration, ...), il pense faire de lui un jardinier ou un bijoutier. Hermann Grassmann se rend néanmoins à Berlin en 1927 pour étudier la théologie. Peu à peu, il se passionne pour les mathématiques qu'il découvre au travers des ouvrages écrit par son père. En 1830, il retourne dans sa ville natale en tant que professeur de mathématiques. Ayant raté son examen, il ne peut enseigner que dans les premières classes du secondaire. Il commence en même temps ses recherches en mathématiques. En 1840 il reçoit l'habilitation à enseigner dans les différentes classes de lycée et en 1844, il publie son ouvrage majeur *``Die lineale Ausdenungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik''*. Grassmann y donne les fondements de l'algèbre linéaire. Son idée est de mettre l'algèbre au service de la géométrie. Il articule les choses autour de la notion de vecteurs. Cette citation est éclairante sur ses motivations : « La première impulsion est venue de considération sur la signification des nombres négatifs en géométrie. Habitué à voir AB comme une longueur, j'étais néanmoins convaincu que $AB = AC + CB$, quelle que soit la position de A, B, C sur une droite ». Il introduit les notions d'indépendance linéaire, de sous-espace vectoriel, de base et de dimension. Ses écrits sont confus et difficiles à suivre, aussi le livre n'aura que peu de lecteurs. Grassmann est très frustré de ce fait car il pense que son travail est révolutionnaire et qu'il mérite un poste à l'université. Il écrit une seconde version de son livre qu'il publie en 1862. Mais malgré ses efforts de présentation, elle ne connaît pas plus de succès que la première. Aigri, Grassmann se tourne alors vers la linguistique et apprend le Sanscrit et le Gothique. Grâce à d'importants travaux de traduction, il entre enfin à l'université. Il faut attendre 1888 pour que le mathématicien Giuseppe Peano reprenne le travail de Grassmann et en précise toute la portée.

24.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

On va maintenant étudier ce que la notion de dimension apporte dans l'étude des sous-espaces vectoriels.

24.3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

THÉORÈME 24.15 ♡ **Dimension d'un sous-espace vectoriel**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On a :

1. F est de dimension finie et $\boxed{\dim F \leqslant \dim E}$.
2. $\boxed{(\dim F = \dim E) \Longleftrightarrow F = E}$

Démonstration

1. *Si* $F = \{0\}$*, le résultat est immédiat. Sinon, notons* L *l'ensemble des familles libres de* F. L *est non vide car* F *est non trivial et un vecteur de* F *à lui seul constitue une famille libre de* F. *Toute famille libre de* F *est une famille libre de* E *donc possède au plus* n *éléments. Notons* $p = \max\left\{\operatorname{Card}\mathscr{L} \mid \mathscr{L} \in L\right\}$. *On a donc* $p \leqslant n$ *et si une famille libre* $\mathscr{L}$ *de* E *vérifie à la fois :* $\operatorname{Card}\mathscr{L} = p$ et $\mathscr{L} \in L$ *alors nécessairement* $\mathscr{L}$ *est une base de* F. *En effet :*
   - $\mathscr{L}$ *est libre.*
   - $\mathscr{L}$ *est génératrice de* F. *Si ce n'était pas le cas, alors d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 24.6, il existerait un vecteur* $x \in F$ *tel que* $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \{x\}$ *soit encore libre. Mais* $\tilde{\mathscr{L}} \in L$ *et* $\operatorname{Card}\tilde{\mathscr{L}} = p + 1 > p$ *ce qui constituerait une contradiction. La famille* $\mathscr{L}$ *est donc nécessairement génératrice et est donc une base de* F.
2. *Le sens indirect est trivial. Réciproquement, si* $\dim F = \dim E$ *alors* F *possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n. *Mais* $\mathscr{B}$ *est, par application de la proposition 24.14, aussi une base de* E *et donc :* $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E$.

On utilise très souvent cette propriété...Elle permet de diviser par deux le travail à effectuer pour montrer que deux sous-espaces vectoriels E et F sont égaux. D'habitude on montre que $F \subset G$ puis que $G \subset F$. Il suffira donc de montrer la première inclusion puis que les deux sous-espaces ont même dimension.

PLAN 24.4 : ...pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux

1. *On montre que* $F \subset G$
2. *On montre que* $\dim F = \dim G$
3. *Alors* $F = G$

Exemple 24.10 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \operatorname{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \qquad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x-y+z=0, x+2y-t=0\}$$

Cherchons à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $F = G$?

– Supposons tout d'abord que $F = G$. Alors $(1,1,\lambda,3) \in G$ et doit satisfaire en particulier l'équation $x - y + z = 0$. On trouve alors que $\lambda = 0$.
– Montrons que si $\lambda = 0$ alors $F = G$. On sait que $F = \operatorname{Vect}((1,1,0,3),(0,1,1,2))$. Les vecteurs $(1,1,0,3),(0,1,1,2)$ engendrent F et ils sont non colinéaires donc ils forment une famille libre. Par suite, c'est une base de F et $\dim F = 2$. Par ailleurs $G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x-y+z=0, x+2y-t=0\} = \left\{\left(x,y,y-x,x+2y\right) \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\left((1,0,-1,1),(0,1,1,2)\right)$, on montre alors de la même façon qu'avant que $\dim G = 2$. De plus $(1,1,0,3)$ et $(0,1,1,2)$ vérifient le système $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x+2y-t &= 0 \end{cases}$ donc $(1,1,0,3),(0,1,1,2) \in G$ et comme G est un sous-espace vectoriel, $F = \operatorname{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \subset G$. Enfin, comme $\dim F = \dim G$ on obtient $F = G$.

24.3.2 Somme directe

Le théorème suivant sera souvent bien commode pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

THÉORÈME 24.16 ♡ **Un caractérisation de la supplémentarité en termes de bases**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E munis d'une base $\left(e_1,\dots,e_p\right)$ pour F et d'une base $\left(f_1,\dots,f_q\right)$ pour G. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.
2. $\mathscr{B} = \left(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q\right)$ est une base de E.

Démonstration

– *Prouvons le sens direct. On suppose que* $E = F \oplus G$.
  - *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre : soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} f_1 + \ldots + \alpha_n f_q = 0$. *On a alors :* $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p = -\left(\alpha_{p+1} f_1 + \ldots + \alpha_n f_q\right)$. *Comme* e *est une base de* F, *on a* $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p \in F$ *et comme* f *est une base de* G, *on a :* $x = -\left(\alpha_{p+1} f_1 + \ldots + \alpha_n f_q\right) \in G$. *Mais* F *et* G *étant en somme directe, on a :* $F \cap G = \{0\}$ *et donc* $x = 0$. *Comme* e *est une base de* F *et* f *une base de* G, *ceci implique que* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ *et donc que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  - *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* E. *Soit* $x \in E$. *Comme* $E = F \oplus G$, *il existe un vecteur* $x_1 \in F$ *et un vecteur* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *De plus :*
    – *Comme* e *est une base de* F *et que* $x_1 \in F$, *il existe* $\alpha_1,\dots\alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_1 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p$.
    – *Comme* f *est une base de* G *et que* $x_2 \in G$, *il existe* $\beta_1,\dots\beta_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_2 = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_q e_q$.

    Par conséquent : $x = x_1 + x_2 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_q e_q \in Vect(\mathscr{B})$ *et* $\mathscr{B}$ *est donc bien génératrice de* E.

  On a ainsi prouvé que $\mathscr{B}$ *est une base de* E.

– *Prouvons la réciproque. On suppose que* $\mathscr{B}$ *est une base de* E.
  - *On a* $F \cap G = \{0\}$. *En effet si* $x \in F \cap G$ *alors il existe* $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1,\dots,y_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p = y_1 f_1 + \ldots + y_q f_q$. *Mais alors* $x_1 e_1 + \ldots + x_p - y_1 f_1 - \ldots - y_q f_q = 0$. *Mais la famille* $\mathscr{B}$ *est libre donc* $x_1 = \ldots = xp = y_1 = \ldots = y_q = 0$ *et* $x = 0$.
  - *On a* $E = F + G$. *En effet, si* $x \in E$ *alors comme* $\mathscr{B}$ *engendre* E, *il existe* $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1,\dots,y_q \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p}_{\in F} + \underbrace{y_1 f_1 + \ldots + y_q f_q}_{\in G} \in F + G.$$

  Donc $E = F \oplus G$.

COROLLAIRE 24.17 ♡ **Dimension d'une somme directe**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si E_1 et E_2 sont supplémentaires : $E = E_1 \oplus E_2$, alors

$$\boxed{\dim E = \dim E_1 + \dim E_2}.$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, il en est de même de ses deux sous-espaces supplémentaires* E_1 *et* E_2. *Posons* $n_1 = \dim E_1$ *et* $n_2 = \dim E_2$. *Il existe donc une base* $(e_1, \dots, e_{n_1})$ *de* E_1 *et une base* $(f_1, \dots, f_{n_2})$ *de* E_2. *D'après la proposition précédente,* $(e_1, \dots, e_{n_1}, f_1, \dots, f_{n_2})$ *est une base de* E *et est donc de cardinal* $n = \dim E$. *Par suite :* $\dim E_1 + \dim E_2 = n_1 + n_2 = n = \dim E$.

COROLLAIRE 24.18 ♡ **Existence d'un supplémentaire en dimension finie**

Soit E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F possède des supplémentaires dans E.

Démonstration *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Comme* E *est de dimension finie il en est de même de* F *et* F *possède donc une base* $(e_1, \dots, e_p)$ *où* $p = \dim F$. *D'après le théorème 24.10, on peut compléter cette base en une base* $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ *de* E *où* q *est un entier tel que* $p + q = \dim E$. *Posons* $G = \mathrm{Vect}(\{f_1, \dots, f_q\})$. *Montrons que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E. *La famille* $(f_1, \dots, f_q)$ *est libre comme sous-famille d'une famille libre et elle engendre* G *par construction. Donc c'est une base de* G. *Donc d'après le théorème 24.16, on sait que* $E = F \oplus G$.

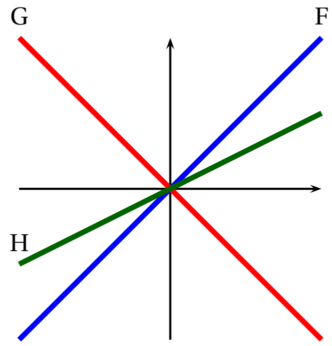

FIGURE 24.1 – Deux supplémentaires G et H d'un s.e.v F

⚠ *Attention 24.11* Il ne faut pas parler $\boxed{\textbf{du}}$ supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. Il en existe en général une $\boxed{\textbf{infinité}}$. Voir l'exercice 24.58 page 930.

THÉORÈME 24.19 ♡♡♡ **Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, formule de Grassmann**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Démonstration

Comme que $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E *et que* E *est de dimension finie,* $F \cap G$ *possède, par application de la proposition précédente, un supplémentaire* F' *dans* F. *Montrons que* F' *est un supplémentaire de* G *dans* $F + G$, *c'est-à-dire que* $F' \oplus G = F + G$.

- *Soit* $x \in F' \cap G$. *Comme* $F' \subset F$, $x \in F \cap G$ *et comme* F' *et* $F \cap G$ *sont supplémentaires,* $x = 0$. *Donc* $F' \cap G = \{0\}$.
- *Soit* $x \in F+G$. *Il existe donc* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *Comme* $x_1 \in F$, *il existe* $x_1' \in F'$ *et* $x_1'' \in F \cap G$ *tels que* $x_1 = x_1' + x_1''$. *Par conséquent :*

$$x = \underbrace{x_1'}_{\in F'} + \underbrace{\underbrace{x_1''}_{\in F\cap G} + \underbrace{x_2}_{\in G}}_{\in G}$$

et donc $x \in F' + G$. *Ce qui prouve que* $F' + G = F + G$.

On a prouvé que $F' \oplus G = F + G$. *D'après le théorème 24.17, on a :* $\dim(F+G) = \dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G$. *Mais comme* $F' \oplus F \cap G = F$, *on a aussi :* $\dim F' + \dim F \cap G = \dim F$ *et donc :* $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

COROLLAIRE 24.20 ♡ **Caractérisation des supplémentaires**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration

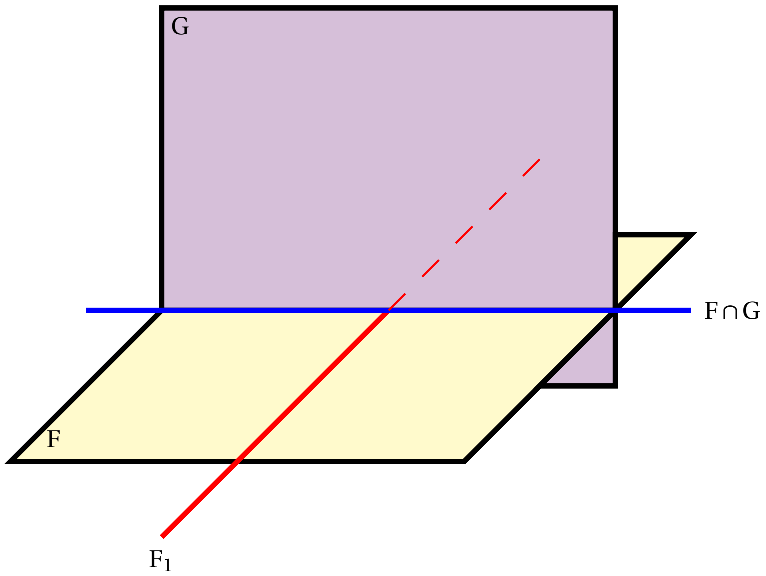

FIGURE 24.2 – Dimension de $F+G$: $F = F_1 \oplus (F\cap G)$ et $F+G = G\oplus F_1$

- 1 $\Longrightarrow$ 2 *Si* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*, il est clair que* $F\cap G = \{0\}$ *et, d'après la proposition 24.17, que :* $\dim F + \dim G = \dim E$.
- 2 $\Longrightarrow$ 3 *Il suffit de montrer que* $F+G=E$. *Mais d'après la proposition 24.19, on a :* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = \dim F + \dim G = n = \dim E$ *car* $F\cap G = \{0\}$. *Par conséquent, d'après la proposition 24.15, on a :* $F+G=E$.
- 3 $\Longrightarrow$ 1 *Il suffit de prouver que* $F\cap G=\{0\}$ *ce qui provient de :* $\dim F\cap G = \dim E - \dim F - \dim G = 0$.

Remarque 24.5 La formule de Grassmann permet de diviser par deux le travail à effectuer pour prouver une supplémentarité.

Exemple 24.12 Reprenons le second point de l'exemple 23.15 page 856. Dans l'espace $E=\mathbb{R}^3$, on considère la droite F donnée par le système $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0\end{cases}$ et le plan G d'équation $z=0$. Montrons que $E = F\oplus G$. On a déjà vu que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E. Le vecteur $(x,y,z)\in F\cap G$ si et seulement si $\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \\ z &= 0\end{cases}$ qui admet comme unique solution $(0,0,0)$. Donc $\dim(F\cap G) = 0$. De plus $\dim F + \dim G = 2+1 = \dim E$. On en déduit, d'après le corollaire précédent, que $E = F\oplus G$.

24.4 Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, on s'intéresse aux implications de la notion de dimension en ce qui concerne les applications linéaires.

24.4.1 Bases et applications linéaires

La proposition suivante permet de comprendre qu'une application linéaire entre un espace vectoriel de dimension n et un autre de dimension m est entièrement déterminée par une famille de mn scalaires. Cette famille de scalaires, rangée convenablement dans un tableau, forme ce qu'on appellera dans le prochain chapitre une matrice.

THÉORÈME 24.21 ♡ **Une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que :

H1 $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

H2 $f=\left(f_1,\dots,f_n\right)$ est une famille de vecteurs de F.

alors il existe une et une seule application linéaire $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ telle que :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=f_i\quad(\star)$$

Démonstration

- $\boxed{\text{Unicité}}$ *Soit $v:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ une autre application linéaire vérifiant $(\star)$. Prouvons que $u=v$. Soit $x\in\mathrm{E}$. Comme e est une base de E, il existe des scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathrm{K}$ tels que $x=\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k$. Par linéarité, on a :*

$$u(x)=u\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k u\left(e_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k f_k$$

et

$$v(x)=v\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k v\left(e_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_k f_k.$$

Par conséquent, $u(x)=v(x)$ et $u=v$.

- $\boxed{\text{Existence}}$ *On construit une application $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ satisfaisant $(\star)$ de la façon suivante. Soit $x\in\mathrm{E}$. Il existe un unique $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{k=1}^n\alpha_k e_k$. Posons alors $u(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_i f_i$. u est bien définie car le $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ associé à x est unique. u est de plus linéaire. Soit $x'=\sum_{k=1}^n\lambda'_k e_k$ et soient $\alpha,\alpha'\in\mathbb{K}$. On a $\alpha x+\alpha' x'=\sum_{k=1}^n\left(\alpha\lambda_k+\alpha'\lambda'_k\right)e_k$ et par définition de u :*

$$\begin{aligned}u\left(\alpha x+\alpha' x'\right)&=\sum_{k=1}^n\left(\alpha\lambda_k+\alpha'\lambda'_k\right)f_k\\&=\sum_{k=1}^n\alpha\lambda_k f_k+\sum_{k=1}^n\alpha'\lambda'_k f_k\\&=\alpha u(x)+\alpha' u\left(x'\right).\end{aligned}$$

On a de plus bien : $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad u\left(e_k\right)=f_k$.

Remarque 24.6 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $x\in\mathrm{E}$ et $y=f(x)$. On suppose que :

H1 $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

H2 $f=\left(f_1,\dots,f_m\right)$ est une base de F.

H3 Il existe une famille de scalaires $\left(\alpha_{ij}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,m]\!]}$ de $\mathbb{K}$ telle que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=\sum_{j=1}^m\alpha_{ij}f_j$.

H4 Dans la base e, $x=\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i$ et dans la base f, $y=\sum_{j=1}^m y_i\cdot f_j$

alors : $\forall j\in[\![1,m]\!],\quad y_j=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\cdot xi$. D'après la proposition, la famille de scalaire $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,m]\!]}$ caractérise complètement l'application linéaire u. Cette remarque est à la base de la théorie des matrices qu'on développera dans le prochain chapitre.

PROPOSITION 24.22 **Caractérisation vectorielle de l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire**

Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $f=\left(f_1,\dots,f_n\right)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ l'application linéaire tel que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=f_i$. On a :

1. u est injective si et seulement si f est libre.
2. u est surjective si et seulement si f est génératrice.

Démonstration ♡♡♡

1. *On a :*

$$\begin{aligned}u\text{ est injective}&\iff(\forall x\in\mathrm{E},\quad u(x)=0\implies x=0)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad u\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k e_k\right)=0\implies\lambda_1=\dots=\lambda_n=0\right)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad\sum_{k=1}^n\lambda_k u\left(e_k\right)=0\implies\lambda_1=\dots=\lambda_n=0\right)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad\sum_{k=1}^n\lambda_k f_k=0\implies\lambda_1=\dots=\lambda_n=0\right)\\&\iff f\text{ est libre}\end{aligned}$$

2 *On a :*

$$\begin{aligned}
u \text{ est surjective} &\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists x\in E:\quad f(x)=y\right)\\
&\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right)=y\right)\\
&\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k u\left(e_k\right)=y\right)\\
&\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k=y\right)\\
&\iff f \text{ est génératrice}
\end{aligned}$$

Remarque 24.7 C'est un excellent exercice que de refaire seul cette preuve.

24.4.2 Dimension et isomorphisme

PROPOSITION 24.23 ♡ **Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Démonstration

– $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* E *et* F *sont isomorphes. Alors il existe* $u\in\mathscr{L}(E,F)$ *bijective. Soit* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E*. Alors* $\mathscr{C}=(u(e_1),\dots,u(e_n))$ *est, d'après la proposition précédente :*
  - *libre car* u *est injective.*
  - *génératrice car* u *est surjective.*

  $\mathscr{C}$ *forme donc une base de* F *et* $\dim F=\operatorname{Card}\mathscr{C}=n=\dim E$.
– $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\dim F=\dim E=n$*, considérons* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E *et* $\mathscr{C}=\left(f_1,\dots,f_n\right)$ *une base de* F*. On définit une application linéaire* u *entre* E *et* F *en posant :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u\left(e_i\right)=f_i$*. Par application de la proposition précédente,* u *est :*
  - *injective car* $\mathscr{C}$ *est libre.*
  - *surjective car* $\mathscr{C}$ *est génératrice.*

  Par conséquent u *est un isomorphisme de* E *dans* F.

COROLLAIRE 24.24 ♡
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Démonstration *En effet, ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.*

COROLLAIRE 24.25 ♡
Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors $E_1\times E_2$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim\left(E_1\times E_2\right)=\dim E_1+\dim E_2}$$

Démonstration *Supposons que* $\dim E_1=n_1\in\mathbb{N}$ *et* $\dim E_2=n_2\in\mathbb{N}$*. Appliquant le corollaire précédent, on a :* $E_1\simeq\mathbb{K}^{n_1}=$ *et* $E_2\simeq\mathbb{K}^{n_2}$*. On montre facilement qu'alors :* $E_1\times E_2\simeq K^{n_1}\times\mathbb{K}^{n_2}=\mathbb{K}^{n_1+n_2}$*. Mais* $\dim\mathbb{K}^{n_1+n_2}=n_1+n_2$*. Par conséquent :* $\dim\left(E_1\times E_2\right)=n_1+n_2$.

24.4.3 Rang

DÉFINITION 24.8 ♡♡♡ **Rang d'une famille de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **rang** de la famille de vecteurs $\mathscr{F}=\left(e_1,\dots,e_p\right)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$. On notera : $\operatorname{rg}\mathscr{F}=\dim \mathrm{V}ect(\mathscr{F})$.

DÉFINITION 24.9 ♡♡♡ **Rang d'une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle **rang de l'application linéaire** $u\in\mathscr{L}(E,F)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$: $\operatorname{rg} u=\dim \mathrm{V}ect(\operatorname{Im} u)$.

PROPOSITION 24.26 ♡♡♡
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E,F)$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{rg} u=\operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_n))$.

Démonstration *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E. *On a* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))$. *En effet :*

$$\begin{aligned} y\in\operatorname{Im} u &\iff \exists x\in \mathrm{E}:\quad y=u(x)\\ &\iff \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad y=u\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)\\ &\iff \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u(e_k)\\ &\iff y\in\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))\end{aligned}$$

et $\operatorname{rg} u = \dim\operatorname{Im} u = \dim\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_n))$.

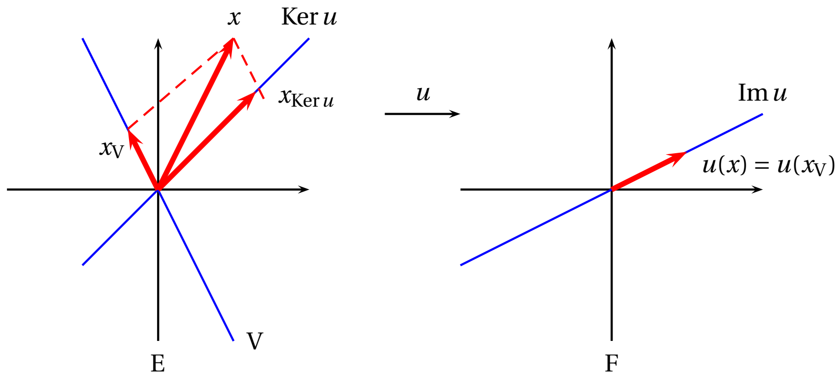

FIGURE 24.3 – Formule du rang : $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \mathrm{V}$ et $\mathrm{V} \approx \operatorname{Im} u$

THÉORÈME 24.27 ♡♡♡ **Formule du rang**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose que :

(H1) E est de dimension finie.

Alors on a la **formule du rang** :

$$\boxed{\dim \mathrm{E} = \dim\operatorname{Ker} u + \dim\operatorname{Im} u = \dim\operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u}$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, d'après la proposition 24.18,* $\operatorname{Ker} u$ *possède un supplémentaire* G. *Montrons que* G *et* $\operatorname{Im} u$ *sont isomorphes. Pour ce faire, montrons que* $u_{|\mathrm{G}}:\mathrm{G}\to\operatorname{Im} u$ *est un isomorphisme.*

– $u_{|\mathrm{G}}$ *est surjective : Soit* $y\in\operatorname{Im} u$. *Il existe* $x\in\mathrm{E}$ *tel que* $u(x)=y$. *Comme* $\mathrm{E}=\operatorname{Ker} u\oplus\mathrm{G}$, *il existe* $x_1\in\operatorname{Ker} u$ *et* $x_2\in\mathrm{G}$ *tels que :* $x=x_1+x_2$. *Comme* $u(x_1)=0$, *on a :* $y=u(x)=u(x_1+x_2)=u(x_1)+u(x_2)=u(x_2)$. *Par conséquent,* y *possède un antécédent pour* $u_{|\mathrm{G}}$ *dans* G. *et* $u_{|\mathrm{G}}$ *est surjective.*
– $u_{|\mathrm{G}}$ *est injective : Soit* $x\in\mathrm{G}$ *tel que* $u_{|\mathrm{G}}(x)=0$. *Alors* $x\in\operatorname{Ker} u$ *et donc* $x\in\mathrm{G}\cap\operatorname{Ker} u$. *Comme* $\mathrm{E}=\operatorname{Ker} u\oplus\mathrm{G}$, $x=0$ *et donc* $u_{|\mathrm{G}}$ *est injective.*

Par conséquent, G *et* $\operatorname{Im} u$ *sont isomorphes et, d'après la proposition 24.17, on a :* $\dim\operatorname{Im} u=\dim\mathrm{G}=\dim\mathrm{E}-\dim\operatorname{Ker} f$.

Remarque 24.8

– On montre dans cette preuve que $\operatorname{Im} u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. Il faut bien prendre garde qu'en général, si u est un endomorphisme, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires. Essayez par exemple de trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.
– La formule du rang permet de connaître la dimension du noyau (resp. de l'image) de u dés qu'on connaît la dimension de son image (resp. de son noyau). Là encore, on dispose d'un outil puissant qui va permettre de beaucoup simplifier les démonstrations.

⚠ *Attention 24.13* Il y a deux erreurs classiques à commettre en appliquant cette formule. La première, grossière, est de prendre pour E l'espace d'arrivée de u plutôt que son espace de départ. La seconde est d'oublier de vérifier que E est de dimension finie. En dimension infinie, la formule du rang n'a tout simplement pas de sens...En effet, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ peuvent être de dimension infinie.

Exemple 24.14 On considère l'application linéaire $u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z,x-z)\end{array}\right.$. Déterminons son image et son noyau.

– On sait que $\operatorname{Im} u = \{(x-y+z, x-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1,1) + y(-1,0) + z(1,-1) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (-1,0)$ et $f_3 = (1,-1)$. Trois vecteurs dans le plan sont nécessairement liés. Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. D'après le lemme de réduction d'une famille liée, on a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$. On vérifie que les vecteurs f_1 et f_2 forment une famille libre. On a donc montré que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im} u$ est de dimension 2. On remarque que comme $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ et que $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^2$ alors $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et u est surjective.
– On applique la formule du rang et on trouve que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$. Le noyau de u est alors une droite vectorielle et une base de cette droite est formée d'un seul vecteur. On vérifie que $(1,2,1) \in \operatorname{Ker} u$. Donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1,2,1)$.

COROLLAIRE 24.28 ♡ **Caractérisation des isomorphismes**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un isomorphisme.

Démonstration *On a :*
– *u est injective* $\implies \operatorname{Ker} u = \{0\} \implies \dim \operatorname{Ker} u = 0 \implies \dim \operatorname{Im} u = \dim E = n \implies$ *u est surjective* $\implies$ *u est un isomorphisme.*
– *u est surjective* $\implies \dim \operatorname{Im} u = \dim E = n \implies \dim \operatorname{Ker} u = 0 \implies \operatorname{Ker} u = \{0\} \implies$ *u est injective* $\implies$ *u est un isomorphisme.*

COROLLAIRE 24.29 ♡ **Caractérisation des automorphismes**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un automorphisme.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la dernière proposition.*

THÉORÈME 24.30 ♡ **Inverses à gauche et à droite**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. u est inversible à gauche si et seulement si il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$;
2. u est inversible à droite si et seulement si il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$;
3. u est inversible si et seulement si il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche }) \iff (u \text{ inversible à droite }) \iff (u \text{ inversible })$$

Démonstration *Supposons que u est inversible à gauche et montrons que u est bijective. Il existe donc $v \in L(E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Alors $v \circ u$ est bijective (c'est l'application identique !) et d'après le théorème 1.1 page 1141, on sait alors que u est injective. Mais d'après la proposition de caractérisation des automorphismes, u est bijective. On fait de même si u est inversible à droite.*

Remarque 24.9
– Là encore, on divise par deux le travail à réaliser pour montrer qu'une application linéaire $u \in L(E)$ est bijective. Dans le cas général, il faut exhiber une application $v \in L(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_E$. Si E est de dimension finie, il suffit de montrer que $u \circ v = \mathrm{id}_E$ ou que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
– Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit $\mathscr{S}$ l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift »à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$$

$$s_d : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$ et $s_d \circ s_g$.

24.5 Récurrences linéaires

On considère les suites de nombres réels ou complexes vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Des liens avec la résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ vont apparaître. Il est donc bon de revoir le théorème 5.13 p. 211.

24.5.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On considère l'espace vectoriel E des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 24.31
Soit $a, b,$ et $c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$.
L'ensemble F des suites de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration *Pour cela on considère* $\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ *avec* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.
On vérifie simplement que Φ *est un endomorphisme de* E. *On en déduit que* F, *en tant que noyau de* Φ, *est un sous-espace vectoriel de* E.

PROPOSITION 24.32
F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\leqslant 2$.

Démonstration *Soit* $\Psi : \begin{cases} \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$.
On vérifie simplement que Ψ *est linéaire. Maintenant,* Ψ *est injectif. En effet, soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}\Psi$, *on vérifie par une récurrence double (Théorème 8.3 p. 306)* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_n : u_n = 0$.
On a H_0 *et* H_1 *puisque* $u \in \operatorname{Ker}\Psi$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{H}_n \text{ et } \mathrm{H}_{n+1}) \Longrightarrow \mathrm{H}_{n+2})$ *puisque* $a \neq 0$.
On en déduit que F *est de dimension finie. Toute famille libre de* F *a pour image une famille libre de* $\mathbb{K}^2$ *puisque* Ψ *est injectif. Donc toutes les familles libres de* F *ont moins de deux éléments. C'est bien dire que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $\leqslant 2$.

24.5.2 Suites géométriques solutions

Comme pour les équations différentielles où l'on cherchait des solutions de la forme $x \longmapsto e^{rx}$, on va chercher des solutions sous la forme de suites géométriques. Là encore on va travailler dans $\mathbb{C}$ dans un premier temps.
On considère l'équation caractéristique

$$a\ r^2 + b\ r + c = 0.$$

Si r est une racine, alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F.

PROPOSITION 24.33
Soit $a, b,$ et $c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.
► Si r_1 et r_2 sont des racines distinctes de $a\ r^2 + b\ r + c = 0$, alors les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.
► Si r est une racines double de $a\ r^2 + b\ r + c = 0$, alors les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Dans les deux cas, F est un espace de dimension 2.

Démonstration ► *Dans le cas des racines distinctes, les deux suites géométriques ont pour image par* Ψ *respectivement* $(1, r_1)$ *et* $(1, r_2)$ *qui forment une famille libre de* $\mathbb{C}^2$. *Donc les deux suites géométriques forment une famille libre d'un espace de dimension au plus deux, donc c'est une base.*
► *Dans le cas d'une racine double, les deux suites ont pour image par* Ψ *respectivement* $(1, r)$ *et* $(0, r)$ *qui forment à nouveau une famille libre de* $\mathbb{C}^2$.

Exemple 24.15 On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$, elle admet deux racines distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc il existe deux complexes a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ar_1^n + br_2^n$. Les conditions initiales nous donnent $u_0 = 0 = a+b$ et $u_1 = 1 = ar_1 + br_2$. On résout ce système en (a, b) pour trouver

$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{Formule de Binet .}$$

24.6 Polynômes

Comme promis, nous revenons sur les polynômes en nous attachant plus à l'aspect espace vectoriel qu'à l'aspect anneau. Pour commencer, un rappel.

PROPOSITION 24.34 ♡ **Structure de** $\mathbb{K}[X]$
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

THÉORÈME 24.35 ♡ **Base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$
Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\boxed{(1, X, X^2, \dots, X^n)}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration
- *Montrons que* $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$. *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ *et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*Comme* $\mathbb{K}[X]$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\alpha P + \beta Q$ *est encore un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$. *Reste à montrer que ce polynôme est de degré* $\leqslant n$. *On a clairement :* $\deg(\alpha P) \leqslant \deg P \leqslant n$ *et* $\deg(\beta Q) \leqslant \deg Q \leqslant n$ *et appliquant le théorème 21.4, on a aussi* $\deg(\alpha P + \beta Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.
- *Montrons que la famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *est libre : soient* $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_0.1 + \alpha_1.X + \dots + \alpha_n.X^n = 0$. *Transcrivant cette égalité avec la notation initiale des polynômes, on a donc :* $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots) = (0, \dots, 0, 0, \dots)$ *et par identification :* $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ *ce qui prouve que la famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *est libre.*
- *Montrons que la famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$ *: Soit* $P \in \mathbb{K}_n[X]$. *Il existe* $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. *La famille* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ *engendre donc* $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 24.10 Nous avons démontré au passage que $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

PROPOSITION 24.36 ♡ **Famille échelonnée en degré**
Soit $\mathscr{S} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \deg(P_i) = i$$

alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration *Soit* $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ *une combinaison linéaire nulle de* (P_k). *Supposons les* λ_k *non tous nuls et considérons* p *le plus grand indice* i *pour lequel* $\lambda_k \neq 0$. *On aurait alors* $P_p = -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_p} P_i$. *Le membre de gauche est un polynôme de degré* p *et celui de droite un polynôme de degré* $\leqslant p-1$. *Contradiction. Donc la famille* $\mathscr{S}$ *est libre. Comme elle admet* $n+1$ *vecteurs dans un espace vectoriel de dimension* $n+1$*, elle est aussi génératrice. C'est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 24.11 La famille $\left(1, (X-a), \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\left(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\right)$ représente les composantes de P dans cette base.
C'est la formule de Taylor.

On démontre de même :

PROPOSITION 24.37 **Famille échelonnée en valuation**

- Soit $\mathscr{S} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{val}(P_i) = i$$

  alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Soit $\mathscr{S} = (P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{val}(P_i) = i$$

alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

En résumé

Ce chapitre doit être parfaitement maîtrisé, il contient différentes notions fondamentales en algèbre linéaire :

1. Familles libres, liées, génératrices.
2. Bases.
3. Théorème de la base incomplète.
4. Dimension.
5. Formule de Grassmann.
6. Formule du rang.
7. Image d'une base par une application linéaire.

Les démonstrations vous sembleront sans doute difficiles dans un premier abord mais là encore, petit à petit, vous allez vous les approprier et vous comprendrez au final qu'elles sont pour la plupart très naturelles. Il est important de bien les assimiler et de savoir les refaire car les techniques utilisées re-serviront.

24.7 Exercices

24.7.1 Famille libre, Famille liée, Famille génératrice

Exercice 24.1 ♡

Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants :

1. $u = (1,0,1)$, $v = (1,-2,3)$, $w = (1,2,-1)$.
2. $u = (1,2,-2)$, $v = (2,0,-1)$, $w = (1,-2,1)$.

Solution :

1. $w = 2u - v$.
2. $v = u + w$

Exercice 24.2 ♡

Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, montrer que la famille* (f,g,h) *est liée où* $f : x \mapsto 1$*,* $g : x \mapsto \cos^2 x$*,* $h : x \mapsto \cos 2x$*.*

Solution : *D'après la trigonométrie, on a* $h = 2g - f$*.*

Exercice 24.3 ♡

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liées ou libres :

1. $u = (1,2)$, $v = (3,1)$, $w = (5,1)$.
2. $u = (-1,0,2)$, $v = (1,2,1)$, $w = (0,1,1)$.
3. $u = (10,-1,-4,10)$, $v = (1,0,1,-2)$.

Solution :

1. *u et v ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. $\mathbb{R}^2$ étant de dimension 2, cette famille est une base de $\mathbb{R}^2$ et nécessairement la famille (u,v,w) est liée.*
2. *On vérifie facilement que la famille (u,v,w) est libre.*
3. *Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre.*

Exercice 24.4 ♡

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. A quelle condition les trois vecteurs $(1,a,b),(0,1,c),(0,0,1)$ forment-ils une famille libre dans $\mathbb{R}^3$?

Solution : *Soit $(\lambda,\mu,\delta) \in \mathbb{R}^3$ tels que*

$$\lambda(1,a,b) + \mu(0,1,c) + \delta(0,0,1) = (0,0,0)$$

On en tire $\lambda = 0$, $a\lambda + \mu = 0$ et $b\lambda + c\mu + \delta = 0$, ce qui donne $\lambda = \mu = \delta = 0$. Par conséquent, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la famille est libre.

Exercice 24.5 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient e_1, e_2, e_3 des vecteurs de E tels que la famille (e_1,e_2,e_3) est libre. Posons : $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_3$. Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3) est libre.

Solution : *Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i = 0$. On a alors : $\alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_2 + e_3) + \alpha_3(e_1 - e_3) = 0$ ce qui s'écrit aussi : $(\alpha_1 + \alpha_3)e_1 + (-\alpha_1 + \alpha_2)e_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)e_3 = 0$. La famille (e_1,e_2,e_3) étant libre, cette égalité n'est possible que si* $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$*. L'unique solution de ce système est le triplet $(0,0,0)$. La famille (f_1,f_2,f_3) est donc libre.*

Exercice 24.6 ♡

Prouver que la famille $(\sin,\cos)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solution : *Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\sin + \beta\cos = 0$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\quad \alpha\sin x + \beta\cos x = 0$. En particulier, si $x = 0$, on obtient : $\beta = 0$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha = 0$. Il vient alors que $\alpha = \beta = 0$. La famille $(\sin,\cos)$ est donc libre et elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, c'est-à-dire un plan vectoriel.*

Exercice 24.7 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathscr{F}([0,2\pi],\mathbb{R})$*, on considère les quatre fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos x \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin x \end{array} \right.$$

Prouver que la famille $\left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$ *est libre.*

Solution :
Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ *tel que* $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \alpha_3 \cdot f_3 + \alpha_4 \cdot f_4 = 0$*. On a donc :*

$$\forall x \in [0,2\pi], \quad \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \alpha_3 \cdot f_3(x) + \alpha_4 \cdot f_4(x) = 0,$$

en particulier, remplaçant x *par* $x=0$ *puis* $x=\pi$*, on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\pi = 0 \end{cases}$ *puis remplaçant* x *par* $x = \frac{\pi}{2}$ *puis* $x = \frac{3\pi}{2}$*, on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \frac{3\pi}{2}\alpha_4 = 0 \end{cases}$ *d'où* $\forall i \in [\![1,4]\!], \quad \alpha_i = 0$.

Exercice 24.8 ♡

Soient $r, \omega \in \mathbb{R}$ *tels que* $\omega \neq 0$*. Dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, on considère les deux vecteurs* f_1 *et* f_2 *définis par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^{rx}\sin\omega x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{rx}\cos\omega x.$$

Démontrer que la famille $\left(f_1, f_2\right)$ *est libre.*

Solution : *Soient* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = 0$*. Cette égalité s'écrit aussi :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 e^{rx}\cos\omega x + \mu_2 e^{rx}\sin\omega x = 0$*. Pour* $x = 0$*, on obtient :* $\mu_1 = 0$ *et pour* $x = \frac{\pi}{2\omega}$*, on a :* $\mu_2 = 0$*. Le couple* $\left(\mu_1,\mu_2\right)$ *est donc nul et la famille* $\left(f_1, f_2\right)$ *est bien libre.*

Exercice 24.9 ♡

Pour tout $a \in \mathbb{R}$*, considérons l'application*

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array} \right. .$$

Montrer que la famille $\left(f_0, f_1, f_2\right)$ *est une famille libre dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solution : *Soient* $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\sum_{k=0}^{2} \alpha_i f_i = 0$*. On a donc :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0|x| + \alpha_1|x-1| + \alpha_2|x-2| = 0$*. En prenant successivement* $x = 0, 1$ *et* 2 *dans cette égalité, on aboutit au système :* $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 = 0 \end{cases}$ *dont l'unique solution est* $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) = (0,0,0)$*. La famille* $\left(f_0, f_1, f_2\right)$ *est bien libre.*
Autre solution : On suppose $\alpha_0 \neq 0$ *et on a* $|x| = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1|x-1| + \alpha_2|x-2|\right)$*. Or cette égalité est impossible car le membre de droite est dérivable en zéro et le membre de gauche ne l'est pas. Donc* $\alpha_0 = 0$*. On démontre de même que* $\alpha_1 = 0$ *et* $\alpha_2 = 0$.

Exercice 24.10 ♡

Les familles de fonctions suivantes sont-ils libres dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *?*

1. $(f_1,\dots,f_n)$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\forall k \in [1,n]$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x+k} \end{array} \right.$$

2. (f_1, f_2, f_3) *où* $\forall k \in [1,3]$,

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-k)^2 \end{array} \right.$$

3. (f_1, f_2, f_3, f_4) *où* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ *et* $f_4(x) = e^x$.

Solution :

1. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e.e^{x+1} - e^{x+2} = 0$, on en déduit que (e^{x+1}, e^{x+2}) est lié, donc la famille est lié.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)^2 + b(x-2)^2 + c(x-3)^2 = 0$$
alors puisque ce polynôme est nul, les coefficients de $x^2, x, 1$ du polynôme et de ses dérivées doivent être nuls. On en tire
$$a+b+c = a+2b+3c = a+4b+9c = 0 \implies a = b = c = 0$$
Par conséquent, la famille est libre.
3. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a + bx + cx^2 + de^x = 0$$
On doit avoir $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$d + (a + bx + cx^2)e^{-x} = 0$$
et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient que $d = 0$. En factorisant ensuite par x^2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve que $c = 0$. Ensuite de même $b = 0$ et enfin $a = 0$. La famille est libre.

Exercice 24.11 ♡

On considère l'espace des suites complexes $\mathrm{E} = \mathscr{S}(\mathbb{C})$, et deux complexes $(k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ distincts. On note u la suite géométrique de raison k_1 et v la suite géométrique de raison k_2. Montrer que la famille $\mathrm{S} = (u, v)$ est libre dans E.

Solution : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\lambda u + \mu v = 0_{\mathrm{E}}$. En examinant les deux premiers termes de cette suite, on trouve que :
$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda k_1 + \mu k_2 & = 0 \end{cases}$$
et en résolvant ce système, que $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 24.12 ♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille de vecteurs $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{E}^n$ libre. On définit les vecteurs
$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_n = a_1 + \dots + a_n$$
Montrer que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre.

Solution : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0_{\mathrm{E}}$$
Alors
$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)a_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)a_{n-1} + \lambda_n a_n = 0$$
Comme $(a_1, \dots, a_n)$ est libre, on tire que
$$\lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_n + \dots + \lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$$
et par conséquent que tous les λ_k sont nuls.

Exercice 24.13 ♡♡

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère ensuite l'application
$$\varphi_k : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f^{(k)}(0) \end{cases} \qquad (k \in [\![1, n]\!])$$
Montrer que l'application φ_k est linéaire, puis que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre dans l'espace $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.

Solution : On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il est aussi facile de montrer que les applications φ_k sont linéaires. Montrons ensuite que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})}$$
En appliquant cette application linéaire à la fonction $\theta_k : x \mapsto x^k \in \mathrm{E}$, on trouve que
$$\lambda_k k! = 0$$
(car $[x^k]^{(p)}(0) = k!$ si $p = k$ et $[x^k]^{(p)}(0) = 0$ si $p \neq k$. On en déduit donc que $\forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$.

Exercice 24.14 ♡♡

Soit $f_k(t) = e^{kt}$. Montrer que $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution : *Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^x + \dots + \lambda_n e^{nx} = 0.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n e^{(n-1)x} = 0 \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

et $\lambda_1 = 0$. On recommence avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_2 e^x + \dots + \lambda_{n-1} e^{(n-1)x} = 0$$

ce qui donne $\lambda_2 = 0$ et ainsi de suite, on montre que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls. La famille est donc libre.

Exercice 24.15 ♡♡

Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $\mathrm{S} = (x \to 1, x \to \operatorname{ch} x, x \to \operatorname{ch} 2x, \dots, x \to \operatorname{ch} nx)$ est libre.

Solution : *Au voisinage de $+\infty$, on a l'équivalent $\operatorname{ch} nx = \dfrac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} = \dfrac{e^{nx}}{2}\left(1 + e^{-2nx}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{nx}}{2}$ car $1 + e^{-2nx} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{ch} x + \dots + \alpha_n \operatorname{ch} nx = 0$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 e^{-nx} + \alpha_1 \operatorname{ch}(x) e^{-nx} + \dots + \alpha_n \operatorname{ch}(nx) e^{-nx} = 0.$$

En vertu de l'équivalent, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{ch}(kx) e^{-nx} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{(k-n)x}/2$ et

$$\operatorname{ch}(kx) e^{-nx} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ 1/2 & \text{si } k = n \end{cases}.$$

Donc la somme précédente ne tend vers 0 que si $\alpha_n = 0$. On répète n fois ce raisonnement et on montre que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$. La famille S est bien libre.

Exercice 24.16 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre. Les familles

$$\mathrm{S} = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$$

$$\mathrm{T} = (u_1 + u_2, \dots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$$

sont-ils libres ?

Solution : *La famille S est liée car*

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

Pour la famille T : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\lambda_1(u_1 + u_2) + \dots + \lambda_n(u_n + u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, il vient que

$$\lambda_1 + \lambda_n = 0_{\mathrm{K}}, \quad \lambda_2 + \lambda_1 = 0_{\mathrm{K}}, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0_{\mathrm{K}}$$

Par conséquent,

$$\lambda_1 = (-1)^{i-1} \lambda_i = (-1)^n \lambda_1.$$

Si n est impair, $2\lambda_1 = 0_{\mathrm{K}}$ et donc $\lambda_1 = 0$, puis alors tous les coefficients sont nuls. Si n est impair, T est une famille libre. Si par contre n est pair, on vérifie que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} (u_i + u_{i+1}) + (-1)^{n-1} (u_n + u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

et donc T est lié.

Exercice 24.17 ♡♡

Dans l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on considère les fonctions définies par* $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *la famille* $\mathrm{S} = (f_1,\dots,f_n)$ *est libre. On calculera d'abord pour* $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, *l'intégrale :*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_{pq},$$

où $\delta_{pq} = 1$ *si* $p = q$ *et est nul sinon.*

Solution : *Soit* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. *On utilise la trigonométrie. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\sin(px)\sin(qx) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((p-q)x\right) - \cos\left((p+q)x\right)\right)$$

donc si $p \neq q$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{p-q}\sin\left((p-q)x\right) - \frac{1}{p+q}\sin\left((p+q)x\right)\right]_0^{2\pi} = 0$$

et si $p = q$ *alors*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\left((p+q)x\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{p+q}\sin\left((p+q)x\right)\right]_0^{2\pi} = 1.$$

Montrons que S *est libre. Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$. *Soit* $k \in [\![1,n]\!]$. *Par linéarité de l'intégrale, on a :*

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(x)\,f_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{ki} = \alpha_k.$$

et ce pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. *On en déduit que* S *est libre.*

24.7.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Exercice 24.18 ♡

Vérifier si les vecteurs suivants forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ *:*

$$u_1 = (0,1,1)\,,\quad u_2 = (1,-1,0)\,,\quad u_3 = (1,0,2)\quad \text{et}\quad u_4 = (1,-1,2)$$

Solution : *La famille* (u_1,u_2,u_3) *est libre. En effet, si* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ *alors on a :* $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$ *ce qui amène* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *Comme* $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, *cette famille engendre* $\mathbb{R}^3$ *et il en est donc de même de la famille* (u_1,u_2,u_3,u_4)

Exercice 24.19 ♡

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *engendré par les familles de vecteurs* (u_1,u_2,u_3,u_4) *avec :*

1. $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,1)$, $u_4 = (1,0,0,1)$
2. $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (1,1,2,0)$, $u_3 = (0,1,1,1)$, $u_4 = (0,1,0,1)$
3. $u_1 = (1,-1,1,-1)$, $u_2 = (1,1,2,-2)$, $u_3 = (3,-1,4,-4)$, $u_4 = (0,-2,-1,1)$.

Solution :

1. *Soient* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$ *tels que* $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = 0$. *les scalaires* α_i *vérifient alors le système :* $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$.
   On a une solution non nulle : $(1,1,-1,-1)$. *La famille est donc liée et engendre un espace de dimension au plus* 3. *On vérifie que* (u_1,u_2,u_3) *est libre. Dans le système précédent on fait* $\alpha_4 = 0$. *On trouve alors* $\alpha_1 = 0$ *puis* $\alpha_3 = 0$ *et* $\alpha_2 = 0$. *Donc la famille* (u_1,u_2,u_3,u_4) *engendre un espace de dimension* 3.
2. *On vérifie que* $u_4 = u_1 - u_2 + u_3$. *On montre de la même façon que précédemment que la famille* (u_1,u_2,u_3) *est libre. Donc* $\dim \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = 3$.
3. *On a :* $u_3 = 2u_1 + u_2$ *et* $u_4 = u_1 - u_2$. *Les vecteurs* u_1 *et* u_2 *ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre. Par suite* $\dim\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \dim\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = 2$.

24.7.3 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 24.20 ♡

Posons $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (0,1,1)$. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

> ***Solution :*** *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. Alors $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est solution du système $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \#e$, la famille e est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 24.21 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose :

$$f_1 = e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_3 - e_1, \quad f_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E

> ***Solution :*** *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$. Alors $\alpha_1 (e_2 + 2e_3) + \alpha_2 (e_3 - e_1) + \alpha_3 (e_1 + 2e_2) = 0$ et $(\alpha_3 - \alpha_2) e_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) e_2 + (2\alpha_1 + \alpha_2) e_3 = 0$. Comme la famille e est libre, le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est solution du système $\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \#e$, la famille e est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 24.22 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On pose :

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que (f_1, f_2) est libre et compléter cette famille en une base de E.

> ***Solution :*** *Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment une famille libre. On vérifie en procédant comme dans l'exercice précédent que la famille (e_2, f_1, f_2) est libre et forme donc une base de E.*

Exercice 24.23 ♡

1. *Montrer que les vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (-1,2)$ et $f_3 = (-3,5)$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Exprimer un vecteur quelconque u de coordonnées (x, y) dans la base canonique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Cette décomposition est-elle unique ?*

> ***Solution :***
>
> 1. *Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ la famille $f = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Elle engendre donc $\mathbb{R}^2$ et il en est alors de même de la famille (f_1, f_2, f_3).*
> 2. *Introduisons les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. D'après ce qui précède, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u = xe_1 + ye_2 = af_1 + bf_2 + cf_3$. Le triplet (a, b, c) est solution du système $\begin{cases} a - b - 3c = x \\ 2a + 2b + 5c = y \end{cases}$. Ce système admet une infinité de solutions et la décomposition recherchée n'est pas unique. Une d'entre elles est donnée par exemple par $a = x/2 + y/4$, $b = -x/2 + y/4$ et $c = 0$.*

Exercice 24.24 ♡

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de ce même vecteur dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs :

$$\varepsilon_1 = (1,1,0), \quad \varepsilon_2 = (1,0,1), \quad \varepsilon_3 = (0,1,1).$$

> ***Solution :*** *On vérifie facilement que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il existe donc des scalaires y_1, y_2, y_3 tels que : $u = (x_1, x_2, x_3) = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3$. En remplaçant les vecteurs ε_i par leurs expressions, on obtient le système : $\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1 \\ y_1 + y_3 = x_2 \\ y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$ qui amène : $y1 = \dfrac{x_2 - x_3 + x_1}{2}$, $y2 = \dfrac{-x_2 + x_3 + x_1}{2}$, $y_3 = \dfrac{x2 + x3 - x1}{2}$*

Exercice 24.25 ♡

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (-1,1,1), \quad v = (1,-1,1), \quad w = (1,1,-1) \quad \text{et} \quad x = (2,-3,1).$$

1. *Prouver que la famille (u,v,w) forme une base $\mathbb{R}^3$.*
2. *Quelles sont les coordonnées de x dans cette base ?*

Solution :

1. *Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0$. Le triplet $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ est solution du système : $\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}$ et donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. La famille (u,v,w) est bien libre. Comme $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *La famille (u,v,w) étant une base de E, il existe $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$. Le triplet (x_1,x_2,x_3) est donc solution du système $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ x_1-x_2+x_3 &= -3 \\ x_1+x_2-x_3 &= 1 \end{cases}$. En le résolvant, on trouve $x_1=-1$, $x_2=3/2$ et $x_3=-1/2$. Les coordonnées de x dans la base (u,v,w) sont donc : $\boxed{(-1,3/2,-1/2)}$*

Exercice 24.26 ♡

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(1,1,0,1)$ et $e_3=(0,0,0,1)$.

1. *Quelle est la dimension de E ?*
2. *Compléter cette famille en sorte d'avoir une base de $\mathbb{R}^4$.*

Solution :

1. *Comme $e_3 = e_2 - e_1$, la famille e n'est pas libre. Par contre, comme les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, (e_1,e_2) forme une famille libre qui engendre encore E par le lemme de diminution d'une famille liée. On complète la base par des vecteurs de la base canonique.*
2. *Une solution peut être de compléter la famille (e_1,e_2) avec les vecteurs $f_1=(1,0,0,0)$ et $f_2=(0,0,1,0)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On montre facilement que la famille $\left(e_1,e_2,f_1,f_2\right)$ est libre. Comme $\dim\mathbb{R}^4=4$, elle forme une base de $\mathbb{R}^4$.*

Exercice 24.27 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère les deux vecteurs $f_1=(0,1,2,1)$ et $f_2=(3,0,1,1)$. Trouver deux vecteurs f_3,f_4 tels que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution : *Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires donc la famille $\mathrm{S}_1=(f_1,f_2)$ est libre. On considère la base canonique $e=(e_1,\dots,e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que $\mathrm{S}_2=(f_1,f_2,e_1,e_2)$ est libre. Finalement, puisque $\dim\mathbb{R}^4=4$, et que l'on a trouvé une famille libre de cardinal 4, S_2 est une base.*

Exercice 24.28 ♡

1. *Prouver que $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.*
2. *De même, prouver que $\left(1,j\right)$ est une base de $\mathbb{C}$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*
3. *Donner une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.*

Solution :

1. *Pour tout nombre complexe z, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $z=a\times1+b\times i$. La famille $(1,i)$ est donc génératrice de $\mathbb{C}$. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\times1+b\times i=0$. On a alors forcement $a=b=0$. La famille $(1,i)$ est donc libre. La famille forme une base de $\mathbb{C}$. On en déduit que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.*
2. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a.1+b.j=0$. On a alors : $a\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right)+ib\sin\frac{2\pi}{3}$ ce qui amène $a=b=0$. La famille $\left(1,j\right)$ est donc libre dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est de dimension 2, $\left(1,j\right)$ engendre $\mathbb{C}$. $\left(1,j\right)$ est donc une base de $\mathbb{C}$.*
3. *La famille (1) forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Cette famille est trivialement libre. Si $z\in\mathbb{C}$ alors $z=z.1$! Et donc la famille (1) est génératrice de $\mathbb{C}$. C'est donc une base de $\mathbb{C}$ et C est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.*

Exercice 24.29 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$*. Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*, on pose* $\varepsilon_i = e_1 + \dots + e_i$*.*

1. *Montrer que* $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *forme une base de* E*.*
2. *Exprimer les composantes d'un vecteur de* E *dans* ε *en fonction de ses composantes dans* e*.*

Solution :

1. *Soit* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i = 0$*. On a alors*
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\, e_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_n)\, e_2 + \dots + +\alpha_n e_n = 0$$
qui conduit, de part la liberté de e*, à :*
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \alpha_n = 0 \end{cases}$$
et donc $\alpha_n = \dots = \alpha_1 = 0$*.*
2. *Soit* $x \in \mathrm{E}$*. On a* $x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 \varepsilon_1 + \dots \alpha'_n \varepsilon_n$*. On a donc :*
$$\begin{cases} \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n = \alpha_1 \\ \qquad \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n = \alpha_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \alpha'_n = \alpha_n \end{cases}$$
ce qui amène :
$$\begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \quad \vdots \\ \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha'_n = \alpha_n \end{cases}$$
et $\boxed{x = (\alpha_1 - \alpha_2)\, e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)\, e_2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\, e_{n-1} + \alpha_n e_n}$.

Exercice 24.30 ♡♡

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*
2. *Montrer que*
$$\mathrm{E} = \left\{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}, (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3 \right\}$$
est un $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*
3. *Trouver une base de* E*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel vérifie les axiomes définissant un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel*
2. *Pour répondre à la question, il suffit de montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*.* E *est clairement non vide et si* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$*,* $u = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \in \mathrm{E}$ *et* $u' = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} \in \mathrm{E}$ *alors* $\alpha u + \alpha' u' = \alpha\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right) + \alpha'\left(a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}\right) = \left(\alpha a + \alpha' a'\right) + \left(\alpha b + \alpha' b'\right)\sqrt{2} + \left(\alpha c + \alpha' c'\right)\sqrt{3} \in \mathrm{E}$*. L'ensemble* E *est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*. On peut aussi remarquer que* $\mathrm{E} = \mathrm{V}ect\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$*.*
3. *Montrons que la famille* $e = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ *est une base de* E*. Elle engendre clairement* E*. Soient* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *tels que* $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$*. Alors* $c\sqrt{3} = -\left(a + b\sqrt{2}\right)$ *et en élevant au carré* $3c^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$*.*
   (a) *Si* a *et* b *sont nuls, on a forcément* $c = 0$*.*
   (b) *Si* $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *alors* $3c^2 = 2b^2$ *et* $c/b = \pm\sqrt{2/3}$ *ce qui n'est pas possible car* $c/b \in \mathbb{Q}$*.*
   (c) *Si* $a \neq 0$ *et* $b = 0$ *alors* $3c^2 = a^2$ *et* $c/a = \sqrt{3}/3$ *ce qui n'est pas possible pour la même raison que précédemment.*
   (d) *Si* $a, b \neq 0$ *alors* $\sqrt{2} = \left(3c^2 - a^2 - 2b^2\right)/2ab$ *ce qui n'est pas possible car* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*.*

   En conclusion, $a = b = c = 0$ *et la famille est libre. On a ainsi trouvé une base de* E *qui est de dimension* 3*.*

Exercice 24.31 ♡♡

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré* $\leqslant n$. *Soit* $\mathscr{F} = (P_0,\dots,P_n)$ *une famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *telle que :*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \deg P_i = i.$$

Prouver que $\mathscr{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, *supposons que que* $P_k = \lambda_k X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i,k} X^i$. *Comme* $\deg P_k = k$, *on a nécessairement* $\lambda_k \neq 0$. *Soient* $\alpha_0,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. *Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on aboutit au système :*

$$\begin{cases} \lambda_0\alpha_0 + \lambda_{0,1}\alpha_1 + \lambda_{0,2}\alpha_2 & + \dots & + \lambda_{0,n}\alpha_n = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_{1,2}\alpha_2 & + \dots & + \lambda_{1,n}\alpha_n = 0 \\ & \dots & \\ & \lambda_{n-1}\alpha_{n-1} + & \lambda_{n-1,n}\alpha_n = 0 \\ & & \lambda_n\alpha_n = 0 \end{cases}$$

qui est triangulaire, et comme $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_k \neq 0$, *son unique solution est le* $n+1$*-uplet nul. Il vient :* $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ *et la famille* $\mathscr{F}$ *est libre. Comme elle est de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{F}$ *est de plus génératrice de* $\mathbb{R}_n[X]$. *On en déduit qu'elle forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.32 ♡♡

Montrer $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *sont de dimension infinie.*

Solution : *Pour le premier cas, on considère pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $e(n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *qui s'annule à tous les rangs sauf au rang* n *où elle vaut* 1. *On considère aussi pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *la famille de suites* $E_m = (e(0),\dots,e(m))$. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *cette famille est libre. En effet, si* $\alpha_0,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $\alpha_0 e(0) + \dots + \alpha_m e(m) = 0$ *alors on obtient* $(\alpha_0,\dots,\alpha_m,0,\dots) = (0,\dots)$ *et donc que* $\alpha_0 = \dots = \alpha_m = 0$. *Supposons que* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *soit de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$. *La famille* E_n *est libre et de cardinal* $n+1$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *est de dimension infinie.*
Pour le second cas, on procède de même en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$ *les fonctions* f_n *définies sur* $\mathbb{R}$ *qui valent* 0 *si* $x \neq n$ *et qui valent* 1 *si* $x = n$.

24.7.4 Sous-espace vectoriel de dimension finie

Exercice 24.33 ♡

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. *Prouver que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$, *en déterminer une base et calculer sa dimension.*

Solution : *Comme* $F = \{(y-2z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$, F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *La famille* $((1,1,0),(-2,0,1))$ *engendre* F *et les deux vecteurs la constituant n'étant pas colinéaire, elle est libre. Cette famille forme donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.34 ♡

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad -x - y + z = 0\}$.

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Trouver une base de* F. *En déduire* $\dim F$.

Solution : *On a :* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ *donc* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad -x - y + z = 0\} = \{(0,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(0,1,1)$. F *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et la famille constituée du vecteur* $(0,1,1)$ *en forme une base. On en déduit que* $\dim F = 1$. *Le sous-espace* F *est la droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$ *dirigée par* $(0,1,1)$.

Exercice 24.35 ♡

Montrer que le sous-ensemble

$$F = \{(\alpha+\beta, \beta, 2\alpha - \beta, -\alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *dont on déterminera la dimension et une base.*

Solution : *Comme* $F = \{(\alpha+\beta,\beta,2\alpha-\beta,-\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,2,-1) + \beta(1,1,-1,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ *où* $e_1 = (1,0,2,-1)$ *et* $e_2 = (1,1,-1,0)$. *On en déduit que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$. *De plus, les vecteurs* e_1 *et* e_2 *ne sont pas colinéaires et ils engendrent* F. *Ils forment donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.36 ♡

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble

$$F := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 0\}$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et en déterminer une base.*

Solution : *Comme* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \mid 2x - y + 3z + t = 0\} = \{(x, 2x+3z+t, z, t) \mid x,z,t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{V}ect\,((1,2,0,0),(0,3,1,0),(0,1,0,1))$. *Donc* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$. *La famille* (e_1,e_2,e_3) *où* $e_1 = (1,2,0,0)$, $e_2 = (0,3,1,0)$ *et* $e_3 = (0,1,0,1)$ *engendre* F. *Montrons qu'elle est libre. Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. *Le triplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *vérifie* $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ *et donc* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *La famille est bien libre. Alors* (e_1,e_2,e_3) *est une base de* F *et* $\dim F = 3$.

Exercice 24.37 ♡

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Trouver une famille génératrice de* F.
3. *En déduire une base de* F *puis la dimension de* F.

Solution :

1. *On a :* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\} = \{(x,y,z,2x-y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0,2) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{V}ect\,(e_1,e_2,e_3)$ *où* $e_1 = (1,0,0,2)$, $e_2 = (0,1,0,-1)$ *et* $e_3 = (0,0,1,1)$. *On en déduit à la fois que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *ainsi qu'une famille génératrice de* F.
2. *On vérifie facilement que la famille* (e_1,e_2,e_3) *est libre. On en déduit que cette famille forme une base de* F *et donc que* $\dim F = 3$.

Exercice 24.38 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, *on considère le sous-espace vectoriel* $F = \mathrm{V}ect\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ *où* $v_1 = (1,2,3,1)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (0,0,1,2)$, $v_4 = (2,5,6,1)$ *Trouver une base du sous-espace vectoriel* F.

Solution : *On remarque que* $v_4 = 2v_1 + v_2 - v_3$. *Donc la famille est liée et d'après le lemme de réduction d'une famille liée,* $F = \mathrm{V}ect\,(v_1,v_2,v_3)$. *On montre facilement que la famille* (v_1,v_2,v_3) *est libre et forme donc une base de* F. *Il s'ensuit que* $\dim F = 3$.

Exercice 24.39 ♡

On note E *l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit un réel* $a \in \mathbb{R}$. *On note* F *l'ensemble des fonctions* f *vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x)$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E *et déterminer une base de* F.

Solution : *On applique le théorème de résolution des équations différentielles homogène du premier degré sans second membre et les fonctions* f *solutions de* $y' - ay = 0$ *sont celles de la forme* $f : x \mapsto \alpha e^{ax}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On en déduit que* $F = \mathrm{V}ect\,(x \mapsto \exp(ax))$ *et que c'est un sous-espace vectoriel de* E. *Il est alors clair que la famille* $(x \mapsto \exp(ax))$ *forme une base de* F *et que* $\dim F = 1$.

Exercice 24.40 ♡

Montrer que $F = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *et en déterminer une base. En déduire la dimension de* F.

Solution : *En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, on trouve que* $F = \{x \mapsto (\alpha\cos x + \beta\sin x)e^{-x} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. *Autrement dit :* $F = \mathrm{V}ect\,(f_1,f_2)$ *où* $f_1 : x \mapsto \cos x e^{-x}$ *et* $f_2 : x \mapsto \sin x e^{-x}$. *La famille* (f_1,f_2) *engendre* F. *On vérifie facilement qu'elle est libre. Elle forme donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.41 ♡

Montrer $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et en déterminer une base ainsi que la dimension.*

Solution : *Les polynômes de* F *sont de degré* $\leqslant 4$ *et s'annulent en* 1 *et* 2*. Par conséquent, ils sont de la forme* $\left(a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c\right)(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$*. Il s'ensuit que* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *où* $\mathrm{P}_1=\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2),\mathrm{P}_2=\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2),\mathrm{P}_3=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$*. On en déduit que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$*. On vérifie facilement que la famille* $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *est libre. Si* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *sont trois réels tels que* $\alpha_1\mathrm{P}_1+\alpha_2\mathrm{P}_2+\alpha_3\mathrm{P}_3=0$ *alors par intégrité de l'anneau des polynômes,* $\alpha_1\mathrm{X}^2+\alpha_2\mathrm{X}+\alpha_3=0$ *ce qui n'est possible que si* $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$*. La famille* $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *forme donc une base de* F*.*

Exercice 24.42 ♡

Soit F *l'ensemble des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telles qu'il existe* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *pour lesquels :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*
2. *Déterminer une base de* F *ainsi que sa dimension.*

Solution :

1. F *est engendré par la famille* $\left(x\mapsto x^2\sin x, x\mapsto x\sin x, x\mapsto \sin x\right)$*. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*
2. *Une base de* E *est donnée par la famille précédente : Soient* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tels que :* $\forall x\in\mathbb{R}, \alpha x^2\sin x+\beta x\sin x+\gamma\sin x=0$*, alors* $\forall x\not\equiv 0\,[\pi],\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$*. Un polynôme du second degré est soit identiquement nul, soit ne s'annule au plus que deux fois. Donc* $\alpha=\beta=\gamma=0$*. La famille est donc libre. Elle est, par définition génératrice et forme donc une base de* F *qui est alors un sous-espace vectoriel de dimension* 3 *de* E*.*

Exercice 24.43 ♡

Déterminer une base du sous-espace vectoriel F *de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *donné par :* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$ *où*

$$f_1:x\mapsto e^x,\quad f_2:x\mapsto e^{-x},\quad f_3:x\mapsto \operatorname{ch}x,\quad f_4:x\mapsto\operatorname{sh}x.$$

Solution : *On vérifie facilement que la famille* $\left(f_1,f_2\right)$ *est libre. De plus :* $f_3=\dfrac{1}{2}\left(f_1+f_2\right)$ *et* $f_4=\dfrac{1}{2}\left(f_1-f_2\right)$*. Donc par application du lemme de réduction d'une famille liée :* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2\right)$*. On en déduit qu'une base de* F *est* $\left(f_1,f_2\right)$*.*

Exercice 24.44 ♡

On pose :

$$f_1:x\mapsto x,\quad f_2:x\mapsto x^2,\quad f_3:x\mapsto x\ln x,\quad f_4:x\mapsto x^2\ln x$$

On pose aussi : $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$*. Prouver que* F *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

Solution : *L'ensemble* F *s'écrit comme un* Vect*, c'est donc un sous-espace de* $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ *et donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soient* $\alpha_i\in\mathbb{R}$*,* $i\in[\![1,4]\!]$ *tels que* $f=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3+\alpha_4f_4=0$*. La fonction* f *ainsi que toutes ses dérivées sont identiquement nulles sur* $\mathbb{R}_+^*$*. L'égalité* $f(1)=0$ *amène* $\alpha_1+\alpha_2=0$*. L'égalité* $f'(1)=0$ *amène* $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$ *et* $f''(1)=0$ *amène* $2\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0$*. Enfin,* $f'''(1)=0$ *amène* $-\alpha_3+2\alpha_4=0$*. Le quadruplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ *est donc solution du système formé par ces* 4 *équations. On vérifie en le résolvant que sa seule solution est* $(0,0,0,0)$*. Il vient donc que* $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$*. La famille* $\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$ *est libre et* $\dim\mathrm{F}=4$*.*

Exercice 24.45 ♡

Posons $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *où*

$$f_1:x\mapsto e^x,\quad f_2:x\mapsto e^{2x}\quad\text{et}\quad f_3:x\mapsto e^{x^2}.$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et en donner la dimension et une base.*

Solution :
L'ensemble F *étant donné comme un* Vect*, c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3=0$*. On a donc :* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha_1e^x+\alpha_2e^{2x}+\alpha_3e^{x^2}=0$*. En particulier, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, en divisant par* e^{x^2} *:*

$$0=\left(\alpha_1e^{x-x^2}+\alpha_2e^{2x-x^2}+\alpha_3\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}\alpha_3$$

donc $\alpha_3=0$*. On a donc en revenant à la première égalité :* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha_1e^x+\alpha_2e^{2x}=0$*. De même, on divise cette égalité par* e^x *et on trouve*

$$0=\left(\alpha_1+\alpha_2e^x\right)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\alpha_1$$

et nécessairement $\alpha_1=0$ *ce qui amène aussi* $\alpha_2=0$ *car la fonction exponentielle est strictement positive. La famille* $\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *est bien libre et* $\dim\mathrm{F}=3$*.*

Exercice 24.46 ♡♡

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des suites p-périodiques :

$$\mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n\right\}$$

Montrer que $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Solution : *$\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons « n mod p »le reste de la division euclidienne de n par p. Introduisons la famille $\left(\left(u_n^i\right)\right)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de suites données par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^i = \begin{cases} 1 \text{ si } n \bmod p = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Cette famille forme une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i\left(u_n^i\right) = 0$ alors il vient que la suite $\left(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_1,\dots\right)$ est nulle et donc que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Donc la famille est libre. Considérons une suite p-périodique $a = \left(a_1,\dots,a_p,a_1,\dots,a_p,a_1,\dots\right) \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. On peut écrire que $a = a_1\left(u_n^1\right)+\dots+a_p\left(u_n^p\right)$ et donc la famille engendre $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En conclusion, c'est bien une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = p$. On aurait aussi facilement pu résoudre cet exercice en montrant que

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n) & \longmapsto & \left(u_0,\dots,u_{p-1}\right) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

24.7.5 Hyperplan

Exercice 24.47 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, H un hyperplan de E, et H' un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\mathrm{H} \subset \mathrm{H}' \implies \mathrm{H}' = \mathrm{H} \text{ ou } \mathrm{H}' = \mathrm{E}$$

Solution : *Supposons que $\mathrm{H}' \neq \mathrm{H}$. Alors il existe $a \in \mathrm{H}' \setminus \mathrm{H}$. On sait alors, puisque H est un hyperplan que $\mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{H}' = \mathrm{E}$. Soit $x \in \mathrm{E}$, il existe $(x_\mathrm{H},\lambda) \in \mathrm{H}\times\mathbb{K}$ tels que $x = x_\mathrm{H} + \lambda a \in \mathrm{H}'$ car H' est un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 24.48 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Solution : *Comme H est un hyperplan et que E est de dimension finie, H admet un supplémentaire D dans E et $\dim \mathrm{D} = 1$. Soit v un vecteur formant une base de D. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_0 + \alpha v$ où $x_0 \in \mathrm{H}$ et $\alpha \in \mathrm{R}$. On considère alors la forme linéaire donnée par $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathrm{H}$ et $\varphi(v) = 1$. L'application φ est bien définie sur E et vérifie par construction $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{H}$.*

Exercice 24.49 ♡♡

Soit D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathrm{D} \not\subset \mathrm{H}$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Solution :
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{D}+\mathrm{H}$ contient H et D et est contenu dans E donc $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n$ ou $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n-1$. Si $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n-1$ alors comme $\dim \mathrm{H} = \dim(\mathrm{D}+\mathrm{H})$, il vient que $\mathrm{D}+\mathrm{H} = \mathrm{H}$ et donc que $\mathrm{D} \subset (\mathrm{D}+\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ ce qui contredit l'hypothèse formulée au sujet de D. Donc $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n$, ce qui prouve que $\mathrm{D}+\mathrm{H} = \mathrm{E}$. De plus $\dim(\mathrm{D}\cap\mathrm{H}) = \dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) - \dim \mathrm{H} - \dim \mathrm{D} = 0$, donc $\mathrm{F}\cap\mathrm{H} = \{0\}$ d'où le résultat.

Exercice 24.50 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H_1 et H_2 deux hyperplans de E avec $\mathrm{H}_1 \neq \mathrm{H}_2$. Calculer $\dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2)$.

Solution :
Calculons tout d'abord $\dim(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2)$. Remarquons que $\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H_1. On a donc $\dim(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2) = n$ ou $\dim(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2) = n-1$. Si $\dim(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2) = n-1$ alors, comme $\dim \mathrm{H}_1 = \dim \mathrm{H}_2 = n-1$ et que $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2$, $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2$ alors $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_2$ ce qui contredit le fait que H_1 et H_2 sont distincts. Donc

$\dim(H_1+H_2)=\dim E=n$. *La formule de Grassmann amène* $\dim H_1+\dim H_2=\dim(H_1+H_2)+\dim(H_1\cap H_2)$ *et donc* $\dim(H_1\cap H_2)=2n-2-n=n-2$. *On peut aussi raisonner avec des formes linéaires. Comme* H_2 *est un hyperplan de* E*, il existe une forme linéaire sur* E, $\varphi\in E^\star$ *non-nulle telle que* $H_2=\operatorname{Ker}\varphi$. *Considérons la restriction* $\widetilde{\varphi}$ *de la forme linéaire* φ *au sous espace* H_1. *Il est clair que* $\widetilde{\varphi}$ *est une forme linéaire de* H_1 *:* $\widetilde{\varphi}\in H_1^\star$.

1. $\widetilde{\varphi}\neq 0_{H_1^\star}$ *: par l'absurde, si* $\widetilde{\varphi}=0$, *on aurait* $\forall x\in H_1$, $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$ *et donc on aurait* $H_1\subset H_2$. *Mais puisque* $\dim H_1=\dim H_2=n-1$, *on aurait* $H_1=H_2$ *ce qui est faux d'après l'énoncé ;*
2. $H_1\cap H_2=\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$ *:*
   – *Soit* $x\in H_1\cap H_2$, $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$,
   – *Soit* $x\in\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$, $x\in H_1$ *et* $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$ *et donc* $x\in H_1\cap H_2$ *;*

Nous avons donc montré que $H_1\cap H_2$ *est un hyperplan de l'espace* H_1 *et puisque* $\dim H_1=n-1$, *en utilisant le résultat du cours, il vient que* $\dim(H_1\cap H_2)=n-2$.

Exercice 24.51 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soient* H *un hyperplan et* F *un sous-espace vectoriel de* E *non inclus dans* H. *Montrer que* $\dim F\cap H=\dim F-1$.

Solution : *Comme* $\dim H=n-1$, *le sous-espace vectoriel* $F+H$ *de* E *est de dimension égal à* n *ou* $n-1$. *Mais* F *n'est pas inclus dans* H, *donc* $\dim(F+H)=n$. *Par ailleurs, d'après la formule de Grassmann* $\dim F+\dim H=\dim(H+F)+\dim(F\cap H)$ *donc :* $\dim F+n-1=n+\dim(F\cap H)$ *ce qui prouve le résultat.*

24.7.6 Sous-espaces supplémentaires

Exercice 24.52 ♡

Déterminer un supplémentaire de $F=\mathrm{V}ect(u,v)$ *où* $u=(1,0,1)$ *et* $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$ *dans* $\mathbb{R}^3$

Solution : *Posons* $w=(0,0,1)$. *On vérifie facilement que la famille* (u,v,w) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$. *Donc, d'après le cours les deux sous-espaces* $F=\mathrm{V}ect(u,v)$ *et* $G=\mathrm{V}ect(w)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24.53 ♡

On considère le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E=\mathbb{R}^3$ *et* $u=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ *; Posons :*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y-z=0\right\}\quad\text{et}\quad G=\mathrm{V}ect(u)$$

Prouver que F *et* G *sont des sous-espaces supplémentaires de* E.

Solution : *On a* $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\right\}=\left\{(x,y,x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{V}ect(v,w)$ *avec* $v=(1,0,1)$ *et* $w=(0,1,1)$. *On vérifie facilement que la famille* (u,v,w) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *donc* $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

Exercice 24.54 ♡

Dans $E=\mathbb{R}^4$, *on considère l'ensemble*

$$F=\{(x,y,z,t)\in E\mid x=y\text{ et }x-y+t=0\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E, *et déterminer une base de* F.
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E.
3. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Solution :

1. *On a* $F=\{(x,y,z,t)\in E; x=y\text{ et }x-y+t=0\}=\{(x,x,z,0)\mid x,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{V}ect(u,v)$ *avec* $u=(1,1,0,0)$ *et* $v=(0,0,1,0)$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. En conclusion,* (u,v) *est une base de* F *et* $\dim F=2$.
2. *Introduisons les vecteurs* $w=(1,0,0,0)$ *et* $W=(0,0,0,1)$. *On montre facilement que la famille* (u,v,w,W) *est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de* $\mathbb{R}^4$, *c'est une base de* $\mathbb{R}^4$ *et si* $G=\mathrm{V}ect(w,W)$ *alors* F *et* G *sont en somme directe.*
3. *Ce supplémentaire n'est bien entendu pas unique. On montre de la même façon que précédemment que, par exemple,* $G'=\mathrm{V}ect((1,0,1,0),(0,0,0,1))$ *est un autre supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 24.55 ♡

Soit l'espace vectoriel E *des polynômes à coefficients réels de degré* $\leqslant 4$. *On considère l'ensemble*

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, déterminer une base de* F *et préciser sa dimension.*
2. *Montrer que le sous-espace vectoriel* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ *est un supplémentaire de* F *dans* E.

Solution :

1. *Déterminons* F. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$. *Puisque* $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = 0$, 0 *est racine double (au moins) de* P. *Donc* $\exists \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *tel que* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2\mathrm{Q}$. *En examinant les degrés, on obtient que* $\deg \mathrm{Q} \leqslant 2$. *Donc* $\mathrm{Q} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. *Alors* $\mathrm{Q}' = 2a\mathrm{X} + b$. *Comme* $\mathrm{P}' = 2\mathrm{X}\mathrm{Q} + \mathrm{X}^2\mathrm{Q}'$, *et* $\mathrm{P}'(1) = 0$, *on trouve que* $4a + 3b + 2c = 0$. *Donc* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} - 2a - \dfrac{3}{2}b)$ *On vérifie réciproquement qu'un polynôme de cette forme est dans* F. *Donc*

$$\mathrm{F} = \{a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^3 - (2a + \frac{3}{2}b)\mathrm{X}^2 ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2) + b(\mathrm{X}^3 - \frac{3}{2}\mathrm{X}^2) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$$

où $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2$ *et* $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^3 - \dfrac{3}{2}\mathrm{X}^2$. *On vérifie que* $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ *est une famille libre (degrés distincts). C'est donc une base de* F *et alors* $\dim \mathrm{F} = 2$.

2. *On vérifie que* $(1, \mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ *est une famille libre (degrés étagés). C'est donc une base de* G *et alors* $\dim \mathrm{G} = 3$. *On montre ensuite que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. *Alors comme* $\mathrm{P} \in \mathrm{G}$, *il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\left(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2\right)$. *Mais comme* $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$, *on a aussi* $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}'(1) = 0$ *et on abouti au système* $\begin{cases} a + c & = 0 \\ b + c & = 0 \\ b + 3c & = 0 \end{cases}$ *donc l'unique solution est le triplet nul. Donc* $\mathrm{P} = 0$ *et* F *et* G *sont bien en somme directe. Puisque* $\dim \mathrm{E} = 5 = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$, *d'après le cours,* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 24.56 ♡

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, *on considère les sous-espaces vectoriels*

$$\mathrm{F} = \mathrm{V}ect((1, 2, 1, 3), (2, 0, 0, 1)) \text{ et } \mathrm{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, x = y\right\}$$

1. *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels* F *et* G.
2. *Montrer que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
3. *En déduire que* $\mathbb{R}^4 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Solution :

1. *Par définition,* $\mathrm{S}_1 = (f_1, f_2)$ *est générateur de* F. *On vérifie que cette famille est libre. C'est une base de* F *et donc* $\dim \mathrm{F} = 2$. *Il faut déterminer une famille génératrice de* G *:*

$$\mathrm{G} = \{x(1, 1, -3, 0) + t(0, 0, 0, 1) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc $g_1 = (1, 1, -3, 0)$ *et* $g_2 = (0, 0, 0, 1)$ *forment une famille génératrice de* G. *On vérifie qu'il est libre. C'est donc une base de* G *et* $\dim \mathrm{G} = 2$.

2. *On vérifie facilement que les vecteurs* $(1, 2, 1, 3)$ *et* $(2, 0, 0, 1)$ *ne sont pas solutions du système* $\begin{cases} 2x + y + z & = 0 \\ x & = y \end{cases}$ *donc* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$.
3. *D'après la formule de Grassmann, puisque* $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{R}^4$ *et que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, *il vient que* $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{E}$ *et donc que* $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$. *On peut alors écrire que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 24.57 ♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *vérifiant* $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} > n$. *Montrer que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Solution : *Utilisons la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels :*

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

On obtient que $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) > n - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$. *Mais comme* $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ *est un sous-espace vectoriel de* E, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) \leqslant n$ *et donc* $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) > 0$. *On obtient finalement que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \neq \{0\}$.

Exercice 24.58 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *différent de* $\{0\}$ *et différent de l'espace* E. *Montrer que* F *admet une infinité de supplémentaires dans* E.

Indication 24.15 : Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ *lorsque* F *est une droite vectorielle.*

Solution : *Considérons une base de* F, $(e_1,\dots,e_p)$ *(où* $p = \dim F$*) et complétons là en une base de* E *par des vecteurs* $e_{p+1},\dots e_n \in E$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *posons* $G_t = \mathrm{Vect}(te_1 + e_{p+1}, e_{p+2},\dots,e_n)$. *Soit* $t \in \mathbb{R}$, *montrons que* G_t *est un supplémentaire de* F *dans* E. *Il suffit pour ce faire de montrer que* $\left(e_1,\dots,e_p, te_1+e_{p+1}, e_{p+2},\dots,e_n\right)$ *est une base de* E. *Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1}\left(te_1 + e_{p+1}\right) + \alpha_{p+2}e_{p+2} + + \dots \alpha_n e_n = 0$ *alors* $\left(\alpha_1 + t\alpha_{p+1}\right)e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1}e_{p+1} + \alpha_{p+2}e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n = 0$ *et comme* $(e_1,\dots,e_n)$ *est libre, il vient que* $\alpha_1 + t\alpha_{p+1} = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_n = 0$ *et donc que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. *La famille* $\left(e_1,\dots,e_p, te_1+e_{p+1}, e_{p+2},\dots,e_n\right)$ *est donc bien libre et comme son cardinal est égal à la dimension de* E, *il s'agit bien d'une base de* E. *En conclusion,* $E = F \oplus G_t$.

Si $t \neq t'$ *sont deux réels, alors* $G_t \neq G_{t'}$. *En effet le vecteur* $e_p + te_1$ *n'est pas élément de* $G_{t'}$. *Si c'était le cas, alors il existerait* $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $e_{p+1} + te_1 = \alpha_{p+1}\left(e_{p+1} + t'e_1\right) + \alpha_{p+2}e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n$. *Alors* $\left(\alpha_{p+1}t' - t\right)e_1 + \left(\alpha_{p+1} - 1\right)e_{p+1} + \alpha_{p+2}e_{p+2} + \dots + \alpha_n e_n = 0$. *La famille* $\left(e_1, e_{p+1},\dots,e_n\right)$ *est libre comme sous-famille d'une famille libre donc en particulier* $\alpha_{p+1}t' - t = \alpha_{p+1} - 1 = 0$ *et* $t = t'$, *ce qui est contraire à notre hypothèse de départ.*

Exercice 24.59 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. On considère* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *de même dimension. Le but de cet exercice est de montrer que* F *et* G *admettent un supplémentaire commun.*

1. *Montrer que* $F \cap G$ *admet un supplémentaire* F' *(resp.* G'*) dans* F *(resp. dans* G*).*
2. *Montrer que* F' *et* G' *sont de même dimension.*
3. *Montrer* F' *et* G' *sont en somme directe.*
4. *En considérant une base de* F' *et une base de* G', *construire un supplémentaire commun à* F *et* G *dans* $F + G$.
5. *Répondre alors au problème initial.*

Solution :

1. $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* F *qui est de dimension finie car c'est le cas de* E. *Donc* $F \cap G$ *admet un supplémentaire* F' *dans* F. *On fait de même pour* G'.
2. *Comme* $F = F \cap G \oplus F'$, *il vient que* $\dim F' = \dim F - \dim F \cap G$. *De même,* $\dim G' = \dim G - \dim F \cap G$. *Le résultat s'ensuit alors du fait que* F *et* G *ont même dimension. On notera* $p = \dim F' = \dim G'$.
3. *Soit* $x \in F' \cap G'$. *Comme* $F' \subset F$ *et que* $G' \subset G$, *on a* $x \in F \cap G$. *Mais* F' *et* $F \cap G$ *sont supplémentaires donc* $x = 0$.
4. *Comme* F' *et* G' *sont de même dimension* p, *ces deux sous-espaces admettent des bases* $f = \left(f_1,\dots,f_p\right)$ *pour* F' *et* $\left(g_1,\dots,g_p\right)$ *pour* G'. *Considérons la famille* $h = \left(h_1,\dots,h_p\right)$ *où pour tout* $i \in [\![1,p]\!]$, $h_i = f_i + g_i$. *Aucun des vecteurs de cette famille n'est dans* $F \cup G$. *En effet, s'il existe* $i \in [\![1,p]\!]$ *tel que* $h_i \in F \cup G$ *alors* $h_i \in F$ *ou* $h_i \in G$. *Si* $h_i = f_i + g_i \in F$ *alors* $g_i = f_i - h_i \in F$. *Donc* $g_i \in F \cap G$. *Mais* $g_i \in G'$ *et les deux sous-espaces* G' *et* $G \cap F$ *sont en somme directe, donc* $g_i = 0$, *ce qui n'est pas possible car la famille* g *ne serait pas libre. On fait de même si* $h_i \in G$. *Montrons maintenant que la famille* h *est libre. Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_p h_p = 0$. *Alors le vecteur* $v = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p = -\left(\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_p g_p\right)$ *est élément de* $F' \cap G'$. *D'après la question précédente,* $v = 0$ *et* $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_p g_p = 0$. *Les familles* f *et* g *étant libres, on en déduit que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ *et donc que* h *est libre. Posons* $H = \mathrm{Vect}\left(h_1,\dots,h_p\right)$. *Il est clair que* $\dim H = p$. *Montrons que* $F \cap H = \{0\}$. *Soit* $x \in F \cap H$. *Alors il existe* $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i$. *Mais* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i = x - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i$ *et donc le vecteur* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i \in F \cap G$ *ce qui prouve que* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i = 0$ *car ce vecteur est aussi élément de* G'. *Comme la famille* g *est libre, il vient que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ *et donc* $x = 0$. F *et* H *sont bien en somme directe. Enfin, puisque* F' *est supplémentaire de* F *dans* $F + G$, *donc* $\dim(F+G) = \dim F + \dim F' = \dim F + p = \dim F + \dim H$. *Donc* H *est un supplémentaire de* F *dans* $F + G$. *De même* H *est un supplémentaire de* G *dans* $F + G$.
5. *On considère un supplémentaire* $\tilde{H}$ *à* $F + G$ *dans* E. *Il existe car* E *est de dimension finie. Montrons que* $H \oplus \tilde{H}$ *(vérifier que cette somme est bien directe) est un supplémentaire commun à* F *et* G *dans* E. *Soit* $x \in F \cap (H \oplus \tilde{H})$. *Alors* $x \in F$ *et* $x = a + \tilde{a}$ *ou* $a \in H$ *et* $\tilde{a} \in \tilde{H}$. *Mais* $\tilde{a} = x - a \in F + H = F + G$ *donc* $\tilde{a} \in (F+G) \cap \tilde{H}$ *ce qui amène* $\tilde{a} = 0$ *et* $x = a$. *Mais comme* $F \cap H = \{0\}$, *il s'ensuit que* $x = 0$ *et donc* F *et* $H \oplus \tilde{H}$ *sont en somme directe. De plus* $\dim\left(H \oplus \tilde{H}\right) = \dim(F+G) - \dim F + \dim E - \dim(F+G) = \dim E - \dim F$. *Donc* $F + \left(H \oplus \tilde{H}\right) = E$ *et* $E = F \oplus \left(H \oplus \tilde{H}\right)$. *On montre de même que* $E = G \oplus \left(H \oplus \tilde{H}\right)$

24.7.7 Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 24.60 ♡

Déterminer le rang des familles (v_1, v_2, v_3, v_4) *de vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *donnés par :*

1. $v_1 = (1,1,0,0)\,, v_2 = (1,0,1,0)\,, v_3 = (1,0,0,1)\,, v_4 = (0,0,1,1)$.
2. $v_1 = (1,1,0,0)\,, v_2 = (1,0,1,0)\,, v_3 = (1,0,0,1)\,, v_4 = (1,1,1,-1)$.

Solution :

1. *La famille est libre donc son rang est* 4.
2. *Comme* $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$, *d'après le lemme de réduction d'une famille liée,* $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. *La famille* (v_1, v_2, v_3) *est une sous-famille de celle étudiée dans la première question et qui était libre. Elle est donc libre. On en déduit que le rang de la famille est* 3.

Exercice 24.61 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathscr{F}([0,1[,\mathbb{R})$, *on considère :*

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille $\left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$ *?*

Solution :

Pour tout $x \in [0,1[$, $f_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$ *et* $f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$ *donc* $\mathrm{rg}\left(f_1, f_2, f_3, f_4\right) = \mathrm{rg}\left(f_3, f_4\right) = 2$ *car cette dernière famille est libre*

24.7.8 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 24.62 ♡

On considère $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y, t-x) \end{array} \right.$

1. *Montrer que* u *est une application linéaire et déterminer* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$.
2. *La famille* $\{(u(1,0,0,0), u(1,1,1,1)\}$ *est-il libre dans* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* u *est linéaire. On a*

$$\operatorname{Ker} u = \left\{ \left(x,y,z,t\right) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{rl} 2x+y & = 0 \\ -x \quad\; + t & = 0 \end{array} \right. \right\} = \{(x, -2x, z, x) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

avec $e_1 = (1,-2,0,1)$ *et* $e_2 = (0,0,1,0)$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de* $\operatorname{Ker} u$. *Alors* $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ *et d'après la formule du rang* $\dim \operatorname{Im} u = 2$. *Comme* $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ *et que* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, *il vient que* $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ *et donc que* u *est surjective.*

2. *Comme* $u(1,0,0,0) = (2,-1)$ *et que* $u(1,1,1,1) = (3,0)$ *et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24.63 ♡

Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 2P \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* θ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer* $\operatorname{Im} \theta$ *et en déduire le rang de* θ.
3. *Donner la dimension de* $\operatorname{Ker} \theta$ *et déterminer* $\operatorname{Ker} \theta$.

Solution :

1. *Si* $P \in \mathbb{R}_3[X]$, *il est clair que* $\deg\left(XP' - 2P\right) \leqslant 3$ *et donc que* $\theta(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ *alors*

$$\theta(\alpha P + \beta Q) = X(\alpha P + \beta Q)' - 2(\alpha P + \beta Q) = \alpha\left(XP' - 2P\right) + \beta\left(XQ' - 2Q\right) = \alpha\theta(P) + \beta\theta(Q)$$

   donc θ *est linéaire.*
2. *Soit* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. *On calcule que* $\theta(P) = aX^3 - cX - 2d$. *Donc* $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Vect}\left(1, X, X^3\right)$. *La famille* $\left(1, X, X^3\right)$ *étant libre, il vient que* $\operatorname{rg}\theta = 3$.
3. *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Ker}\theta = 1$. *Comme* $\theta\left(X^2\right) = 0$, $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$.

Exercice 24.64 ♡

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\}$.

1. *Prouver que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$. *Déterminer sa dimension.*
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. *Posons* $\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}\right.$. *On vérifie facilement que* θ *est linéaire et surjective. De plus* $F = \operatorname{Ker}\theta$. *Donc* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$. *D'après la formule du rang,* $\dim F = \dim \operatorname{Ker}\theta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R} = n$.
2. *Notons* $G = \mathbb{R}_0[X]$. G *est clairement un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$ *de dimension* 1. *On vérifie facilement que* G *est en somme directe avec* F. *Comme de plus* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, *on a* $\mathbb{R}_n[X] = F + G$. *En conclusion,* $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus G$.

Exercice 24.65 ♡♡

On considère l'application linéaire

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P' + P'' \end{array}\right.$$

1. *Montrer que l'endomorphisme* φ *est injectif.*
2. *Montrer que l'endomorphisme* φ *est surjectif.*

Indication 24.15 : Pour montrer la surjectivité, étudier la restriction de φ *à* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui est un espace de dimension finie.*

Solution :

1. *Soit un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P + P' + P'' = 0$, *soit* $P = -(P' + P'')$. *Si l'on suppose que* $P \neq 0$, *on a* $\deg P \leqslant \deg P - 1$ *, une absurdité. Donc* φ *est injective.*
2. *Soit un entier* $n \in \mathbb{N}$. *Notons* φ_n *la restriction de* φ *à* $\mathbb{R}_n[X]$. *Alors, si* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = P + P' + P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ *car* $\deg(\varphi_n(P)) \leqslant \max(\deg P, \deg P', \deg P'') \leqslant n$. *Donc* φ_n *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *injectif, donc surjectif, car* $\mathbb{R}_n[X]$ *est un espace de dimension finie* $n+1$.

   Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. *Notons* $n = \deg P$. *Alors* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *et donc* $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $\varphi_n(Q) = P$. *Mais alors* $\varphi(Q) = P$ *et on a donc montré que* φ *est surjective !*

Exercice 24.66 ♡♡

On définit l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array}\right.$$

1. *Montrer que* φ *est un isomorphisme.*
2. *En déduire qu'il existe un et un seul polynôme* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *vérifiant* $P(0) = 1, P'(1) = 2, P''(1) = -1$ *et* $P''(2) = 1$.

Solution :

1. *Il est clair que* φ *est linéaire. Montrons que* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. *Soit* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *tel que* $\varphi(P) = 0$. *Considérons* $H = P - P(1)$. *Comme* $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, *il vient que* 1 *est racine d'ordre* 3 *de* H, *donc* $H = (X-1)^3 Q$ *et donc* $P = Q(X-1)^3 + P(1)$. *Mais en examinant les degrés, il faut que* $Q = \lambda \in \mathbb{R}$ *d'où* $P = \lambda(X-1)^3 + a$ *(avec* $a = P(1) \in \mathbb{R}$*). Comme* $P(0) = 0$, $a = -\lambda$ *et donc* $P = \lambda((X-1)^3 - 1)$. *Mais alors* $P'' = \lambda(6(X-1))$ *et comme* $P''(2) = 1$, *il vient que* $\lambda = 0$ *et donc que* $P = 0$.

   Comme φ *est injective, et que* $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, φ *est donc bijective.*
2. *Comme* φ *est bijective, l'élément* $(1, 2, -1, 1)$ *possède un unique antécédent* $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 24.67 ♡♡

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit un sous-espace vectoriel F de E. On suppose que $F \subset u(F)$.

1. *On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $u(F) = F$.*
2. *Trouver un contre-exemple lorsque E est de dimension infinie.*

Indication 24.15 : Pour la deuxième question, on pourra étudier $u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$ *avec* $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$.

Solution :

1. *Considérons la restriction de u à F : $u_{|F} : F \to E$. Alors d'après la formule du rang,* $\dim u(F) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim V$. *Comme $F \subset u(F)$, on a aussi que $\dim F \leqslant \dim u(F)$. Donc $\dim F = \dim u(F)$ et $F = u(F)$.*
2. *En considérant $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$, l'application $u : P \mapsto P'$ fournit un contre-exemple puisque $u(F) = E \neq F$.*

Exercice 24.68 ♡♡

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Dire, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de f :

1. *L'image de toute famille libre de E par f est libre*
2. $\operatorname{Im} f = F$
3. *L'image d'une base de E par f est génératrice de F.*
4. $\operatorname{rg} f = n$.
5. *L'image d'une base de E par f est libre.*
6. $\operatorname{rg} f = p$.
7. *L'image d'une base de E par f est une base de F.*
8. *L'image de toute famille génératrice de E par f est génératrice de F.*
9. $\exists g \in \mathscr{L}(F,E), \quad g \circ f = \mathrm{id}_E$
10. $\exists g \in \mathscr{L}(F,E), \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$

Solution :

1. *Supposons que l'image de toute famille libre est libre. Montrons que f est injective. Considérons une base e de E et un vecteur $x \in E$ tel que $f(x) = 0$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans la base e. On a donc : $0 = f(x) = \sum_{k=0}^n x_i f(e_i)$. Mais la famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ étant libre, il en est de même de la famille $\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$. L'égalité précédente n'est donc vraie que si $x_1 = \dots = x_n = 0$ et alors $x = 0$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et que f est injective.*
2. *Si $\operatorname{Im} f = F$ alors f est surjective.*
3. *Si l'image d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E par f est génératrice de F alors montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. La famille $\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$ est donc génératrice de f et il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $y = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$. Par conséquent, $y = f(x)$ avec $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ et f est bien surjective.*
4. *Si $\operatorname{rg} f = n$ alors f est injective. En effet, d'après la formule du rang, on a : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ et il vient que $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ c'est à dire que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$*
5. *Si l'image d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E par f est libre dans F alors montrons que f est injective. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0$ et soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base E. Alors $0 = f(x) = \sum_{k=0}^n x_i f(e_i)$. On termine alors comme dans la première question et on montre que $x = 0$ c'est-à-dire que f est injective.*
6. *Si $\operatorname{rg} f = p$ alors par définition du rang d'une application linéaire, $\dim \operatorname{Im} f = p = \dim F$ et donc $\operatorname{Im} f = F$. On prouve ainsi que f est surjective.*
7. *Si l'image d'une base de E par f est une base de F alors en appliquant les résultats des questions 3) et 5), il vient que f est bijective.*
8. *Si l'image de toute famille de E par f est génératrice de F alors en particulier l'image d'une base de e est génératrice de F et appliquant la question 3, f est surjective.*
9. *Si il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors g est surjective et f injective. Pour que f soit surjective, il faudrait supposer de plus que $\dim F = \dim E$.*
10. *Si il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ alors f est surjective et g injective. Pour que f soit injective, il faudrait supposer de plus que $\dim F = \dim E$.*

Exercice 24.69 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, un vecteur x_0 de E et un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ soit libre.

1. *Montrer que la famille* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *est une base de* E.
2. *Montrer que* f *est inversible.*

Solution :

1. *Soit* $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0$. *Alors* $f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = 0$ *ce qui s'écrit aussi* $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0)$. *Mais la famille* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *est libre donc* $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ *ce qui prouve que la famille* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *est libre*
2. *Comme* $\dim \mathrm{E} = n$, *les familles* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *et* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *sont des bases de* E. *Comme l'image de la première base par* f *est la seconde base,* f *est forcément inversible.*

Exercice 24.70 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* $(u, v) \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que*

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) + n$$

Indication 24.15 : On pourra étudier la restriction $\tilde{u}$ *de* u *à* $\operatorname{Im} v$ *et montrer que* $\operatorname{Im} \tilde{u} = \operatorname{Im}(u \circ v)$ *et* $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$, *puis appliquer le théorème du rang à* $\tilde{u}$.

Solution : *Considérons la restriction de* u *à* $\operatorname{Im} v$: $\tilde{u} = u_{|\operatorname{Im} v}$. *On vérifie facilement que* $\operatorname{Im} u \circ v = \operatorname{Im} \tilde{u}$ *et que* $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. *En appliquant le théorème du rang à* $\tilde{u}$, *on trouve que*

$$\dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Mais $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$ *et donc, en appliquant le théorème du rang pour* u, *on trouve que*

$$\operatorname{rg} v \leqslant (n - \operatorname{rg} u) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Exercice 24.71 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux sous-espace vectoriel* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ *de* E. *Montrer que :*

$$(\exists u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}) \ | \operatorname{Ker} u = \mathrm{E}_1 \text{ et } \operatorname{Im} u = \mathrm{E}_2) \Longleftrightarrow (\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2)$$

Indication 24.15 : Pour la réciproque,construire une base de E *en complétant une base de* E_1. *Définir alors* u *en se donnant l'image de cette base.*

Solution :

- $\boxed{(i) \implies (ii)}$: *Le sens direct est une conséquence directe de la formule du rang :* $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$.
- $\boxed{(ii) \implies (i)}$: *si* $\mathrm{E}_1 = \{0\}$, *alors* $\dim \mathrm{E}_2 = \dim \mathrm{E}$ *donc* $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$. *En posant* $u = \mathrm{id}$, *on vérifie que* u *convient. De même si* $\mathrm{E}_2 = \{0\}$, $u = 0$ *convient. Supposons maintenant que* $\mathrm{E}_1 \neq \{0\}$ *et* $\mathrm{E}_2 \neq \{0\}$. *Alors, il existe une base* $(e_1, \dots, e_p)$ *de* E_1 *(où* $p = \dim \mathrm{E}_1$*). Complétons cette base en une base de* E : $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. *Comme* $\dim \mathrm{E}_2 = n - p$, *il existe une base* f *de* E_2 *de la forme* $(f_{p+1}, \dots, f_n)$. *Définissons alors* u *en se donnant l'image de la base* e :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], u(e_i) = 0, \quad \forall i \in [\![p+1, n]\!], u(e_i) = f_{i+1}$$

Alors, $\forall x \in \mathrm{E}_1$, $u(x) = 0$ *donc* $\mathrm{E}_1 \subset \operatorname{Ker} u$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$, *décomposons* x *dans* e.

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p + x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$$

$u(x) = x_{p+1} f_{p+1} + \dots + x_n f_n = 0$. *Mais comme* f *est libre, il vient que* $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$ *et donc que* $x \in \mathrm{E}_1$. *D'autre part,* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{Vect}(f_{p+1}, \dots f_n) = \mathrm{E}_2$.

Exercice 24.72 ♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* f, g *de* E *vérifiant* $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

Solution :

- *Comme* $f \circ g = 0$ *alors* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ *et d'après la formule du rang* $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$.
- *D'autre part, comme* $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *alors* $n = \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ *car* $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

L'égalité est ainsi prouvée

Exercice 24.73 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n*. On considère l'ensemble* $\mathrm{A} = \{(u,v) \in \mathrm{L}(\mathrm{E})^2 \mid u \circ v = 0\}$*. Déterminer* $\sup\{\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \mid (u,v) \in \mathrm{A}\}$.

Solution : *L'égalité* $u \circ v = 0$ *amène* $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$ *et donc d'après la formule du rang* $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \leqslant \mathrm{rg}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u = n$*. Pour* $u = \mathrm{id}$ *et* $v = 0$*, il y a égalité. Donc* $\boxed{\sup\{\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \mid (u,v) \in \mathrm{A}\} = n}$

Exercice 24.74 ♡♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes* f *de* E *tels que :*
$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \big(x, f(x)\big) \text{ est une famille liée.}$$
2. *En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de* E *qui commutent avec tout autre endomorphisme.*

Indication 24.15 : Pour tout $x \in \mathrm{E}$*, on pourra considérer une projection sur* $\mathrm{V}ect(x)$*).*

Solution :

1. *Les homothéties vérifient clairement la propriété indiquée. Réciproquement, on sait par hypothèse que* $\forall x \in \mathrm{E}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda_x x$*. Il s'agit donc de démontrer que l'on peut choisir le même* λ *pour tous les* x*. Autrement dit, si l'on choisit deux vecteurs* x *et* y*, on peut prendre* $\lambda_x = \lambda_y$*.*
   - *Si* (x,y) *est libre, alors, comme :* $\big(\lambda_{x+y} - \lambda_x\big)x + \big(\lambda_{x+y} - \lambda_y\big)y = 0$ *il vient que* $\lambda_{x+y} = \lambda_y = \lambda_x$*.*
   - *Sinon* x *et* y *sont colinéaires et il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = \alpha x$ *et*
   $$f\big(y\big) = f(\alpha x) = \lambda_{\alpha x}\alpha x = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$$
   et on peut prendre $\lambda_{\alpha x} = \lambda$*. On a ainsi montré que pour tout vecteur* $y \in \mathrm{E}$*,* $f\big(y\big) = \lambda y$*. Donc* f *est une homothétie de rapport* λ*.*
2. *Considérons* f *un endomorphisme de* E *qui commute avec tous les endomorphismes de* E*. Soit* x *un vecteur non nul de* E *et soit* Π *la projection de* E *sur* $\mathrm{V}ect(x)$ *parallèlement à un supplémentaire donné de* $\mathrm{V}ect(x)$ *dans* E *(qui existe car* E *est de dimension finie). Comme* f *et* Π *commute, on a :* $\Pi\big(f(x)\big) = f(\Pi(x)) = f(x)$*. Donc comme* $\Pi\big(f(x)\big) \in \mathrm{V}ect(x)$*,* $f(x)$ *et* x *sont liés.* x *étant quelconque non nul, ce résultat est vrai pour tout* $x \in \mathrm{E} \setminus \{x\}$*. Ce résultat est aussi clairement vérifié par le vecteur nul. D'après la première question, on peut affirmer que* f *est une homothétie. Réciproquement, une homothétie commute avec tous les endomorphismes de* E*.*

Exercice 24.75 ♡♡♡

Soit f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n*. Pour tout* $p \in \mathbb{N}$*, on note :*
$$\mathrm{K}_p = \mathrm{Ker}\, f^p \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \mathrm{Im}\, f^p.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p.$$
2. *Prouver qu'il existe un plus petit entier naturel* $r \leqslant n$ *tel que :* $\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i+1}$.
3. *Montrer de même que :*
$$\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{I}_i = \mathrm{I}_{i+1}.$$
4. *Montrer que :* $\mathrm{E} = \mathrm{K}_r \oplus \mathrm{I}_r$.

Solution :

1. *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et soit* $x \in \mathrm{K}_p$*. Alors* $f^{p+1}(x) = f\big(f^p(x)\big) = 0$ *car* $f^p(x) = 0$*. Donc* $x \in \mathrm{K}^{p+1}$ *et* $\mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1}$*. Considérons maintenant* $y \in \mathrm{I}_{p+1}$*. Alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que :* $y = f^{p+1}(x) = f^p\big(f(x)\big)$ *et donc* $y \in \mathrm{I}_p$ *et* $\mathrm{I}_{p+1} \subset \mathrm{I}_p$
2. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$*,* $\mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1}$ *donc :* $\dim \mathrm{K}_p \leqslant \dim \mathrm{K}_{p+1}$ *et la suite* $\big(\dim \mathrm{K}_p\big)$ *est croissante. Comme* $\mathrm{K}_p \subset \mathrm{E}$*, on a aussi :* $\dim \mathrm{K}_p \leqslant n$*. La suite* $\big(\dim \mathrm{K}_p\big)$ *est donc majorée. Appliquant le théorème de la limite monotone elle est convergente mais, ses valeurs étant entières, cela équivaut au fait qu'elle est constante à partir d'un certain rang* $r \in \mathbb{N}$*.* r *est le plus petit entier naturel tel que* $\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i+1}$*.*
3. *D'après la formule du rang et le résultat précédent, on montre que* $\forall i \geqslant r, \quad \mathrm{I}_i = \mathrm{I}_{i+1}$*.*
4. *Soit* $y \in \mathrm{K}_r \cap \mathrm{I}_r$*. Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que* $y \neq 0$*. Alors* $f^r\big(y\big) = 0$ *et il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f^r(x)$*. Il vient donc :* $f^{2r}(x) = 0$*. Mais comme* $y = f^r(x) \neq 0$*, il existe* $r' \in [\![r+1, 2r]\!]$ *tel que* $f^{r'}(x) = 0$*. On a donc* $x \in \mathrm{K}_{r'}$ *et* $x \notin \mathrm{K}_r$ *ce qui contredit le fait que la suite* (K_r) *est constante à partir du rang* r*. On en déduit que* $y = 0$ *et que* $\mathrm{K}_r \cap \mathrm{I}_r = \{0\}$*. Il vient alors que :* $\dim(\mathrm{K}_r + \mathrm{I}_r) = \dim \mathrm{K}_r + \dim \mathrm{I}_r = \dim \mathrm{Ker}\, f^r + \dim \mathrm{Im}\, f^r = n$ *par application de la formule du rang et de ce fait :* $\mathrm{K}_r + \mathrm{I}_r = \mathrm{E}$*. En résumé :* $\mathrm{E} = \mathrm{K}_r \oplus \mathrm{I}_r$*.*

Exercice 24.76 ♡♡♡

Soit un espace vectoriel E *de dimension 3 et un endomorphisme* u *de* E *tel que* u^2=0. *Montrer que*

$$\exists a \in \mathrm{E}: \quad \exists f \in \mathrm{E}^\star: \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad u(x) = f(x)\cdot a$$

Indication 24.15 : Traduire en terme d'image et de noyau la relation $u^2 = 0$. *Introduire ensuite une base de* $\operatorname{Ker} u$ *et la compléter. Définir* f *à l'aide de cette base.*

Solution : *La relation* $u^2 = 0$ *donne que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ *(le montrer). D'après le théorème du rang,*

$$3 = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$$

ce qui implique que $\dim(\operatorname{Ker} u) \geqslant 2$. *Si* $\dim(\operatorname{Ker} u) = 3$, *alors* $u = 0$ *et le résultat est évident avec* $f = 0$ *et* a *quelconque. Supposons donc que* $\dim(\operatorname{Ker} u) = 2$. *Alors d'après le théorème du rang,* $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$. *C'est une droite vectorielle :* $\exists a \in \mathrm{E}$, $a \neq 0$ *tel que* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$. *Considérons une base* (e_1, e_2) *de* $\operatorname{Ker} u$ *et complétons-la en une base* (e_1, e_2, e_3) *de* E. *Puisque* $u \neq 0$, $u(e_3) \neq 0$ *et donc* $\exists c \in \mathbb{R}$ *tq* $u(e_3) = ca$. *Définissons la forme linéaire* f *en se donnant l'image de la base* e *par* f : $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$ *et* $f(e_3) = c$. *Soit alors* $x \in \mathrm{E}$. *Décomposons* x *dans la base* e : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. *Alors* $u(x) = x_3ca = x_3f(e_3)a = f(x)a$.

Exercice 24.77 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* $f \in \mathrm{L(E)}$ *un endomorphisme de rang 1.*

1. *Montrer qu'il existe un scalaire* $\lambda \in \mathrm{K}$ *tel que* $f^2 = \lambda f$.
2. *A quelle condition sur le scalaire* λ, $(\mathrm{id} - f)$ *est-il inversible ? Calculer alors* $(\mathrm{id} - f)^{-1}$.

Solution :

1. *Comme* $\operatorname{rg} f = 1$, *il existe un vecteur* $e_1 \in \mathrm{E}$ *tel que* $\operatorname{Im} f = \mathrm{V}ect(e_1)$. *On complète le vecteur* e_1 *en une base* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* E. *Comme* $\operatorname{Im} f = \mathrm{V}ect(e_1)$, *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *il existe* $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *tel que* $f(e_i) = \lambda_i e_1$. *Donc* $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_1) = \lambda_i\lambda_1 e_1 = \lambda_1 f(e_i)$. *Si* $x \in \mathrm{E}$ *alors il existe* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ *et*
$$f^2(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^2(e_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \lambda_1 f(x).$$
Posons alors $\lambda = \lambda_1$. *On a bien* $f^2(x) = \lambda f(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$.
2. *Remarquons que* $(f - \mathrm{id})(f + (1-\lambda)\,\mathrm{id}) = (\lambda - 1)\,\mathrm{id}$. *On en tire une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathrm{id} - f$ *soit inversible : il faut et il suffit que* $\lambda \neq 1$. *On calcule alors* $\boxed{(\mathrm{id} - f)^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda}(f + (1-\lambda)\,\mathrm{id})}$.

Exercice 24.78 ♡♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* (f, g) *de* E *vérifiant :*

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

1. *Montrer que* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.
2. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f \circ g)$.

Solution :

1. *Soit* $y \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$. *Il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = 0$ *car* $y \in \operatorname{Ker} f$. *Donc* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} g$ *sont en somme directe. Soit* $x \in \mathrm{E}$, *on écrit* $x = [x - g \circ f(x)] + g \circ f(x)$. *On a* $f\big(x - g \circ f(x)\big) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ *donc* $x - gof(x) \in \operatorname{Ker} f$. *Il est clair que* $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$. *Donc* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$. *En conclusion, on a bien* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.
2. *D'après le théorème du rang,* $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ *et d'après la question précédente,* $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} g$ *d'où* $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$. *Comme* $g \circ f \circ g = g$, *on a que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ *ce qui implique que* $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} g \circ f$. *De même, comme* $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ *alors* $\operatorname{rg} g \circ f \leqslant \operatorname{rg} g$ *et on on obtient que* $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} g \circ f$. *On fait de même pour la seconde égalité.*

Exercice 24.79 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u, v \in \mathrm{L(E)}$. *On suppose que* $\mathrm{E} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$. *Montrer que ces deux sommes sont directes.*

Solution : On a :

$$\begin{aligned} n &= \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \text{ car } E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v \\ &= \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ d'après la formule de Grassmann} \\ &= n - \dim \operatorname{Ker} u + n - \dim \operatorname{Ker} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ d'après la formule du rang} \\ &= 2n - (\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v)) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ à nouveau d'après la formule de Grassmann} \\ &= 2n - n - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ car } E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v \end{aligned}$$

donc $0 = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$ *et ceci n'est possible que si* $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = 0$. *On en déduit que les deux sommes sont directes.*

Exercice 24.80 ♡♡♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme* $u \in L(E)$. *Montrer qu'il existe un automorphisme* $v \in GL(E)$ *et un projecteur* $p \in L(E)$ *tels que* $u = v \circ p$.

Solution : *Si* u *est inversible, il suffit de prendre* $v = u$ *et* $p = \mathrm{id}_E$. *Sinon, notons* $r = \dim \operatorname{Ker} u$. *D'après la formule du rang, on a* $n - r = \dim(\operatorname{Im} u)$. *Considérons une base* $(e_1, \dots, e_r)$ *de* $\operatorname{Ker} u$ *et complétons-la en une base* $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ *de* E. *Posons* $f_{r+1} = u(e_{r+1}), \dots, f_n = u(e_n)$. *On vérifie que cette famille est libre. Soient* $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_{r+1} f_{r+1} + \dots + \alpha_n f_n = 0$ *alors* $u(\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0$ *et* $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. *Donc* $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0$ *mais comme* $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ *est libre,* $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$. *On complète alors cette famille en une base* $f = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ *de* E. *Définissons alors* p *le projecteur sur* $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ *donné par* $p(e_i) = 0$ *si* $i \in [\![1, r]\!]$ *et* $p(e_i) = e_i$ *si* $i \in [\![r+1, n]\!]$. *Définissons aussi l'application linéaire* v *par* $v(e_i) = f_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$. *Comme* v *envoie une base de* E *sur une base de* E, v *est inversible. On vérifie facilement en calculant l'image des vecteurs de la base* e *que* $v \circ p = u$.

Exercice 24.81 ♡♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *de dimension finie* n *et un endomorphisme* $f \in L(E)$. *Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$
2. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$
3. $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$
4. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
5. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Solution :

1. $\boxed{1) \implies 2)}$ *Comme* $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, *en appliquant la formule de Grassmann puis la formule du rang,* $\dim\left(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f\right) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f - \dim E = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. *Donc* $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. $\boxed{2) \implies 3)}$ *Par définition.*
3. $\boxed{3) \implies 2)}$ *Par la formule du rang.*
4. $\boxed{2) \implies 4)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ *tel que* $y = f(x)$. *Alors* $y = f(x_1) \in \operatorname{Im} f^2$ *car* $x_1 \in \operatorname{Im} f$. *Donc* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ *et on a bien* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
5. $\boxed{4) \implies 5)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. *On utilise la formule du rang :* $n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$. *Comme* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, *il vient que* $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. *Finalement,* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
6. $\boxed{5) \implies 4)}$ *se prouve de la même façon.*
7. $\boxed{5) \implies 3)}$ *Soit* $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ *alors* $f(x) = 0$ *et il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = f(x_0)$. *Donc* $f^2(x_0) = 0$ *et* $x_0 \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. *Alors* $x = f(x_0) = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
8. $\boxed{3) \implies 1)}$ *C'est une conséquence directe de la formule de Grassmann.*

On vérifie que la chaine d'implications est bien fermée.

Exercice 24.82 ♡♡

On note E *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_n[X]$ *des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à* n. *On définit l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & Q \end{array} \right.$$

où Q *est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, dt$$

Montrez que f est un automorphisme de E.

Solution : *On vérifie d'abord que f est bien définie. Si $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$, en utilisant la formule du binôme, on obtient que $\forall x\in\mathrm{E}$,*

$$\mathrm{Q}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\int_0^1 t^{n-k}\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t\right]x^k$$

ce qui montre que $f(\mathrm{P})$ est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
Il est immédiat que f est linéaire. Montrons l'injectivité de f en vérifiant que $\operatorname{Ker} f=\{0\}$. Soit $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$ tel que $f(\mathrm{P})=0$. D'après le calcul précédent,

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \int_0^1 t^k\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Comme $\mathrm{P}(t)=\sum_{k=0}^n a_k t^k$, on obtient alors que

$$\int_0^1 \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_0^1 t^k\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Donc $\forall t\in[0,1]$, $\mathrm{P}(t)=0$, ce qui montre que le polynôme P a une infinité de racines et est donc nul.
Un endomorphisme injectif en dimension finie étant bijectif, f est un automorphisme de E.

Exercice 24.83 ♡♡♡

Suite de l'exercice 19.55 p. 742.
Soit un anneau $(\mathrm{A},+,\times)$. On dit qu'il est régulier lorsque

$$\forall u\in\mathrm{A},\ \exists x\in\mathrm{A}\ :\ u=uxu.$$

Montrer que si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, l'anneau $\mathrm{L}(\mathrm{E})$ est régulier.

Solution : *On choisit une base de E : $(e_1,\dots,e_n)$. Les $u(e_k)$ appartiennent à l'image de u. On considère une base $(f_1,\dots,f_r)$ de $\operatorname{Im} f$ que l'on complète avec $f_{r+1},\dots,f_n)$ de E. On a $f_k=u(x_k)$ pour $1\leqslant k\leqslant r$. On pose $x(f_k)=x_k$ pour $1\leqslant k\leqslant r$ et $x(f_k)=0$ par exemple pour $k>r$. On a alors $u(x(f_k))=u(x_k)=f_k$ pour $1\leqslant k\leqslant r$. Donc pour tout $v\in\operatorname{Im} f$, $u(x(v))=v$. A fortiori pour $v=u(e_k), 1\leqslant k\leqslant n$ et donc $uxu=u$.*

24.7.9 Rang d'une application linéaire

Exercice 24.84

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\longmapsto&(y-z,z-x,x-y)\end{array}\right.$
2. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y,z,t)&\longmapsto&(2x+y+z,x+y+t,x+z-t)\end{array}\right.$
3. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\z&\longmapsto&z+i\bar{z}\end{array}\right.$ *($\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)*

Solution :

1. *On calcule $\operatorname{Ker} f$. On sait que $(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\begin{cases}y-z&=0\\z-x&=0\\x-y=0\end{cases}$. On montre alors que $x=y=z$ et donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}((1,1,1))$. Le vecteur $(1,1,1)$ forme une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim\operatorname{Ker} f=1$. D'après la formule du rang, $\dim\operatorname{Im} f=2$. Une base de $\operatorname{Im} f$ est donc formée de deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires. Il suffit de prendre par exemple $f(1,0,0)=(0,-1,1)$ et $f(0,1,0)=(1,0,-1)$.*
2. *De même, on commence par déterminer $\operatorname{Ker} f$. Pour ce faire, on résout $\begin{cases}2x+y+z&=0\\x+y+t&=0\\x+z-t&=0\end{cases}$. On trouve $y=-2x-z$ et $t=x+z$ donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1=(1,-2,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,1)$ qui sont non colinéaires. Une base de $\operatorname{Ker} f$ est formée de ces deux vecteurs. D'après la formule du rang, $\dim\operatorname{Im} f=2$ et il suffit de trouver deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$. On peut prendre $f(1,0,0,0)=(2,1,1)$ et $f(0,1,0,0)=(1,1,0)$.*
3. *On calcule le noyau de f. On trouve $z=a+ib\in\operatorname{Ker} f\iff z+i\bar{z}=0\iff(a+b)(1+i)=0\iff a+b=0$. Donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1-i)$ et le vecteur $1-i$ forme une base de $\operatorname{Ker} f$. De même, $\operatorname{Im} f=\{z+i\bar{z}\mid z\in\mathbb{C}\}=\{(a+b)(1+i)\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}(1+i)$ et une base de $\operatorname{Im} f$ est $1+i$.*

Exercice 24.85 ♡

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$.

Solution : *Soit* $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R})$. *Alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. *Posons* $a = f(1)$. *Alors* $f : x \mapsto ax$. *Réciproquement, si* f *est de cette forme alors* $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R})$. *On montre ainsi que* $\mathrm{L}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

Exercice 24.86 ♡

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^2$.

Solution : *Soit* (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ *une application linéaire. Alors pour tout* $v = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$, *on a :* $u(v) = xu(e_1) + yu(e_2)$. *Réciproquement, si on se donne deux vecteurs* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ *et si on considère l'application* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & xv_1 + yv_2 \end{array} \right.$ *on montre facilement qu'elle est linéaire. On en déduit que* $\mathrm{L}(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \mapsto xv_1 + yv_2 \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 24.87 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* p *et* $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Montrer que* $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(n, p)$.

Solution : *Comme* $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{F}$, $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim \mathrm{F} = p$. *De plus, par la formule du rang,* $\mathrm{rg}(u) = n - \dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant n$ *d'où* $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(n, p)$.

Exercice 24.88 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, *et* $u \in \mathrm{Ł}(\mathrm{E})$. *Montrer que*

$$(\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u) \Longleftrightarrow (u^2 = 0 \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}(u))$$

Solution : *Soit* $u \in \mathrm{Ł}(\mathrm{E})$ *tel que* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. *Soit* $x \in \mathrm{E}$ *alors* $u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ *donc* $u^2(x) = 0$ *et* $u^2 = 0$. *De plus d'après la formule du rang,* $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = 2 \dim \mathrm{Im}\, u = 2\,\mathrm{rg}(u)$.
Réciproquement, si $u^2 = 0$ *et si* $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$ *alors* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. *En effet, comme* $u^2 = 0$, *il est clair que* $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. *La formule du rang amène* $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u$ *et comme* $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$, $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u$. *On en déduit le résultat.*

Exercice 24.89 ♡

On considère $(n+1)$ *réels distincts* $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *et l'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(x_0), \dots, \mathrm{P}(x_n)\big) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* φ *est un isomorphisme.*
2. *En déduire que si* $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *il existe un unique polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *tel que* $\forall i \in [0, n]$, $\mathrm{P}(x_i) = y_i$ *(polynôme interpolateur de Lagrange).*
3. *Soient deux réels distincts* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et quatre réels* $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$. *Montrer qu'il existe un unique polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ *vérifiant*
$$\mathrm{P}(a) = \alpha,\ \mathrm{P}'(a) = \beta,\ \mathrm{P}(b) = \delta,\ \mathrm{P}'(b) = \gamma$$

Solution :

1. *On montre facilement que* φ *est linéaire. Si* $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ *alors* $\mathrm{P}(x_0) = \cdots = \mathrm{P}(x_n) = 0$. *Donc* P *est de degré au plus* n *et admet* $n+1$ *racines. Ceci n'est possible que si* $\mathrm{P} = 0$. *Donc* φ *est injective. Comme* $\dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, *on en déduit, grâce à la formule du rang que* $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = n+1$ *et donc* φ *est surjective. On prouve ainsi que* φ *est un isomorphisme.*
2. *Le résultat annoncé dans cette question découle directement de la définition d'une bijection.*
3. *On procède de même qu'avant. On considère l'application* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(a), \mathrm{P}'(a), \mathrm{P}(b), \mathrm{P}'(b)\big) \end{array} \right.$. *On montre facilement qu'elle est linéaire. Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\, \theta$. *Alors* a *et* b *sont des racines doubles de* P. *Mais* a *et* b *sont distincts et* P *de degré au plus* 3. *Ceci n'est possible que si* $\mathrm{P} = 0$. *Donc* $\mathrm{Ker}\, \theta = \{0\}$ *et* $\theta = 0$. *On montre comme avant, en utilisant la formule du rang, que* θ *est surjective. Donc* θ *est un isomorphisme. En conséquence de quoi il existe un unique polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ *vérifiant* $\mathrm{P}(a) = \alpha$, $\mathrm{P}'(a) = \beta$, $\mathrm{P}(b) = \delta$, $\mathrm{P}'(b) = \gamma$.

Exercice 24.90 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u, v \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que*

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \mathrm{id} = 0 \implies u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$$

Solution : *On a* $u \circ (v \circ u - u \circ v) = \mathrm{id}$ *donc* u *admet un inverse à droite donné par* $v \circ u - u \circ v$. *Comme* E *est de dimension finie, on en déduit que* u *est inversible.*

Exercice 24.91 ♡

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et* $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$. *Montrer qu'il existe un unique polynôme* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ *vérifiant* $\mathrm{P}' + \mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Solution : *Soit* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' + \mathrm{P} \end{array} \right.$. *On vérifie facilement que* $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$. *De plus* φ *est injective. En effet, si* $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ *alors* $\mathrm{P} + \mathrm{P}' = 0$ *et* $\deg \mathrm{P} = \deg \mathrm{P}'$. *Ceci n'est possible que si* $\mathrm{P} = 0$ *et montre que* $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. *Comme* $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$, *on peut affirmer que* φ *est un automorphisme. On sait en effet d'après le cours qu'un endomorphisme injectif dans un espace de dimension finie est bijectif. Si* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, *il existe alors un unique polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *tel que* $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$, *c'est-à-dire tel que* $\mathrm{P} + \mathrm{P}' = \mathrm{Q}$.

Exercice 24.92 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que :*

1. $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$
2. $|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$.

Solution :

1. *On a*
$$\mathrm{rg}(f+g) = \dim \mathrm{Im}\,(f+g) \leqslant \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g$$
car $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$.
2. *Par ailleurs*
$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}(f-g+g) \leqslant \mathrm{rg}(f-g) + \mathrm{rg}\, g$$
d'où $\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$. *On montre de même que* $\mathrm{rg}\, g - \mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}(g-f)$. *Comme* $\mathrm{rg}(f-g) = \mathrm{rg}(g-f)$, *on en déduit l'inégalité.*

Exercice 24.93 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel réel de dimension* n. *Soit* f *un endomorphisme nilpotent de* E, *c'est-à-dire qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^p = 0$.

1. f *peut-il être bijectif ?*
2. *Prouver que* $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ *et que* $\mathrm{rg}\, f \leqslant n-1$.
3. *Soit* q *le plus petit entier non nul tel que* $f^q = 0$
   (a) *Montrer que :* $\forall k \geqslant q, \quad f^k = 0$.
   (b) *Justifier l'existence de* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.
   (c) *Montrer que :* $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\right)$ *est libre.*
   (d) *En déduire que* $q \leqslant n$ *puis que* $f^n = 0$.
4. *On suppose dans cette question que* $q = n$. *Trouver tous les endomorphismes* $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *qui commutent avec* f.
   Indication 24.15 : On montrera que $g \circ f = f \circ g$ *si et seulement si il existe* $(a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathrm{K}^n$ *tels que* $g = a_0 \,\mathrm{id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Solution :

1. *Si* f *était bijective alors il en serait de même de* f^p *car ce serait une composée de fonctions bijectives. Or* $f^p = 0$ *qui n'est pas bijective donc* f *n'est pas bijective.*
2. *On a vu dans le cours que pour un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*−espace vectoriel de dimension finie, on a équivalence entre le fait que cet endomorphisme est bijectif, surjectif ou injectif. Comme* f *n'est pas bijective, elle n'est à la fois ni injective et ni surjective. Il vient alors :* $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ *et* $\mathrm{rg}\, f \leqslant n-1$.
3. (a) *La composée de l'application nulle par une application quelconque est une application nulle !*
   (b) *Comme* q *est le plus petit entier non nul tel que* $f^q = 0$, f^{q-1} *n'est pas identiquement nul sur* E *: il existe donc* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.

(c) Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0 \quad (\star).$$

Alors, par linéarité : $f^{q-1}\left(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0)\right) = 0$ et : $\alpha_0 f^{q-1}(x_0) + \alpha_1 f^q(x_0) + \dots + \alpha_{q-1} f^{2q-2}(x_0) = 0$ mais comme : $\forall k \geqslant q, \quad f^k = 0.$, il vient $\alpha_0 x_0 = 0$ et donc : $\alpha_0 = 0$. L'égalité $(\star)$ devient alors : $\alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0$. En appliquant f^{q-2} à cette égalité, on montre de la même façon que $\alpha_1 = 0$. On répète encore $n-2$ fois ce procédé et on montre aussi que : $\alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$. La famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\right)$ est bien libre.

(d) Une famille libre de E est de cardinal au maximum la dimension de E. Donc $q \leqslant n$. D'après la question 3(a), il est alors clair que $f^n = 0$.

4. On suppose que g est un endomorphisme de E qui commute avec f. Comme $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$. On calcule alors l'image par g des vecteurs de la base $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$:

$$g\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(g(x_0)\right) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{i+k}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x_0)\right)$$

et on peut alors affirmer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$. Réciproquement, si g est de cette forme, on vérifie facilement qu'elle commute avec f.

Exercice 24.94 ♡

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1. *Il existe $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.*
2. *La dimension de E est paire.*

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. D'après la formule du rang : $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 \dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \mathrm{E}$ est bien pair.

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $\dim \mathrm{E} = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ alors considérons une base $\left(e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n\right)$ de E ainsi que l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ donné par : $\forall i \in [\![1, n]\!]\ f(e_i) = e'_i$ et $f\left(e'_i\right) = 0$. On vérifie facilement que f est linéaire, que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(e'_1, \dots, e'_n\right)$ et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(e'_1, \dots, e'_n\right)$.

24.7.10 Formes linéaires en dimension finie

Exercice 24.95 ♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Vect}(x)$ sont supplémentaires dans E.

Solution : Posons $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Vect}(x)$. Comme $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n-1$, on a la disjonction : $\dim \mathrm{F} = n-1$ ou $\dim \mathrm{F} = n$. Si $\dim \mathrm{F} = n-1$ alors $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} \varphi$ et forcément $x = 0$ ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc $\dim \mathrm{F} = n$ et $\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Vect}(x) = \mathrm{E}$. Si $u \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Vect}(x)$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha \cdot x$ et $0 = \varphi(u) = \alpha \varphi(x)$. Comme $x \in \mathrm{E} \setminus \operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi(x) \neq 0$ et $\alpha = 0$ ce qui prouve que $u = 0$ et donc que $\operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Vect}(x) = \{0\}$. $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Vect}(x)$ sont bien supplémentaires dans E.

Exercice 24.96 ♡♡

Soient f et g des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie telles que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha \cdot g$.

Solution :

Si $f \equiv 0$, le résultat est clair. Sinon, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) \neq 0$. Par conséquent $\operatorname{Vect}(x)$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires. Puisque $g(x) \neq 0$, on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \alpha g(x)$. On pose $h = f - \alpha g$. L'application h est nulle sur $\operatorname{Ker} f$ et $h(x) = 0$ donc $h \equiv 0$ d'où le résultat.

Exercice 24.97 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme. On suppose que $\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star$, $\varphi \circ u = 0_{\mathrm{E}^\star}$. Montrer que $u = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}$.

Solution : *Supposons que u ne soit pas nulle. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $y_0 = u(x_0) \neq 0$. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(y_0)$ et considérons un supplémentaire G à F dans E. Ce dernier existe car E est de dimension finie. On sait que tout $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \alpha y_0 + x_\mathrm{G}$ où $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On introduit l'application φ sur E définie par $\varphi(x) = \alpha$. On vérifie que φ est linéaire. Si $x = \alpha y_0 + x_\mathrm{G}$ et si $x' = \alpha' y_0 + x'_\mathrm{G}$ sont deux vecteurs de E alors par unicité de la décomposition d'un vecteur sur $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, pour $a, a' \in \mathbb{K}$, le vecteur $ax + a'x'$ se décompose sous la forme $ax + a'x' = (a\alpha + a'\alpha') y_0 + (ax_\mathrm{G} + a'x'_\mathrm{G})$ et $\varphi(ax + a'x') = a\alpha + a'\alpha' = a\varphi(x) + a'\varphi(x')$. De plus, $\varphi(y_0) = 1$ donc φ n'est pas nulle et $\varphi(u(x_0))$ non plus. On aboutit alors à une contradiction et u est nulle.*

Exercice 24.98 ♡♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ n formes linéaires sur E. Montrer que la famille $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ si et seulement si l'application $\theta : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que f est libre. Soit $x \in \operatorname{Ker}\theta$. Alors $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$. Par l'absurde, supposons que $x \neq 0$. Considérons un supplémentaire H à $\mathrm{Vect}(x)$ dans E et considérons la forme linéaire φ donnée par $\varphi_{|\mathrm{H}} = 0$ et $\varphi(x) = 1$. Comme f est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. Mais alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ et on aboutit à une absurdité. Donc $x = 0$ et $\operatorname{Ker}\theta = \{0\}$. Donc θ est injective. Comme $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n$, θ est un isomorphisme.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons que f est liée et montrons que θ n'est pas injective. Un des vecteurs de f peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à renuméroter les vecteurs de f, que ce soit le dernier. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i$. Si $x \in \mathrm{E}$ alors*

$$\theta(x) = \left(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i(x)\right) \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$$

où

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \varepsilon_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ème place}}, 0, \dots, \lambda_i\right).$$

On montre sans difficulté que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est libre donc $\dim \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = n-1$. Alors $\dim \operatorname{Im}\theta \leqslant n-1$ et θ n'est pas surjective donc n'est pas un isomorphisme.

24.7.11 Récurrences linéaires

Exercice 24.99

Programmer la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. *Que valent u_{20}, u_{50}, u_{100} ?*
2. *Trouvez-vous les mêmes résultats que votre voisin ?*
3. *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_1^n$.*
4. *Les résultats sont ils en accord avec ceux des questions précédentes ? Pourquoi ?*

Solution :

1. *On trouve par exemple comme valeurs approchées $u_{20} = -10^{-7}$, $u_{50} = -4 \times 10^{-7}$ et $u_{100} = -11892$.*
2. *Pour des raisons qui apparaitront plus tard, il n'y a pas de raison de trouver la même chose pour u_{100}, sauf à travailler avec le même logiciel sur le même type de matériel.*
3. *Les deux suites (u_n) et (u_1^n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et coïncident sur les deux premiers termes. Elles sont donc égales.*
4. *On a $u_{100} = 10^{-27}$ environ, à comparer avec -11892 trouvé précédemment. Nous sommes ici en présence d'un cas où les accumulations d'erreurs d'arrondis provoquent à coup sûr ce phénomène.*
   Les suites solutions de $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ sont de la forme $ar_1^n + br_2^n$, où a et b sont déterminés par les conditions initiales u_0 et u_1. Une petite erreur sur u_0 et u_1 entraîne une petite erreur sur a et b. Mais cette erreur sur b fait que b se retrouve non nul, ici en l'occurrence strictement négatif, au lieu d'être nul, et de ce fait, la suite programmée tend vers $-\infty$. De fait dès que l'on trouve deux termes consécutifs de la suite qui sont de même signe, la suite va tendre vers $-\infty$ (ou $+\infty$)

24.7.12 L'espace vectoriel des polynômes

Exercice 24.100 ♡

Soient

$$P_1 = 2X^2 - X - 1, \quad P_2 = X^2 + 2X, \quad P_3 = X^2 - 1$$

Montrer que la famille $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$ *alors avec* $X = 1$, *on obtient que* $2\alpha_2 = 0$, *c'est-à-dire* $\alpha_2 = 0$. *On a donc* $\alpha_1 P_1 + \alpha_3 P_3 = 0$. *Mais ces deux polynômes ne sont pas proportionnels donc* $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. *La famille* $\mathscr{P}$ *est donc libre. Comme* $\operatorname{Card}(\mathscr{P}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, *c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24.101 ♡♡

1. *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, *on pose* $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *En étudiant la preuve de la question précédente, déterminer une condition suffisante pour qu'une famille* $(Q_0, \dots, Q_n)$ *de polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *En utilisant ce critère, montrer que la famille* $\mathscr{R} = (R_0, \dots, R_n)$ *où, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $R_k = (X-a)^k + (X+a)^k$, $a \in \mathbb{R}$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. *En utilisant la formule du binôme, on calcule facilement que, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i$. *On a en particulier* $\deg P_k = k$ *et on reconnaît une famille de* $\mathbb{R}_n[X]$ *étagée en degré. Donc elle est libre et comme son cardinal est égal à la dimension de* $\mathbb{R}_n[X]$, *elle forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *L'argument clé dans la démonstration précédente est que :* $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k$. *Une famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant cette propriété forme toujours une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *Il est clair que pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg R_k = k$. *La famille* $\mathscr{R}$ *forme donc une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.102 ♡♡

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$, *on pose* $P_k = X^k (a - X)^{n-k}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Solution :

1. *Soient* $\alpha, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (a - X)^{n-k} = 0$.
   - *En remplaçant* X *par* 0 *dans cette égalité, on trouve :* $\alpha_0 = 0$ *et celle-ci devient :* $\sum_{i=k}^{n} \alpha_k X^k (a - X)^{n-k} = 0$.
   - *Le terme de gauche de cette dernière égalité est un polynôme divisible par* X.
     On a alors : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^{k-1} (a - X)^{n-k} = 0$. *On recommence comme en 1., on montre que* $\alpha_1 = 0$.
   - *On répète* $n-2$ *fois ces opérations et on montre que* $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

   On a ainsi montré que $\mathscr{P}$ *est libre. Comme cette famille est de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{C}_n[X]$, *on en déduit que c'est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.
2. *À partir de* $P_k(X) = X^{k-1} (a - X)^{n-k}$, *on définit* $\tilde{P}_k(X) = X^n P_k(\frac{1}{X}) = (aX - 1)^{n-k}$. *Les* $(\tilde{P}_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *forment une famille échelonnée en degrés, donc une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.
3. *C'est du cours : Proposition* **??** *p.* **??**.

Exercice 24.103 ♡♡

On pose $P_0 = 1$ *et pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, *on pose*

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. *Montrer que* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Montrer que :* $\forall l \in_{\mathbb{Z}}, \quad \forall k \in]0, n[, \quad P_k(l) \in \mathbb{Z}$.
3. *Déterminer l'ensemble des polynômes* P *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant :* $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(i) \in \mathbb{Z}$.

Solution :

1. *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$. *On reconnaît une famille étagée en degré, on en déduit que* $\mathscr{P}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Si* $k=1$*, le résultat est évident. Supposons* $k>1$*. Si* $l \geqslant k$ *alors :* $\mathrm{P}_k(l) = \dfrac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} = \boxed{\dbinom{l}{k}}$*. Si* $l \in [\![0, k-1]\!]$ *on a* $\mathrm{P}_k(l) = \boxed{0}$ *et enfin si* $l<0$*, on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_k(l) &= \frac{-|l|(-|l|-1)\dots(-|l|-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{|l|(|l|+1)\dots(|l|+k-1)}{k!} \\ &= \boxed{(-1)^k \binom{|l|+k-1}{k}} \end{aligned}$$

Dans chacun des trois cas, $\mathrm{P}_k(l) \in \mathbb{Z}$*.*

3. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *vérifiant :* $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(i) \in \mathbb{Z}$*. Dans la base* $\mathscr{P}$*,* P *s'écrit :* $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^n a_k \mathrm{P}_k$ *avec* $a_k \in \mathbb{R}$*. Mais,* $\mathrm{P}(0) = a_0$ *donc* $a_0 \in \mathbb{Z}$*. De même* $\mathrm{P}(1) = a_0 + a_1$ *donc* $a_1 \in \mathbb{Z}$*. Supposons que* $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ *pour* $k \in [\![1, n-1]\!]$ *et montrons qu'il en est de même de* a_{k+1}*. On a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(k+1) &= \mathrm{P}_0(k+1) + a_1\mathrm{P}_1(k+1) + \dots + a_k\mathrm{P}_k(k+1) + a_{k+1}\mathrm{P}_{k+1}(k+1) \\ &= \underbrace{\mathrm{P}_0(k+1) + a_1\mathrm{P}_1(k+1) + \dots + a_k\mathrm{P}_k(k+1)}_{\in\mathbb{Z}} + a_{k+1} \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{P}(k+1) \in \mathbb{Z}$*, il en est de même de* a_{k+1}*. On montre ainsi que tous les coefficients de* P *sont entiers. Réciproquement, un polynôme dont les coordonnées dans la base* $\mathscr{P}$ *sont entières est à valeurs entières sur les entiers. En résumé, l'ensemble recherché est* $\boxed{\mathbb{Z}_n[\mathrm{X}]}$*.*

Exercice 24.104 ♡♡

Considérons le $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{C}_5[\mathrm{X}]$ *et* $\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 + 1$*.*

1. *Montrer que*
$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{C}_5[\mathrm{X}] \mid \mathrm{A} \mid \mathrm{P}\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_5[\mathrm{X}]$
2. *Déterminer une base et la dimension de* F*.*
3. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que :* $\mathrm{F} = \left\{\left(a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d\right)\left(\mathrm{X}^2+1\right) \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\right\} = \mathrm{V}ect(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4)$ *avec* $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^3\left(\mathrm{X}^2+1\right)$*,* $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2\left(\mathrm{X}^2+1\right)$*,* $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}\left(\mathrm{X}^2+1\right)$ *et* $\mathrm{P}_1 = \left(\mathrm{X}^2+1\right)$*.* F *est donc un sous-espace vectoriel de* E*.*
2. *La famille* $\mathscr{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4)$ *est génératrice de* F*. De plus si* $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ *est tel que* $a\mathrm{P}_1 + b\mathrm{P}_2 + c\mathrm{P}_3 + d\mathrm{P}_4 = 0$ *alors* $a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d = 0$ *et* $a=b=c=d=0$*. Cette famille est donc libre et elle forme une base de* F*. On en déduit que* $\dim \mathrm{F} = 4$*.*
3. *Posons* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(1, \mathrm{X})$*. Il est clair que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ *et par application de la formule de Grassmann,* $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = 6 = \dim \mathrm{E}$*. On en déduit que* $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}$ *et donc que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*.*

Exercice 24.105 ♡

Soit P *un polynôme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$*, de degré inférieur ou égal à* n*.*
Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Solution : *Il suffit de le vérifier pour une famille génératrice de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *:* X^m*. En posant* $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i=j$ *et* $\delta_{i,j} = 0$ *sinon, le membre de gauche égale*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{\delta_{k,m}}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \\ &= \int_0^x \mathrm{P}(t)\,dt \end{aligned}$$

D'autre part le membre de droite égale

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)x^{n-k}}{(k+1)!}x^{k+1}\\
&= x^{m+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= x^{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(m+1)!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m+1}{k+1}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(1-\underbrace{\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}}_{=0}\right)\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée. De plus on a

$$\boxed{\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}],\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}=\int_0^x \mathrm{P}(t)\,dt}.$$

Exercice 24.106

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{E}_m(\mathrm{X})=\binom{n}{m}\mathrm{X}^m(1-\mathrm{X})^{n-m}$.
Exprimer la base $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^n)$ *dans la base* $(\mathrm{E}_0,\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_n)$.

Solution : *On considère* $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ \mathrm{X}^m & \longmapsto & \mathrm{E}_m^*\end{array}\right.$ *avec* $\mathrm{E}_m^*=\mathrm{X}^m(1-\mathrm{X})^{n-m}=(1-\mathrm{X})^n\left(\frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\right)^m$. *Donc* $\varphi(\mathrm{P})=(1-\mathrm{X})^n\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\right)=\mathrm{Q}(\mathrm{X})$.

En posant $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}$, *on a* $\mathrm{X}=\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}$ *et donc* $1-\mathrm{X}=\frac{1}{1+\mathrm{Y}}$.

Comme $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}\right)=\frac{1}{(1-\mathrm{X})^n}\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ *on a* $\mathrm{P}(\mathrm{Y})=(1+\mathrm{Y})^n\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Y}}\right)$.

Les $\left(\mathrm{E}_m^*\right)_{0\leqslant m\leqslant n}$ *forment une famille de* E *échelonnée en valuations. C'est donc une base de* E. φ *est une bijection, de bijection réciproque* $\psi\,\mathrm{Q}\longmapsto(1+\mathrm{X})^n\mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{X}}\right)$.

On peut le vérifier directement :$\psi\left(\mathrm{E}_m^*\right)=(1+\mathrm{X})^n\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{X}}\right)^m\left(1-\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{X}}\right)^{n-m}=\mathrm{X}^m(1+\mathrm{X})^{n-m}\left(\frac{1}{1+\mathrm{X}}\right)^{n-m}=\mathrm{X}^m$.

Maintenant $\psi(\mathrm{X}^k)=(1+\mathrm{X})^n\frac{\mathrm{X}^k}{(1+\mathrm{X})^k}=\mathrm{X}^k(1+\mathrm{X})^{n-k}=\mathrm{X}^k\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}\mathrm{X}^m=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}\mathrm{X}^p=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}\psi\left(\mathrm{E}_p^*\right)$.

Donc puisque ψ *est bijective,* $\mathrm{X}^k=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}\mathrm{E}_p^*=\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}}\mathrm{E}_p=\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{p}{k}}{\binom{n}{k}}\mathrm{E}_p$.

On peut le vérifier directement :

$\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}}\mathrm{E}_p=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}\mathrm{X}^p(1-\mathrm{X})^{n-p}=\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}\mathrm{X}^{m+k}(1-\mathrm{X})^{n-m-k}=\mathrm{X}^k\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}\mathrm{X}^m(1-\mathrm{X})^{n-k-m}=\mathrm{X}^k$.

24.7.13 Endomorphismes opérant sur les polynômes

Exercice 24.107 ♡♡

Soit l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array} \right.$$

Montrer que φ *est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.*

Solution : *On montre facilement que* φ *est linéaire. Soit un polynôme* $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. *Si* $P \neq 0$, *on peut écrire* $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ *avec* $a_n \neq 0$. *Alors* $P = XP'$ *d'où* $a_n X^n + \dots = n a_n X^n + \dots$. *En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que* $a_n(1-n) = 0$. *Donc, puisque* $a_n \neq 0$, $n = 1$. *Mais si* $n = 1$, $P = aX + b$ *et alors* $P = XP' \implies b = 0$. *Donc* $P = aX$. *Réciproquement, si* $P = aX$, *(*$a \in \mathbb{R}$*), on a bien* $P = XP'$. *En conclusion,* $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X)}$.

Déterminons $\operatorname{Im}\varphi$. *Soit* $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \operatorname{Im}\varphi$. *Alors il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P - XP' = Q$. *En examinant les degrés, il faut que* $\deg P = n$. *Posons* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. *On doit donc avoir* $\forall k \in [0, n]$, $(1-k)a_k = b_k$. *Une condition nécessaire pour que* $Q \in \operatorname{Im}\varphi$ *est donc que* $b_1 = 0$. *Réciproquement, si* $b_1 = 0$, *en posant* $a_k = \dfrac{b_k}{1-k}$ *pour* $k \neq 1$ *et* $a_1 = 0$, *on a bien* $\varphi(P) = Q$. *En conclusion,* $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \{b_n X^n + \dots + b_0 ; b_1 = 0\}}$.

Exercice 24.108 ♡♡

Soit $A = X^3 + X^2 + X + 1$ *et* $E = \mathbb{R}_n[X]$. *Considérons l'application*

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r(P) \end{array} \right.$$

où $r(P)$ *désigne le reste de la division euclidienne de* P *par* A.

1. *Montrer que* r *est bien définie et que* $r \in \mathscr{L}(E)$..
2. *Prouver que* $r^2 = r$. *Qu'en déduisez vous ?*
3. *Déterminer l'image et le noyau de* r.

Solution :

1. *Soit* $P \in E$. *Par application du théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple* $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $P = AQ + R$ *et* $\deg R < 3$. *On a donc* $r(P) = R$ *et* r *est bien définie. Si on considère un autre polynôme* $\tilde{P} \in E$, *il existe un couple* $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $\tilde{P} = A\tilde{Q} + \tilde{R}$ *et* $\deg \tilde{R} < 3$. *De plus, pour tout* $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ *:*

   $$\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P} = A\left(\alpha Q + \tilde{\alpha}\tilde{Q}\right) + \left(\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}\right)$$

   et $\deg\left(\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}\right) < 3$. *Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de* $\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P}$ *par* A *est* $\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}$. *On prouve ainsi que* $r\left(\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P}\right) = \alpha r(P) + \tilde{\alpha} r\left(\tilde{P}\right)$ *et donc* $r \in \mathscr{L}(E)$.
2. *Avec les notations de la question précédente,* $r(P) = R$ *avec* $\deg R < 3$. *Donc* $R = 0A + R$ *et par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne,* $r(R) = R$. *On prouve ainsi que* $r^2 = r$. r *est donc un projecteur.*
3. *Il est clair que le noyau de* r *est l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui sont divisibles par* A. *Il est aussi clair que* $\operatorname{Im} r \subset \mathbb{R}_2[X]$. *Mais si* $P \in \mathbb{R}_2[X]$ *alors* $r(P) = P$ *donc on a aussi :* $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} r$ *et donc* $\operatorname{Im} r = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24.109 ♡♡♡

1. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*

   $$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que* Δ *est bien définie puis que c'est une application linéaire.*

   (b) *Déterminer le noyau de* Δ.

   (c) *En déduire que* Δ *est surjective.*
2. *On considère maintenant* $E = \mathbb{C}[X]$ *et*

   $$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que* Δ *est un endomorphisme de* E.

   (b) *Déterminer* $\operatorname{Im}\Delta$.

(c) *Soient* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que :*

$$\Delta^n(\mathrm{P}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$$

(d) *En déduire que si* $\deg \mathrm{P} < n$ *alors on a :* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(k) = 0$.

Solution :

1. (a) *Soit* $\mathrm{P} = a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$. *Montrons que* $\Delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. *On a :*

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{P}) &= \left(a_{n+1}(\mathrm{X}+1)^{n+1} + a_n(\mathrm{X}+1)^n + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\right) - \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + a_n\mathrm{X}^n + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0\right) \\ &= \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \underbrace{\ldots}_{\text{termes de degré } \leqslant n}\right) - \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \underbrace{\ldots}_{\text{termes de degré } \leqslant n}\right)\end{aligned}$$

donc $\deg \Delta(\mathrm{P}) \leqslant n$ *et* $\Delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. *Par ailleurs, si* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *alors :*

$$\begin{aligned}\Delta\left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right) &= \left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right)(\mathrm{X}+1) - \left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right)(\mathrm{X}) \\ &= \alpha\left(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})\right) + \beta\left(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})\right) \\ &= \alpha\Delta(\mathrm{P}) + \beta\Delta(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

donc Δ *est linéaire.*

(b) *Soit* $m \geqslant 1$ *et soit* $\mathrm{P} = a_m\mathrm{X}^m + \ldots + a_0$ *un polynôme de degré* $m \in \mathrm{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *avec* $m \leqslant n+1$. *On a donc :* $a_m \neq 0$. *Supposons que* $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\Delta$. *Alors* P *vérifie* $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ *ce qui amène :*

$$a_m(\mathrm{X}+1)^m + \ldots + a_0 = a_m\mathrm{X}^m + \ldots + a_0.$$

Le coefficient du terme de degré $m-1$ *de* $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ *est* $ma_m + a_{m-1}$ *et celui de* P *est* a_{m-1}. *Les deux polynômes étant égaux, il en est de même de leurs coefficients, ce qui amène* $m = 0$ *car* $a_m \neq 0$. *On en déduit que* P *est un polynôme constant. Réciproquement, on vérifie que tout polynôme constant est élément du noyau de* Δ *et donc* $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$.

(c) *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Im}\Delta = n+1$ *et comme* $\dim \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] = n+1$, *il vient* $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Δ *est donc surjective.*

2. (a) *On montre de la même façon que précédemment que* Δ *est un endomorphisme.*

(b) *Montrons que* Δ *est surjective. Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *et* $n = \deg \mathrm{P}$. *Par application de la partie précédente,* $\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]} : \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *est surjective. Comme* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *il existe* $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *tel que* $\Delta(\mathrm{Q}) = \mathrm{P}$. *On en déduit que* Δ *est surjective et que* $\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{C}[\mathrm{X}]}$.

(c) *Introduisons l'application* $\delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{array}\right.$. *On vérifie facilement que* δ *est un endomorphisme de* E *et que* $\Delta = \delta - \mathrm{id}$. *De plus, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta^k(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$. *Comme les endomorphismes* δ *et* id *commutent, la formule du binôme donne, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\Delta^n = (\delta - \mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \delta^k$$

donc pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ *:*

$$\Delta^n(\mathrm{P}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{P}(\mathrm{X}+k).$$

3. *Remarquons que pour tout polynôme non constant de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\deg \Delta(\mathrm{P}) = \deg \Delta(\mathrm{P}) - 1$. *On en déduit que si* $\deg \mathrm{P} < n$ *alors* $\Delta^n(\mathrm{P}) = 0$ *et en utilisant la relation établie dans la question précédente, on obtient :* $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(k) = 0}$

Exercice 24.110 ♡

Déterminer dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *les polynômes* P *satisfaisant à* $n(n-1)\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' = 0$. $(n \geqslant 2)$.

1. *Montrer que* P *est nécessairement nul ou de degré* n.
2. *Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension* 1.

3. *Démontrer que* P *est un polynôme de même parité que* n. *En déduire la nullité de certains coefficients de* P.
4. *Établir une relation de récurrence entre les coefficients de* P, *déterminer* P *et montrer que :*

$$1+\sum_{2\leqslant 2q\leqslant n}(-1)^q\frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}=0.$$

Solution :

1. *Supposons que* P *est une solution non nulle et soit* λX^k *son terme dominant. Comme les termes dominants de* $n(n-1)P$ *et de* $(X^2-1)P''$ *sont égaux, on en déduit que* $\lambda n(n-1)=\lambda k(k-1)$ *d'où* $n^2-n=k^2-k$ *soit* $(n-k)(n+k-1)=0$ *d'où* $n=k$ *ce qu'il fallait vérifier.*
2. *L'ensemble des solutions est le noyau de l'endomorphisme* φ *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *défini par :* $\varphi(P)=n(n-1)P-(X^2-1)P''$. *D'après la question précédente, pour* $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\deg(\varphi(X^k))=k$. *Donc la famille* $(\varphi(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ *est une famille échelonnée en degrés. Elle engendre donc un un espace vectoriel de dimension* $n-1$. *Donc la dimension de l'image de* φ *est supérieure ou égale à* $n-1$. *De plus si* $\deg P=n$, *alors* $\deg(\varphi(P))\leqslant n-1$. *Donc* $\mathrm{I}m(\varphi)=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *et la dimension du noyau de* φ *est donc égale à* 1.
3. *Il est clair que si* P *est solution non nulle, alors* $Q=P(-X)$ *est aussi solution, de même degré* n. $Q-(-1)^nP$ *appartient donc aussi à* $\mathrm{Ker}\,\varphi$. *Comme son degré est* $<n$, *c'est le polynôme nul. Ce qu'il fallait vérifier.*

   On en déduit qu'en posant $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ *on a* $a_{n-(2q+1)}=0$.
4. *En posant* $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ *on a* $P''=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_kX^{k-2}=\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k$ *et* $XP''=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_kX^k$. *Pour* $k=0,\dots,n-2$, *le coefficient de degré* k *du polynôme* $n(n-1)P-(X^2-1)P''$ *est nul,*

   donc $n(n-1)a_k-k(k-1)a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$, *donc* $a_k=\dfrac{(k+2)(k+1)}{k(k-1)-n(n-1)}a_{k+2}=-\dfrac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n-k+1)}a_{k+2}$.

   En posant $k=n-2q$, $a_{n-2q}=-\dfrac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}a_{n-2(q-1)}$,

   d'où

$$a_{n-2q}=(-1)^q\underbrace{\frac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}}_{q}\times\underbrace{\frac{(n-2q+4)(n-2q+3)}{(2q-2)(2n-2q+1)}}_{q-1}\times\dots\times\underbrace{\frac{n(n-1)}{2(2n-3)}}_{q=1}a_n.$$

   Et donc

$$a_{n-2q}=(-1)^qa_n\frac{n!}{(n-2q)!\times2\times\dots\times2q\times(2n-2q-1)\times\dots\times(2n-3)}.$$

   Soit $a_{n-2q}=(-1)^qa_n\dfrac{n!}{(n-2q)!2^qq!\times(2n-2q-1)\times\dots\times(2n-3)}$. *On écrit au numérateur les* q *facteurs pairs qui manquent pour avoir le produit de* $2n-2q-1$ *à* $2n-2$ *au dénominateur :*

$$a_{n-2q}=(-1)^qa_n\binom{n}{2q}\frac{(2q)!\times(2n-2q)\times(2n-2q+2)\dots\times(2n-4)\times(2n-2)}{2^qq!\times(2n-2q-1)\times(2n-2q)\times\dots\times(2n-3)\times(2n-2)}.$$

   Comme $(2n-2q-1)\times(2n-2q)\times\dots\times(2n-3)\times(2n-2)=\dfrac{(2n-2)!}{(2n-2q-2)!}$,

$$a_{n-2q}=(-1)^qa_n\binom{n}{2q}\frac{(2q)!2^q(n-q)(n-q+1)\times\dots\times(n-1)(2n-2q-2)!}{2^qq!(2n-2)!}$$

$$=(-1)^qa_n\binom{n}{2q}\frac{(n-1)!}{q!(n-q-1)!}\frac{(2q)!(2n-2q-2)!}{(2n-2)!}=(-1)^qa_n\frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}.$$

   La dernière égalité traduit le fait que $P(1)=0$ *pour une solution* P *non nulle.*