Chapitre 4

Dynamique des fluides parfaits incompressibles

I Equation d'Euler

L'écoulement du fluide parfait est gouverné par les équations d'Euler obtenues en appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{grad}\,p + \rho\vec{g}$$

Où $\frac{dV}{dt}$ est la dérivée particulaire ou matérielle : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left[\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right]$

D'où $\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V}\right] = -\overrightarrow{grad}\,p + \rho\vec{g}$ (1)

Avec $\vec{V}(u\,v\,w)$ et $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ \ \frac{\partial}{\partial y}\ \ \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Projection

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + 0$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + 0$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

II Equation de Bernoulli

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible :

$$\rho[(V.grad)V] = -grad\,p + \rho g$$

Comme $g = -g\overrightarrow{e_z}$ alors on peut écrire : $-\rho\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(\rho g z)$

Par ailleurs l'égalité vectorielle suivante est toujours vérifiée :

$$\left(\vec{V}\overrightarrow{grad}\right)\vec{V} = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\left(\vec{V}\vec{V}\right) - \vec{V}\wedge\left(\overrightarrow{grad}\wedge\vec{V}\right)$$

Par conséquent :$\rho\left(\vec{V}grad\right)\vec{V} = -\overrightarrow{grad}\,p + \rho\vec{g}$

$$\frac{1}{2}\rho\,\overrightarrow{grad}\left(\vec{V}\vec{V}\right) - \rho V\wedge\left(\overrightarrow{grad}\wedge\vec{V}\right) = -\overrightarrow{grad}\,p - \overrightarrow{grad}(\rho g z)$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right) + \overrightarrow{grad}\,p + \overrightarrow{grad}(\rho g z) = \rho\vec{V}\wedge\left(\overrightarrow{grad}\wedge\vec{V}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z\right) = \rho V \wedge \left(\overrightarrow{grad} \wedge \vec{V}\right)$$

L'écoulement est irrotationnel : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ ***par conséquent***

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z\right) = 0$$

Donc : $\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = constante$ ***C'est la relation de Bernoulli***

En tout point de l'écoulement irrotationnel

III-Interprétation de l'équation de Bernoulli

a) Interprétation en énergie

Multiplions tous les termes de l'équation de bernoulli par un volume V :

$$p.V + \rho g z.V + \frac{1}{2}\rho v^2.V = cte.V$$

p.V : Travail des forces de pressions : énergie potentielle due aux forces de pression.

ρgz.V =mgz : énergie potentielle due aux forces de pesanteur.

½ ρv^2.V = ½ mv^2 :énergie cinétique.

Cte.V = E_m : énergie totale :énergie mécanique

Par conséquent : $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{E_m}{V}$

Correspond à une énergie mécanique par unité de volume

L'énergie mécanique reste constante le long d'une ligne de courant ; il n'y a pas de dissipation d'énergie.

b) Interprétation en pression

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{E_m}{V}$$

p : pression statique

p + ρgz =p^* : pression motrice ; elle génère le mouvement

½ ρv^2 :pression cinétique ; elle résulte du mouvement.

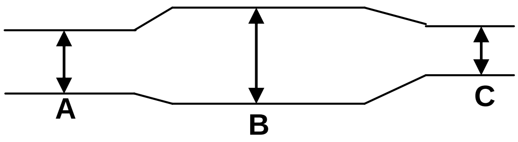
$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_t$: pression totale (ou charge totale)

La pression ou la charge reste constante le long d'une même ligne de courant ;pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait.

IV-Applications

a) Phénomène de Venturi – Mesure de débit

On considère une conduite le long de laquelle a été placé un rétrécissement :



p_A, p_B et p_C sont les prises de pression aux points A, B et C

on applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant qui passe par A, B etC :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

Or $Z_A = Z_B = Z_C = 0$

$$p_{atm} + \rho g z_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_{atm} + \rho g z_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_{atm} + \rho g z_{C'} + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$\rho g z_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g z_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = \rho g z_{'C} + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$z_{A'} + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2}\frac{v_C^2}{g}$$

On sait par ailleurs que le débit volumique est conservé :

$$q_v = S_A V_A = S_B V_B = S_C V_C$$

Remarquons que : $S_A > S_B \quad \Rightarrow \quad V_A < V_B \quad \Rightarrow \quad Z_{A'} > Z_{B'}$

Rétrécissement Accélération dépression

Et que si $S_A = S_C \quad alors \; V_A = V_C \; et \; Z_{A'} = Z_{C'}$

$$Z_{A'} + \frac{1}{2}\frac{V_A^2}{g} = Z_{B'} + \frac{1}{2}\frac{V_B^2}{g} \quad \Rightarrow \Delta Z = Z_{A'} - Z_{B'} = \frac{1}{2g}\left(V_B^2 - V_A^2\right)$$

$$S_A V_A = S_B V_B \quad \Rightarrow V_B = V_A \frac{S_A}{S_B}$$

$$\boldsymbol{Donc} \quad \Delta Z = \frac{1}{2g} V_A^2 \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) \qquad \boldsymbol{SOIT} \quad V_A = \sqrt{\frac{2g\Delta Z}{\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1}}$$

Et le débit dans la conduite :$q_V = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta Z}{S_A/S_B{}^2 - 1}}$

b) Ecoulement par un orifice – Formule de Toricelli

Voir Exercices résolus