الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي هو متغير يمثل النتائج العددية لظاهرة عشوائية غير مضمونة النتائج مسبقا من بين قيم ممكنة له، حيث يجب أن يكون المتغير العشوائي قابل للقياس، وهذه العلاقة تسمى بالمتغير العشوائي الذي يعرف على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة.

رياضياتيا : نرفق بكل عنصر من فضاء العينة قيمة حقيقية فنكون بذلك عرفنا دالة على هذا الفضاء، ان هذه الدالة تسمى بالمتغير العشوائي:

$$f : \quad S \rightarrow R$$

وهناك نوعين من المتغيرات العشوائية وهي:

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة : في حالة النتائج العددية لظاهرة عشوائية تكون قيمها صحيحة؛ مثلاً، عدد الأطفال في الاسر او عدد السيارات لكل اسرة، عدد المباني، ... . في الغالب يكون المتغير العشوائي المنفصل معدود وليس دائماً.
2. المتغيرات العشوائية المتصلة: في حالة النتائج العددية لظاهرة عشوائية تكون قيمها تقبل التجزئة (الفاصلة)؛ مثلاً، طول اشخاص، أعمار فئة ما، وزن اشخاص، ... .

1. المتغير العشوائي المنفصل

هو المتغير العشوائي الذي قيمه الممكنة تكون في شكل عدد صحيح (لا يقبل الفاصلة)

نسمي قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يبين لنا كيفية توزيع الاحتمالات بدلالة القيم الممكنة للمتغير العشوائي، حيث يجب أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح و$f(x_i) \geq 0$.

مثال 01:في تجربة رمي 3 قطع نقدية، متغير عشوائي X يمثل عدد الصور (f) الظاهرة، فإنه يأخذ القيم التالية: 0، 1، 2، 3 حيث لكل قيمة احتمال معين.

لدينا عدد الحالات الممكنة $\Omega=\{ppp, ppf, pfp, pff, fpp, fpf, ffp, fff\}$

نلاحظ لدينا 8 حالات ممكنة وعليه:

$$p(X = 0) = p(ppp) = {}^{1}/_{8}$$
$$p(X = 1) = p(ppf, pfp, fpp) = {}^{3}/_{8}$$
$$p(X = 2) = p(pff, ffp, fpf) = {}^{3}/_{8}$$
$$p(X = 3) = p(fff) = {}^{1}/_{8}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1

نلاحظ ان:

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$$

حيث أنهما شرطان لازمان لكي تكون دالة الاحتمال. ويسمى هذا الجدول بقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

تعريف قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل :

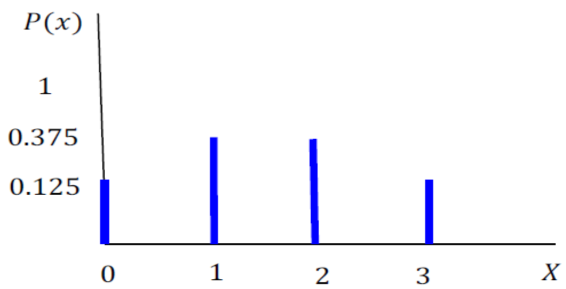
ليكن X متغير عشوائي منفصل ولتكن $_1, x_2, \ldots, x_n$ قيمها الممكنة مرتبة تصاعديا. ولتكن الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x_k) = p(X = x_k) \quad ; k = 1,2, \ldots n$$

نسمي الدالة السابقة دالة احتمالات اذا حققت الشرطين التاليين:

- $p_i \geq 0$
- $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$

التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل للمثال أعلاه مبين في الشكل الموالي:



1.1. دالة التوزيع التراكمية (تابع التوزيع)

ليكن X متغير عشوائي منفصل ولتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قيمها الممكنة ومرتبة تصاعديا. ولتكن الدالة المعرفة كما يلي:

$$F(x) = p(X \leq x_k) \quad ; k = 1,2, \ldots n$$

تسمى هذه الدالة بدالة التوزيع التراكمية (تابع التوزيع) للمتغير العشوائي المنفصل

وهي تشبه التكرار التجميعي الصاعد في الاحصاء الوصفي

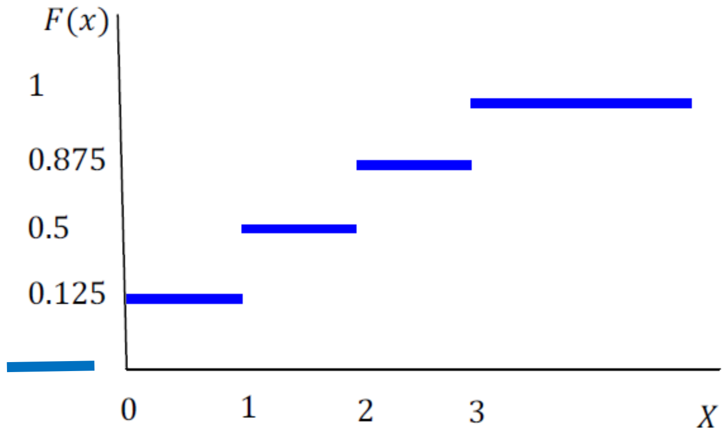
يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي في المثال 1 من خلال الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$F(x)$	1/8	1/2	7/8	1	-

ويمكن التعبير عنه ايضا ب

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ 0.125 & 0\le X<1\\ 0.5 & 1\le X<2\\ 0.875 & 2\le X<3\\ 1 & X\ge 3\end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



فمثلا إذا أردنا حساب احتمال $x\le 2$ أو احتمال $x<1.5$ او $x\ge 1.5$ فإنه يمكن استنتاجه مباشرة من الجدول:

$$p(x\ge 1.5)=p(x\ge 2)=p(x=2)+p(x=3)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(x<1)=p(x=0)+p(x=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(x\le 2)=p(x=0)=p(x=1)+p(x=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

يمكن القول ان دالة التوزيع للمتغير العشوائي التطبيق $R \rightarrow (X)$ للأعداد الحقيقية من المجال $[0-1]$ المعرفة كما يلي:

$$F_x(a)=p(X\le a)\quad ;\quad \forall a\in R$$

خصائص دالة التوزيع:

1. دالة التوزيع F دالة مستمرة على يمين كل نقطة من R.
2. F دالة متزايدة تماما.
3. $\lim_{n\to-\infty}F(x)=0$; $\lim_{n\to+\infty}F(x)=1$

دالة التوزيع تمكن من حساب الاحتمالات الخاصة بالمجالات أي:

$$p(a \le x \le b) = p(x \le b) - p(x \le a) = F(b) - F(b)$$

2.1. التوقع الرياضياتي والتباين:

أ. التوقع الرياضياتي (الامل)

هو احد مقاييس النزعة المركزية، فمن اجل معرفة القيمة المتوسطة التي تتمركز حولها قيم المتغير نحسب الامل الرياضياتي، ليكن X متغير عشوائي منفصل، ذو القانون الاحتمالي $p(X = x_k)$ ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ قيمه الممكنة ومرتبة تصاعديا. فان التوقع الرياضياتي لهذا المتغير يعرف كما يلي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X = x_i)$$

في المثال السابق التوقع الرياضياتي يحسب كما يلي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i\,p_i$	0	3/8	6/8	3/8	1.5=12/8

وعليه فان:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X = x_i) = 1.5$$

خصائص التوقع الرياضياتي

اذا كان a,b ثابتين، X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان

$$E(a) = a$$
$$E(x + a) = E(x) + a$$
$$E(ax) = a\,E(x)$$
$$E(bx + a) = b\,E(x) + a$$
$$E(x - E(x)) = 0$$
$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$
$$E(xy) = E(x)E(y)$$

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير عشوائي منفصل X كما يلي:

العزم من الدرجة 0 $\mu_0 = 1$ $\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1$

العزم من الدرجة 1 $\mu_1 = 0$ $\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0$

العزم من الدرجة 2 $\mu_2 = \sigma^2$ $\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X)$

العزم من الدرجة r

$$\mu_r = E\left(\left(X-\mu\right)^r\right), \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغير متقطع أو مستمر كما يلي:

$$\mu_r = \sum_i \left(x_i-\mu\right)^r f(x) \qquad\qquad \mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^r f(x)dx$$

ب. التباين:

على الرغم من أن التوقع الرياضياتي يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم المتغير العشوائي الا أنه لا يخبرنا عن توزع أو انتشار هذه القيم، ما يدفعنا لحساب التباين بواسطة العلاقة الموالية:

$$V(x) = E\big(X - E(X)\big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري الذي هو عبارة عن الجدر التربيعي للتباين .

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

في المثال السابق يمكن حساب التباين للمتغير العشوائي

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i^2\ p_i$	0	3/8	12/8	9/8	3=24/8

$$V(x) = 3 - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

وبالتالي الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.75} = 0.86$

خصائص التباين:

اذا كان a,b ثابتين، X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان

$$V(a) = 0$$
$$V(x+a) = V(x)$$
$$V(ax) = a^2\ V(x)$$
$$V(bx+a) = b^2\ V(x)$$
$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

2. المتغير العشوائي المتصل

المتغير العشوائي المتصل هو المتغير الذي يأخذ عدد غير منتهي من القيم في مجال محدود. وتوجد الكثير من الأمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة، مثل أوزان مجموعة أشخاص، دخل الأسر، أعمار أشخاص، طول فئة معينة من المجتمع، ...

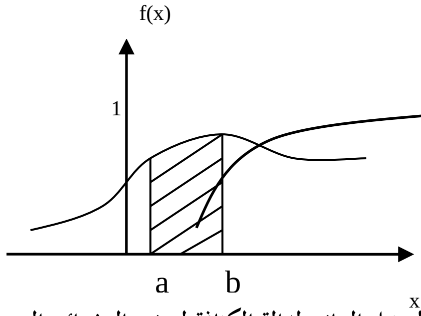
1.2. دالة الكثافة الاحتمالية:

نعتبر X متغير عشوائي مستمر اذا كان له دالة موجبة f معرفة على كل عدد حقيقي لأي مجموعة في الفضاء الاحتمالي A من الأعداد الحقيقية، تعرف بما يلي:

1. $f(x) \geq 0 \quad ; \forall x \in R$
2. f مستمرة على مجال أو مجالات
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$

الدالة f تسمى دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر.$P(X=x) \rightarrow 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.



$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

الشكل 06: التمثيل البياني لدالة الكثافة لمتغير العشوائي المستمر

نلاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير ع المتقطع.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال 02: أوجد قيمة الثابت C من أجل ان تكون دالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية وأحسب احتمال أن يكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

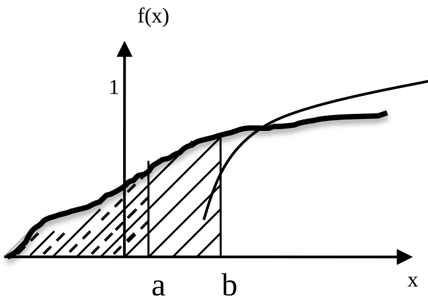
$$P(1 < x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

2.2. دالة التوزيع

تعرف دالة التوزيع للمتغير المستمر كما يلي:

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

ومنه فان مشتق دالة التوزيع يعطينا دالة الكثافة الاحتمالية، كما أن لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغير المستمر. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغير المستمر، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :



$$\boxed{P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)}$$

الشكل 07: حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*\, x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*\, 0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$*\, x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3/27 & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}\quad P(1<x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{27}-\frac{1^3}{27}=\frac{7}{27}$$

3.2. التوقع الرياضياتي والتباين

أ. التوقع الرياضياتي

يعرف التوقع الرياضياتي لمتغير عشوائي مستمر هو تكامل لجداء المتغير في دالة الكثافة الاحتمالية على مجال تعريفها، يحسب بالعبارة الموالية:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_X.

مثال 04: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي كما يلي:

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<X<2\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي؟

الحل:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{x^2}{2}=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$E(X)=1.33$$

ب. التباين

إذا كان X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية f(x) فإننا يمكن حساب تباينه من خلال القانون التالي:

$$V(x)=E\big(X-E(X)\big)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري الذي هو عبارة عن الجدر التربيعي للتباين .

$$\sigma=\sqrt{V(x)}$$

ملاحظة: التوقع والتباين لهما نفس الخصائص في حالتي المتغيرات المنفصلة والمستمرة.

مثال 06: احسب التباين والانحراف المعياري في المثال السابق؟

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2 \left(\frac{1}{2}x\right) dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = 2 - 1.77 = 0.23$$

ويمكن حساب الانحراف المعياري من خلال:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.23} = 0.47$$

خلاصة

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغيرة عشوائية من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغيرة و الاحتمالات المقابلة لها، إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغيرة إلى نقطة ما:

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$ في حالة م متقطعة و $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة م مستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرة مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.

التوقع والتباين لهما نفس الخصائص قي حالتي المتغيرات المنفصلة والمستمرة.

3. تمارين محلولة

التمرين 1: نرمي حجرة نرد . نعتبر المتغير العشوائي X هو ضعف الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي.

أ –حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ومثله بيانيا؟

ب –حدد دالة التوزيع المتغير العشوائي وتمثيلها البياني؟

ج –احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ –تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

عدد الحالات الممكنة هو :

$$\Omega_X=\{2,4,6,8,10,12\}$$

في _ :فإنه يمكن إيجاد احتمالات المتغير

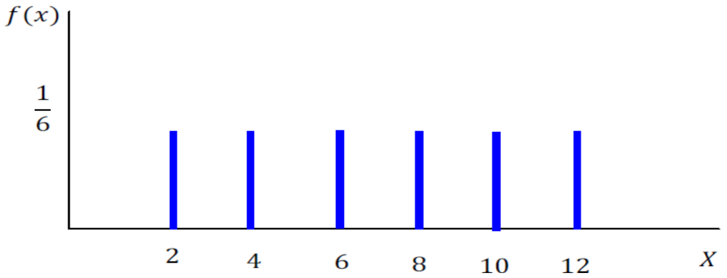
x_i	2	4	6	8	10	12	$\sum$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

من خلال الجدول نلاحظ أن الشرطين محققتين :

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

التمثيل البياني:

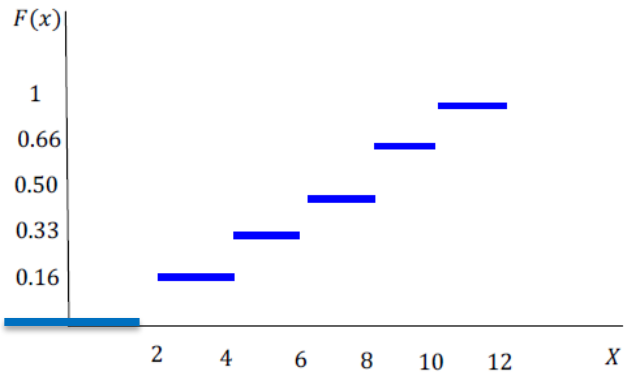


ت. تحديد دالة التوزيع المتغير العشوائي

x_i	2	4	6	8	10	12	$\sum$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
x_i	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1	–

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<2\\ \frac{1}{6} & 2\le X<4\\ \frac{2}{6} & 4\le X<6\\ \frac{3}{6} & 6\le X<8\\ \frac{4}{6} & 8\le X<10\\ \frac{5}{6} & 10\le X<12\\ 1 & X\ge 12\end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج –حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$
$$=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=7$$

–التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=4\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}+64\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{6}+144\times\frac{1}{6}=60.7-7^2$$
$$V(X)=11.7$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11.7}=3.4$$

التمرين 02: ليكن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي مبين في الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/64	18/64	18/64	27/64	1

أ – حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ب – احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

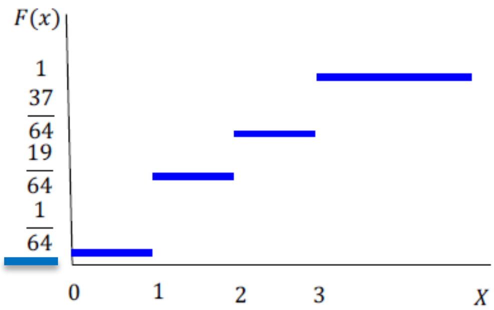
الحل:

أ- تابع التوزيع للمتغير العشوائي

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/64	18/64	18/64	27/64	1
	1/64	19/64	37/64	1	/

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

يكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي



ب- حساب التوقع الرياضي والتباين

-التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = 2.1$$

-التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 4 \times \frac{18}{64} + 9 \times \frac{27}{64} = 5.2 - 2.1^2$$
$$V(X) = 0.8$$

-الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

التمرين 3: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 4 حمراء قمنا بسحب 3 كرات بطريقة عشوائية .إذا كان متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1–حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

2–أوجد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

3–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

بما أن المتغير العشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية: 0,1,2,3.

حيث أن عدد الحالات الممكنة هو $^{3}_{10} = \frac{10!}{7!3!} = 120$

حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة في:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	5/30	15/30	9/30	1/30	1

2–تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{20}{120} & 0 \le X < 1 \\ \frac{80}{120} & 1 \le X < 2 \\ \frac{116}{120} & 2 \le X < 3 \\ 1 & X \ge 3 \end{cases}$$

3–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120} = 1.2$$

–التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 4 \times \frac{36}{120} + 9 \times \frac{4}{120} = 2 - 1.2^2$$
$$V(X) = 0.56$$

-الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.56} = 0.74$$

التمرين .4 إذا كان متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي

$$f(X) = \begin{cases} 2x & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟ ومثله بيانيا؟

2–احسب الاحتمال $p(0<X<0,5)$

3–حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟ ومثله بيانيا؟

4–احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

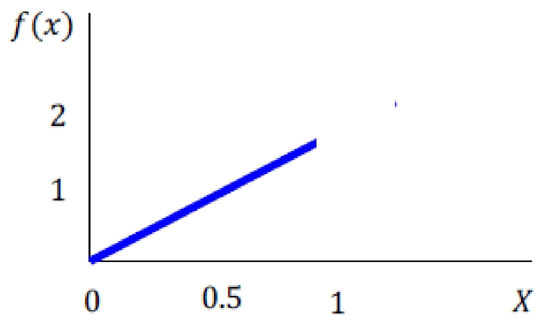
تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين ___> :حتى يكون

بما ان المتغير موجب فان الدالة موجبة ومنه الشرط الأول دوما محققة مهما كانت قيمة ضمن مجال تعريفه الشرط الثاني أيضا محقق ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - 1 = 1$$

التمثيل البياني:



2–حساب الاحتمال $p(0<X<0,5)$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.25$$

3–تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

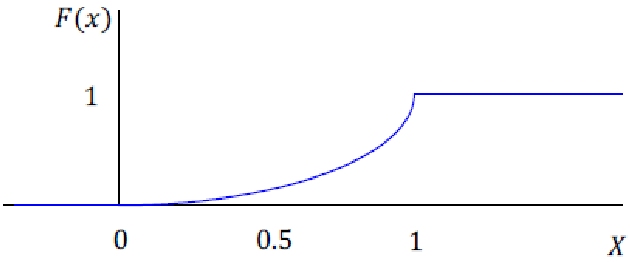
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x 2xdx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن : $X \leq 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{2x^2}{2} & 0 \le X \le 1 \\ 1 & X > 1 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 0.66$$

–التباين

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^1 x^2(2x)dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = \int_0^1 2x^3 dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$

التمرين :**5** نفترض أن متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X) = \begin{cases} K(4x - 2x^2) & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أحسب قيمة الثابتK حتى يكون التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟

2–احسب الاحتمال $p(x>1)$

3–حدد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي؟

الحل:

1– حساب قيمة الثابتK :

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فهو يحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 K(4x - 2x^2)dx = 1$$
$$= K \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$$
$$= K \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = K\frac{8}{3} = 1$$
$$K = \frac{3}{8}$$

2–احسب الاحتمال $p(x>1)$

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$
$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

3–حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3}) & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

التمرين :6 نفترض أن متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى

$$f(X) = \begin{cases} cx^4 & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أحسب قيمة الثابتc ؟

2– احسب الاحتمال$p(x>1.5)$

3–حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

4–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–حساب قيمة الثابت

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 cx^4 dx = 1$$
$$= c\int_0^2 x^4 dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\frac{32}{5} = 1$$
$$c = \frac{5}{32}$$

2–حساب الاحتمال

$$P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{5}{32} x^4 dx$$
$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.5} = 0.23$$

3–حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{5}{35}(x^4)dx = \frac{5}{32}\left(\frac{x^5}{5}\right)$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{5}{32}x^5 & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

4–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{32}x^5\right)dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3}$$
$$E(X) = 1.66$$

–التباين:

$$V(X) = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$
$$\int_0^2 x^2\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6 dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2$$
$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 2.85 - 2.77 = 0.07$$
$$V(X) = 0.07$$

–الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.07} = 0.28$$

التمرين :7إذا كان متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي

$$f(X) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أثبت أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ؟

2–احسب الاحتمال p(x>1/3)

الحل:

1–إثبات أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين :

$$f(X) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة ضمن مجال تعريفه

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^1 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^1 = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$

$$= (10\times 1 - 15\times 1 + 6\times 1) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$

$$= 10 + 6 - 15 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

2–حساب الاحتمال p(x>1/3)

$$P\left(X \le \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$

$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}} = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= (10(\tfrac{1}{3})^3 - 15(\tfrac{1}{3})^4 + 6(\tfrac{1}{3})^5) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$

$$= 10\frac{1}{27} - 15\frac{1}{81} + 6\frac{1}{243}$$

$$P\left(X \le \frac{1}{3}\right) = 0.2098$$