الفصل الثاني: الاحتمالات

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذه الفصول.

1. التجربة والاحتمال

أ. التجربة

لشرح المفهوم المجرد للتجربة و تمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي أم الحدث أو أم النتيجة. لأن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث.

ومفهوم التجربة في علم الاحتمالات مفهوم عام و مرن، فإذا كنا ندرس احتمال الحصول على الوجه 6 عند رمي قطعة نرد تكون التجربة هي الرمي، و إذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الوحدات التالفة لآلة ما يمكن اعتبار كل وحدة منتجة كتجربة، وإذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الطلبة الراسبين في مقياس ما نعتبر كل طالب كتجربة... نقول احتمال حدث أو احتمال نتيجة ولا نقول إحتمال تجربة.

أما الاحتمال فهو

- عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.
- الاحتمال يكون محصورا بين 0 و 1.

ب. الأساسيات لحساب الاحتمالات

هناك قواعد أساسية في حساب الاحتمال :

1. احتمال وقوع حدث يساوي 1مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس. مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي 1.
2. احتمال وقوع حدثان "A" و "B" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.
3. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.
4. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.
5. احتمال وقوع حدث "A" أو "B" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

6. "احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع."[1] بليز باسكال : Blaise Pascal، 1623)

مثال 01 : ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب:

هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (2، 4 و6). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو 6: (1، 2، 3، 4، 5، 6). وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

تنبيه: لا يمكن استخدام هذه العلاقة إذا لم تكن احتمالات الحالات متساوية.

مثال 02: صندوق به 7 كريات منها 5 حمراء. نسحب 3 كريات معا. ما هو احتمال أن تكون كلها حمراء؟ بين كل من التجربة والحدث في هذا المثال.

عدد الحالات الملائمة C_5^3 وعدد الحالات الممكنة: C_7^3. إذا الاحتمال هو $\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}$.

التجربة هي السحب من الصندوق، الحدث أو النتيجة هي الحصول على ...

مثال 03: فوج مكون من 10 طلبة. نسحب بالقرعة اسم من العشرة. ما هو احتمال أن يكون الطالب أحمد؟ بين كل من التجربة والحدث.

نسحب (بدون إعادة) عينة من 3 أسماء من العشرة. ما هو احتمال أن يكون منهم الطالب أحمد؟

الجواب:

1) احتمال الحدث الأول أو النتيجة الأولى هي $\frac{1}{10}$،

2) عدد الطرق الممكنة للعينة: C_{10}^3، عدد الحالات الملائمة لكي يكون أحمد في العينة:

$$C_{10-1}^{3-1}=C_9^2 \qquad C_n^x=\frac{n!}{(n-x)!x!} \Rightarrow C_9^2=36$$

الاحتمال هو إذا: $\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{10(9)(8)/3}=\frac{36}{240}=\frac{3}{20}$

التجربة هي السحب، النتيجة أو الحدث هي أن يكون الطالب أحمد مسحوب

---

[1] ريجينالد لافوا 1981، ص 2 و3.

ج. أنواع الحوادث:

–الحدث البسيط: هو الحدث غير القابل للتجزئة، مثلا نقول أن الحدث ظهور الرقم 6 هو حدث بسيط عند رمي حجر النرد، لأن الرقم 6 لا يمكن تقسيمه إلى حوادث أخرى.

–الحدث المركب :هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة.

–الحدث الأكيد : نقول عن الحدث أنه أكيد إذا كان يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة . مثلا نقول أن حدث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي حجرة نرد هو حدث أكيد لأننا مهما رمينا حجرة النرد فسوف نحصل على رقم من 1 إلى .6 ونرمز له ب $A = \Omega$.

–الحدث المستحيل :الحدث المستحيل هو الحدث المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة .فمثلا نقول حدث ظهور الرقم 8 عند رمي حجرة نرد، هو حدث مستحيل لأننا مهما رمينا حجرة النرد فمن المستحيل الحصول على الرقم .8 ونرمز له ب $A = \emptyset$.

–الحوادث المتنافية :هي الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد حيث أن وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر إذا كانوا غير متقاطعي.

–الحوادث غير المتنافية :الحوادث التي يمكن حدوثها في آن واحد حيث أن حدوث أحدها لا ينفي وقوع الآخر

مثال : عند رمي حجرة نرد على الأرض فإن عدد الحالات الممكنة أو فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

.ي _

نفترض أنه عند ظهور رقم زوجي هو الحدث A وأنه عند ظهور رقم فردي هو الحدث B وعند ظهور رقم أولي هو الحدث C

$$A = \{2, 4, 6\} ، B = \{1, 3, 5\} ، C = \{2, 3, 5\}$$

ومنه يمكن القول أن الحدثين C وA هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي او غير ذلك من الأمثلة. ونقول أن الحدثين B وA هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد فردي وزوجي في نفس الوقت.

–الحوادث المستقلة :هي الحوادث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحوادث الأخرى .فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة، لأن نتائج الرمية الأولى مثلا لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة.

–الحوادث غير المستقلة : هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى أو وقوع أحدها يكون مشروط أو مرتبط بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة كرة هي حوادث غير مستقلة لأن السحب الأول يؤثر على احتمال السحب الثاني.

2. التعبير الرياضياتي للاحتمالات

نستخدم الترميز من أجل التوصل إلى تعبير دقيق وواضح لقواعد الحساب الاحتمالي وهي ذاتها القواعد المذكورة في الفصل الأول.

نعبر عن احتمال حدث ما بطريقة رياضية فنكتب $P(A)$

ونعبر عن احتمال وقوع الحدث : $X = x$ كما يلي: $P(X = x)$ أو $P(x)$.

مثال: احتمال الحدث: "الحصول على الوجه 5" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$

و أحيانا نختصر أكثر فنكتب: $P = 1/6$.

1.2. استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية

من خلال البنود التالية تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية:

1. نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما ب Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة.
2. نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.
3. إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.
4. الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط.

مثال 04: في تجربة إلقاء مكعب نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:

الحدث A: الحصول على العدد 6 (حدث بسيط)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} , \quad A= \{6\}$$

الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B = \{2, 4, 6\}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي $C = \{2, 3, 5\}$

الحدث D: الحصول على عدد فردي $D = \{1, 3, 5\}$

مثال 05: لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي: أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عن:

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط)

$$\Omega =\{PP, PF, FP, FF\}, \quad A = \{PP\}$$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدث C : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PF, PP\}$

5. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Φ يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها. $P(\Phi) = 0$.
6. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$
7. بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع .... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω . من ذلك :

$A \cup B$ هو الحدث: إما A أو B أو كلاهما.

$A \cap B$ هو الحدث: A و B في وقت معا.

$\bar{A}$ هو الحدث المعاكس ل A.

$A - B$ هو الحدث: A لكن ليس B .

8. إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول أن A و B متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا.

مثال: نرمي قطعة نقدية مرتين: إذ كان A هو الحدث "مرتين كتابة" و B "صورة على الأقل".

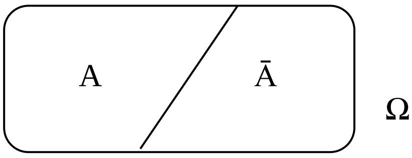
$A = \{PP\}.\ B = \{PF, FP, FF\}$ $\quad \Phi = A \cap B$

2.2. التعبير الرياضياتي عن قواعد حساب الاحتمالات

- ***الحدث المعاكس***

نعبر عن الحدث المعاكس ل A ب $\bar{A}$ أو A' واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحدث A، ونكتب :

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



مثال: نرمي قطعة نقدية ونرمز ب P للكتابة و F للصورة (الوجه). نلاحظ أن:

$$P(P) = P(F') = 1 - P(F) \iff P(P) + P(F) = 1$$

مثال 2: عند رمي حجر نرد فإن احتمال الحصول على العدد 5 هو: $P(5) = 1/6$ ، فما هو الحدث المعاكس في هذه الحالة وما احتماله؟

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير 5، واحتماله هو: $P(5') = 1 - P(5) = 1 - (1/6) = 5/6.$

مثال 3: نرمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟

$$P(\text{nombre pair}) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = 3/6$$

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير زوجي، و احتماله:

$$P(\text{impair}) = 1 - P(\text{pair}) = 1 - (3/6) = 3/6.$$

- ***احتمال وقوع الحدث "A" و "B"***

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$$

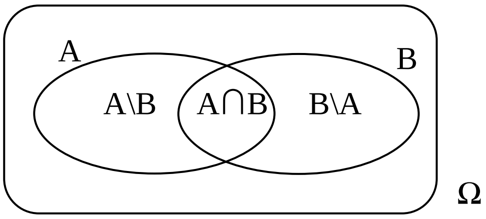
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/(A \cap B))$$

A, B, C أحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا)، $P(B/A)$ يسمى الاحتمال الشرطي لB علما أن A محقق.

ومن المعادلة الأولى نحصل على:

$$\mathbf{P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) \qquad P(A) > 0} \text{ لما }$$

حيث A تصبح فضاء المعاينة بما أن A محقق.



شكل 01 : الحدث B/A غير الحدث B\A

مثال: 1) أحسب عند إلقاء حجر نرد احتمال الحصول على قيم أقل من 4 (حدثB).

2) أحسب احتمال الحصول على نتيجة أقل من 4 إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد فردي (حدثA).

3) أحسب احتمال الحصول على قيمة أكبر أو يساوي 4 إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

$P(B) = P(1 \text{ou } 2 \text{ ou } 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6$

$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A)$

$P(B \cap A) = P(\text{impaire et } \leq)$

$= P(1 \text{ ou } 3) = P(1) + P(3) = 1/6 + 1/6 = 2/64$

$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A) = 2/6 \ / \ 3/6 = 2/3$

- ***احتمال وقوع الحدث "A" و "B" لما "A" و "B" مستقلان***

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) \qquad\qquad P(B/A) = P(B)$$

وهو تعريف استقلال حدثين، أي أن وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه نقول أن A و B مستقلان،

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C) \qquad\qquad P(C/(A \cap B)) = P(C)$$

مثال: نرمي حجر نرد وقطعة نقدية معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد 6 ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

$P(A\cap B) = P(A).P(B) = 0.5 * 1/6 = 1/12.$

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

$P(FF) = P(A\cap B) = P(A)\ P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25$

مثال 3. صندوق به 5 كريات 2 حمراء و3 بيضاء. نسحب كرية نسجل لونها ثم نعيدها للصندوق ونكرر العملية 3 مرات.

- أحسب احتمال الحصول على 2 كريات حمراء، 3 كريات حمراء (أحداث مستقلة).
- كيف يكون الاحتمال في حالة كون السحب بدون إرجاع الكرية (أحداث غير مستقلة)؟

الجواب:

- $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2) = 2/5 * 2/5 = 4/25$

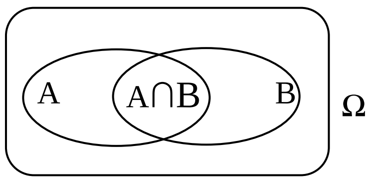
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2)\ P(R_3) = 2/5 * 2/5 * 2/5 = 8/125$

- $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2/R_1) = 2/5 * 1/4 = 2/20$

$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2/R_1)\ P(R_3/(R_1\cap R_2)) = 2/5 * 1/4 * 0 = 0$

- ***احتمال وقوع حدث "A" أو "B"***

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

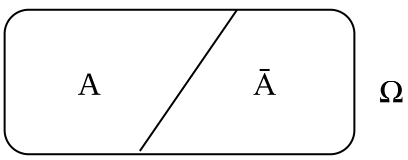


- ***احتمال وقوع حدث "A" أو "B" وهما متنافيان***

لتكن الأحداث المتنافية A, B

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)} \quad \mathbf{(P(A\cap B) = 0)}$$

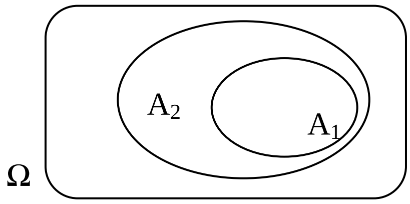
$$P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) \quad (P(A\cap B\cap C) = 0)$$



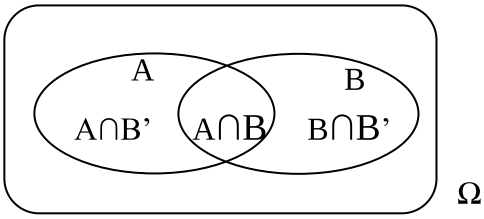
- *قواعد أخرى*

- من أجل $A_1 \subset A_2$ فإن:

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1) \quad \text{و} \quad P(A_1) \leq P(A_2)$$

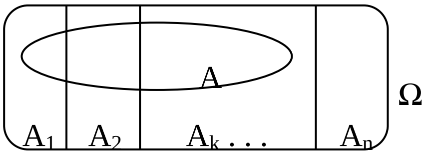


- من أجل A و B أحداث أيا كانت: $P(A\cap B) + P(A\cap B') = P(A)$



- إذا كان A هو نتيجة أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_n$

$$P(A) = P(A\cap A_1) + P(A\cap A_2) + P(A\cap A_3) + \ldots\ldots + P(A\cap A_n)$$

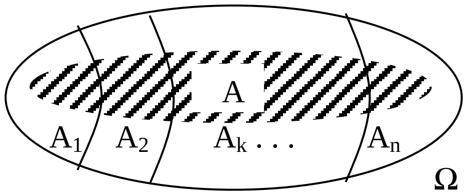


3.2. نظرية بايز

لتكن A_1، A_2، A_3، . . . A_k، . . . ،A_n أحداث متنافية فيما بينها حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) Ω، و A حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي BAYES لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).



الشكل رقم 02: رسم يوضح نظرية بايز

مثال: وظفت سكريتيرة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير والأخرى (A_3) 50%.

ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) 2% ولدى الثالثة (A_3) 1%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(5%).

1. أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A_2 أو A_3.
2. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.
3. أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.2*0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.238$$

$$P(A_2 / A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.3*0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.2857$$

$$P(A_3 / A) = \frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.5*0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.476$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن تكون A_3 هي التي حررت الفاتورة.

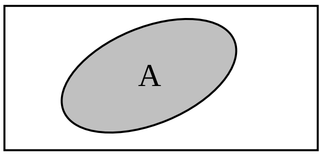
2. مجموع الاحتمالات $P(A_1/A) + P(A_2/A) + P(A_3/A) = 1$ لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

3. احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

$$P(A)=\sum P(A_k)P(A/A_k)=(0.2*0.005)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)=0.012$$

4.2. التعبير الهندسي عن الاحتمالات

قبل الشروع في حل مسألة مركبة للاحتمالات يستحسن تحليلها باستعمال أشكال هندسية توضح عناصر المسألة (الأحداث) والعلاقات بينها. يستخدم لهذا الغرض شجرة الاحتمال او مخطط فين. تبين شجرة الاحتمال الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة وذلك من خلال أغصان تتفرع من أصل، أما مخطط فين فيستخدم لتمثيل الأحداث الفرعية دوائر داخل مستطيل يمثل التجربة.

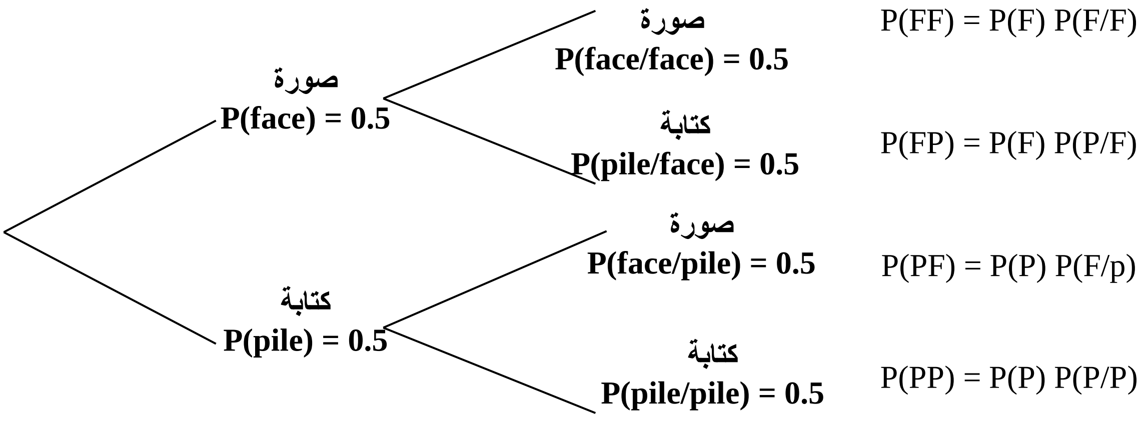


رسم1 مخطط فين

يراعى في رسم الشجرة أن يكون مجموع احتمالات كل تفريعة يساوي الواحد. التفريعة هي بمثابة شجرة فرعية تحتوي أحداث متنافية، لكونها تمثل النتائج المحتملة لتجربة جزئية.

مثال. نرمي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على مرتين صورة.

P(face ∩ face) = P(face) * P(face/face) = 0.5 * 0.5 = 0.25.



خلاصة : **يمكن القول**

باستخدام نظرية المجموعات كأساس للترميز في مجال الاحتمالات يمكن الحصول على صياغة أكثر دقة للمفاهيم المختلفة. بهذه الطريقة نستخدم:

رمز التقاطع ∩ بدلا عن عبارة "و"

مثال: احتمال "الوجه 2 و 5" في رميتي نرد: P("2"∩ "5") = P(2) * P(5)

رمز الإتحاد U بدلا عن عبارة" أو"

مثال: احتمال الوجه 2 أو 5 في رمية نرد: $P("5"U"2") = P(5) + P(2)$

رمز المتمم C_A أو $\bar{A}$ بدلا عن عبارة "عكس A "؛ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

من خلال هذا الترميز يمكن أن نعبر بسهولة عن القواعد الخمسة الأساسية لحساب الاحتمالات.

- $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$

=> $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$ (بشرط $P(A) > 0$)

- $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ عندما يكون الحدثان مستقلان

- $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(AUB) = P(A) + P(B)$ عندما يكون الحدثان متنافيان أي :($P(A \cap B) = 0$)

3. تمارين محلولة

التمرين 1 : صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 سوداء لا نفرق بينهم باللمس .إذا قمنا بإجراء سحبات في كل سحبة نأخذ كرة بطريقة عشوائية .إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب وإذا كانت بيضاء لا نعيدها ونواصل سحب الكرة الموالية وهكذا:

1–ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الأولى سوداء؟

2–ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الثانية سوداء؟

3–استنتج الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة؟

الحل:

1–احتمال أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى هو:

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

2–احتمال الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء هو

نرمز لحدث كون الكرة سوداء بـB ولكي يتحقق الحدث يجب أن تكون الكرة بيضاء في السحبة الأولى ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب في المرة الثانية كرة سوداء.

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{7}$$

3–الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

لكي لا نجري السحبة الثالثة يجب أن نتوقف إما في السحبة الأولى أو الثانية أي يجب أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى أو الثانية .إذن احتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

$$P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

التمرين02: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي حجرة نرد .ما هو احتمال الحصول على:

1–أقل من3

2–أكثر من3

الحل:

1–احتمال الحصول على أقل من 3 هو:

الحصول على أقل من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 1 أو 2. وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2–احتمال الحصول على أكثر من 3 هو:

الحصول على أكثر من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 4 أو 5 أو 6. وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(4 \cup 5 \cup 6) = P(4) + P(5) + P(6) \; = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

التمرين 3 :عند الإعلان عن نتائج السنة الجامعية وجد أنه في كل 100 طالب يوجد 20 طالب راسب .فإذا اخترنا طالبين بطريقة عشوائية من مجموعة ما.

1–ما هو احتمال أن يكون الطالب الأول راسب؟

2–ما هو احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب؟

3–ما هو احتمال أن يكونا كلاهما راسبين؟

الحل:

1–احتمال أن يكون الطالب الأول راسب هو:

نرمز للطالب الراسب بـA وبالتالي الاحتمال يساوي

$$P(\mathrm{A}) = \frac{20}{100} = 0.2$$

2–احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب هو:

.

نرمز للطالب الراسب الثاني بـB فإذا علمنا أن الطالب الأول راسب يبقى في المجموعة 99 طالب من بينهم 19طالب من الراسبين .وبالتالي فإن احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الأول راسب هو

$$P(\mathrm{B}/A) = \frac{19}{99} = 0.192$$

3–احتمال أن يكون كلاهما راسبين هو:

$$P(\mathrm{B} \cap A) = P(\mathrm{B}/A)P(\mathrm{A}) = \frac{19}{99} \times \frac{20}{100} = 0.0384$$

التمرين 4: في أحد مخابر التحاليل الطبية تم فحص مجموعة من الأفراد للكشف عن مرض معين .فإذا رمزنا ب A إلى الشخص الذي تم فحصه مصاب بهذا المرض و بـB إلى أن نتيجة الفحص ايجابية .فإذا كان لدينا :

$$P(\mathrm{B}/A) = 0.99 \quad , \quad P(\mathrm{B}/\bar{A}) = 0.005$$

وأن 1 في الألف من الأشخاص يعانون من هذا المرض .اخترنا شخص بطريقة عشوائية .ما هو احتمال أن يكون هذا الشخص مصابا بالمرض علما أن نتيجة الفحص كانت ايجابية؟

الحل:

$$P(\bar{A}) = 0.999 \text{ و } P(A) = 0.001$$

وبالتالي الاحتمال هو

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.99\times0.001}{0.99\times0.001+0.005\times0.999} = 0.165$$

التمرين5: إذا كان لديك الحوادث التالية:

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A\cap B) = \frac{1}{5}$$

أ –أحسب كل من:

$$P(A\cup B), \qquad P(B/A)$$

ب –هل الحدثين A وB مستقلين أم لا؟

الحل:

أ –حساب كل من:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5} = 0.38$$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = 0.6$$

ب –تكون الحوادث مستقلة إذا تحقق ما يلي:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

لدينا: $P(A)\times P(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.08$

و $P(A\cap B) = 0.2$

وبما أن $P(A)\times P(B) \neq P(A\cap B)$ فأن الحدثان غير مستقلان.

التمرين 6:في الإجابة عن سؤال في اختبار متعدد الخيارات، يكون الطالب في وضعيتين متأكد من الإجابة أو غير متأكد .نفترض p لاحتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة، و1-p لاحتمال أن يكون الطالب غير متأكد من الإجابة .نفترض أيضا أن الطالب الذي يفكر في الإجابة سيكون صحيحا باحتمال قدره$\frac{1}{m}$ حيث أن m هو عدد الاختيارات المتاحة .ما هو احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح؟

الحل:

–احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح هو نفترض أن A و B يعبران عن احتمال إجابة الطالب على السؤال بشكل صحيح وأنه متأكد من الإجابة على التوالي.

$$P(B/A) = \frac{P(B)\times P(A/B)}{P(B)\times P(A/B)+P(\bar{B})\times P(A/\bar{B})} = \frac{P}{P+\frac{1}{m}(1-P)} = \frac{mP}{1+(m-1)P}$$

على سبيل المثال، إذا كان m=5,p=0.5 فإن احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال أجاب عليه بشكل صحيح هو0.83

التمرين 7: اشترى طالب 3 كتب في الإحصاء و 2 في الرياضيات و 4 في العلوم .وبعد الرجوع إلى المنزل رتب هذه الكتب في رف.

أ –ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب؟

ب –ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب الكتب من نفس النوع مع بعضها؟

ج –ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب كتب العلوم فقط مع بعضها؟

الحل:

أ –عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب هو

$$P_n = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

ب –احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون الكتب من نفس النوع مع بعضها هو

لدينا عدد الحالات الممكنة يساوي362880

وعدد الحالات المتشابهة يساوي$3! \times 4! \times 2! \times 3! = 1738$

$$p_7^{3,2,4} = \frac{362880}{1738} \cong 209$$

ج –احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون كتب العلوم فقط مع بعضها هو

نقوم بحساب عدد الحالات المتشابهة$4! = 24$

$$p_7^4 = \frac{362880}{24} = 15120$$