الفصل الأول: التحليل التوفيقي

نتطرق في هذا الفصل الى بعض طرق تحديد عدد نواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة ما بغير طريقة العد المباشر، وتسمى هذه الطرق بالتحليل التوفيقي، وهو مبني على قاعدتين اساسيتين.

1. قاعدتي الجمع والضرب:

أ. قاعدة الجمع (قاعدة "أو")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان انجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى **أو** الثانية تحدث بــ m+n طريقة.

مثال 01: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب أو طالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "أو" طالبة نستخدم قاعدة الجمع، فيصبح عدد الامكانيات هو 7 امكانيات. 7=4+3.

(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G)

ب. قاعدة الضرب (قاعدة "و")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان انجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى **و** الثانية مع بعضهما بــ n×m طريقة.

مثال 02: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب وطالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "و" طالبة نستخدم قاعدة الضرب، فيصبح عدد الامكانيات هو 12 امكانية. 12=4×3.

$$\begin{cases} A \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ B \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ C \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ D \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \end{cases}$$

{(AE) (AF) (AG) (BE) (BF) (BG) (CE) (CF) (CG) (DE) (DF) (DG)}

تعميم:

- اذا كان لدينا تجربة1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربةK (EK) بـ N_K طريقة فإن K عملية تتم وتحدث معا بـ: $N_1\times N_2\times\ldots\times N_K$ طريقة.
- اذا كان لدينا تجربة1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربةK (EK) بـ N_K طريقة فإن E1 او E2 او ... او EK عملية تتم بـ: $N_1+N_2+\ldots+N_K$ طريقة.

2. التبديلات (المتبادلات):

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من ثلاثة عناصر A, B, C، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نرتب بها عناصر هذه المجموعة، فان ايجاد عدد الطرق باستخدام الشكل الموالي

لدينا ثلاثة خانات لتستوعب العناصر الثلاثة لهذه المجموعة، حيث عدد الخانات على حسب الحاجة، ثم نقوم بكتابة داخل كل خانة عدد الامكانيات لشغلها.

عدد الامكانيات	3	2	1
رقم الخانة	01	02	03

الخانة رقم 01 لديها ثلاثة امكانيات (A او B اوC)

وبعد تثبيت احد العناصر في الخانة رقم 01 يبقى عنصرين مرشحين لشغل الخانة رقم 02 وبعدها تثبيت احد العنصرين في الخانة رقم 02 يبقى عنصر واحد لشغل الخانة رقم 03.

وعليه يكون العد بطريقة الضرب لوجود و في العد: لدينا 3 امكانيات لشغل الخانة 01 و إمكانيتين لشغل الخانة 02 وامكانية واحدة لشغل الخانة الاخيرة، أي $3\times2\times1=3!=6$.

اذن لدينا 6 طرق لترتيب هذه العناصر الثلاثة.

نلاحظ أن العناصر الثلاثة مختلفة أي بدون تكرار لها.

تعميم:

نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنها تبديلة بدون تكرار، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر n، فعدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحدها على الأقل، ونكتب

$$p_n = n!$$

حيث العاملي (!) هو جداء للحدود المتتالية المتناقصة الى غاية الواحد.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\times \ldots\times 3\times 2\times 1$$

$0!=1$; $1!=1$; $2!=2$; $3!=6$; $4!=24$

$5!=120$; $6!=720$; $7!=5040$

في حالة وجود التكرار نسميها تبديلة بتكرار:

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة .في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التبديلات من خلال الصيغة الموالية:

$$p_n^{n_1,n_2,n_3, \ \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!}$$

حيث ان $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ هي عدد تكرار العناصر المتشابهة او المتماثلة ومجموعها يساوي n.

مثال 03: ما هو عدد التبديلات التي يمكن تشكيلها بحروف كلمة **probabilité**

نلاحظ ان هذه الكلمة تتشكل من 11 حرف، مع وجود بعض الحروف مكررة اكثر من مرة وعليه يكون:

$n_1 = 1;\ n_2 = 1;\ n_3 = 1;\ n_4 = 2;\ n_5 = 1;\ n_6 = 2;\ \ n_7 = 1;\ \ \ n_8 = 1;\ \ \ n_9 = 1.$

$$p_{11}^{1,1,1,1,2,1,2,1,1} = \frac{11!}{1!\times1!\times1!\times1!\times2!\times1!\times2!\times1!\times1!} = \frac{11!}{4}$$

عملية القسمة هنا لحذف تأثير التكرار حيث نلاحظ حرفين مكررين مرتين وهو ما يدعو للقسمة على جداء عاملي التكرارات.

3. الترتيبة

في بعض الحالات يكون الترتيب مهم وبدون تكرار

مثال 04: فوج طلبة به 33 طالب نريد اختيار ممثل للفوج ونائب له، فما هو عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه.

نختار ممثل للفوج اولا ليكون لجميع الطلبة نفس فرصة الظهور في اعلى رتبة وبذلك لدينا 33 امكانية لاختياره، ومن ثم نختار النائب، فيبقى 32 طالب نختاره منهم وبالتالي لدينا 32 امكانية لاختياره.

اذن عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه هو 1056=33×32 امكانية.

اذا اردنا كتابتها على شكل العاملي يكون كما يلي: $\frac{33!}{31!} = \frac{33!}{(33-2)!}$ =1056

تعميم:

اذا كان الترتيب مهم وبدون تكرار، لترتيب k عنصر من اصل n عنصر (n>k)، نحسب عدد الامكانيات بالعلاقة الموالية ونسميها تريبة بدون تكرار لـ k عنصر من اصل n:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

في حالة n=k تصبح تبديلة.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

اما اذا كان التكرار مسموح تصبح قائمة

مثال 05: نريد تشكيل عدد هاتفي من خمسة ارقام، كم عدد يمكن تشكيله؟

في ارقام الهاتف التكرار مسموح به وعليه نشكل الخانات المقابلة، حيث ان كل الارقام متاحة من 0 الى 9 يكون عدد الامكانيات لكل خانة هو 10، وعدد الاعداد الممكن تشكيلها هو

عدد الامكانيات	10	10	10	10	10
رقم الخانة	01	02	03	04	05

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000 = 10^5$$

تعميم:

اذا اردنا ترتيب k عنصر من n عنصر وكان التكرار مسموح، فان عدد التراتيب يسمى قائمة يعطى بالعلاقة الموالية:

$$n^k = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{\text{مرة } k}$$

4. التوفيقات

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من أربعة عناصر $E = \{A, B, C, D\}$، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نشكل لجنة من ثلاثة عناصر من هذه المجموعة، واللجان الترتيب فيها غير مهم

عدد التراتيب التي يمكن تشكيلها هو $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$

وبما ان الترتيب غير مهم يصبح عدد اللجان 4 بدل 24 وهي موضحة كما يلي:

اللجنة الاولى: ABC هي نفسها ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

اللجنة الثانية: ABD هي نفسها ADB, BAD, BDA, DAB, DBA

اللجنة الثالثة: ACD هي نفسها ADC, CAD, CDA, DAC, DCA

اللجنة الرابعة: BCD هي نفسها BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

نلاحظ ان عدد التوفيقات= $\frac{\text{عدد الترتيبات}}{6=3!}$ ، اذن التوفيقة $= \frac{A_4^3}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!}$ =4

يمكننا استنتاج العلاقة العامة التي تحسب لنا عدد التوفيقات؛ عند سحب بدون ارجاع (او في آن واحد) لـ k عنصر من اصل n عنصر (k<n) كما يلي: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k\,!} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!k\,!}$

مثال 06: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 21.

نلاحظ انعناصر المجموعة n=21 وعدد العناصر المسحوبة هو k=4، بتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_{21}^4 = \frac{21!}{17!\,4!} = 5985$$ لجنةمختلفة

كما تستعمل التوفيقات لحساب نشر نيوتن لـ $(x+y)^n$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad x^k \quad y^{n-k}$$

مثلث باسكال

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

لاحظ في المثلث 6+4 =10، يمكن تشكيل المثلث بهذه الخاصية

جدول يلخص طرق حساب عدد الحالات الممكنة

نستعمل	في حالة	القانون	حيث
الترتيبة A_n^k (بدون تكرار)	اذاكان الترتيب مهم، حيث n>k، بدون تكرار	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	K مجموعة جزئية من n
التبديلة p_n (بدون تكرار)	اذاكان الترتيب مهم، حيث n=k	$A_n^n = n! = p_n$	K هي نفسها المجموعة n
التوفيقة C_n^k	اذاكان الترتيب غير مهم	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	n≥k
التبديلة الدائرية	اذاكان الترتيب مهم، حيث n=k	$p_{n-1} = (n-1)!$	ينقص من المجموعة عنصر لتجاور العنصر الاول والاخير
القائمة(ترتيبة مع	اذاكان التكرار مسموح به	n^k	n≥k

التكرار)			
التبديلة مع التكرار	$p_{(n,ri)} = \frac{n!}{r_1!\, r_2!\, r_3! \ldots r_k!}$		$r_1 . r_2 . r_3 . \ldots r_k$ هي عدد تكرارات من 1،2،..k

5. تمارين محلولة

التمرين 01 :كم عددا مكون من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية 8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 :

1–لا يسمح بتكرار الارقام؟

2–العدد يجب أن يكون أقل من 480؟

3–الاعداد الفردية؟

4–الاعداد الزوجية؟

الحل:

1– بما ان الترتيب مهم يمكن استعمال الترتيبة، في هذه الحالة لا يسمح بتكرار: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$

او بطريقة الخانات نتحصل على نفس النتيجة

9×8×7=504

عدد الامكانيات	9	8	7
رقم الخانة	01	02	03

2– بطريقة الخانات: نختار رقم المئات ب 5 طرق ورقم العشرات ب 8 طرق ورقم الآحاد ب 9 طرق.

360=9×8×5

عدد الامكانيات	9	8	5
رقم الخانة	01	02	03

كما يمكن استعمال الترتيبة $A_5^1 A_8^1 A_9^1 = 360$

3– نختار رقم الآحاد ب 4 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الفردية الموجودة، ثم نختار رقم المئات ب 8 طرق ورقم العشرات ب 8 طرق: 256=4×8×8

4– نختار رقم الآحاد ب 5 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الزوجية الموجودة، ورقم المئات 8 طرق ورقم العشرات 8 طرق: 320=5×8×8

التمرين 02 :بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و 3 طالبات في صف إذا كان:

1–الجلوس كما يبتغون؟

2–الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟

3–الجلوس كما يبتغون على طاولة مستديرة؟

4–طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

الحل:

1–عدد الطرق الممكن إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاؤون هو تبديلة p_7=7!=5040

2–الطلبة مع بعضهم والطالبات مع بعضهن 288= 2! × 3! × 4!

3– إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاؤون على طاولة مستديرة نسميها تبديلة دائرية، ننقص عنصر من المجموعة (n-1)؛ طريقة $P_{n-1} = P_{7-1} = P_6 = 6! = 720$

4–طالبان لا يمكنها الجلوس جنب بعضهما :

لدينا عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو 5040طريقة.

نعتبر هذان الطالبان شخص واحد وبالتالي يصبح لنا 3 طلبة و 3 طالبات حيث يمكنهم الجلوس بطرق عددها: 720 = 6! طريقة

لكن هذان الطالبان يمكنهما الجلوس جنب بعضهما ب: 2 = 2! طريقة

وبالتالي عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات مع جلوس طالبين جنب بعضهما هو

طريقة 1440= 2! × 6!

ومنه عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات بحيث طالبين لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو طريقة 3600= 1440 − 5040

التمرين 03: كم عدد التبديلات التي يمكن تكوينها من حروف الكلمات ,STATISTIQUES CENTREE, STOCHASTIQUES, GOOGLE.

الحل:

- STATISTIQUES : $p_{12}^{3,3,1,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{3!\times3!\times1!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!}=\frac{12!}{72}$
- CENTREE : $p_7^{1,3,1,1,1} = \frac{7!}{1!\times3!\times1!\times1!\times1!}=\frac{7!}{6}$
- STOCHASTIQUES: $p_{13}^{3,2,1,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{13!}{3!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!}=\frac{13!}{12}$
- GOOGLE : $p_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!\times2!\times1!\times1!}=\frac{6!}{4}$

التمرين 04: صندوق به كرات: 5 حمراء و3 صفراء و2 خضراء، نسحب ثلاث كرات في آن واحد.

1. كم هو العدد الكلي للإمكانيات؟
2. عدد الامكانيات لظهور لون واحد؟
3. عدد الامكانيات لظهور لونين؟
4. عدد الامكانيات لظهور كرة خضراء على الاقل؟
5. عدد الامكانيات لظهور كرتان صفراء؟

الحل:

نستخدم التوفيقات للإجابة على الاسئلة

1. العدد الكلي $4320 = \frac{10!}{7!3!} = {}^{3}_{10}$

2. عدد الامكانيات لظهور لون واحد هو: $11 = \frac{3!}{0!3!} + \frac{5!}{2!3!} = C_3^3 + C_5^3$

3. لظهور 3 الوان: $30 = \frac{2!}{1!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{4!} = C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1$

لونين =العدد الكلي-(لون+3الوان) : امكانية 3981=(11+30)-4320

4. كرة خضراء على الاقل (واحدة او اثنتين):

$$C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{8!}{6!\,2!} + \frac{2!}{2!} \times \frac{8!}{7!} = 64$$

5. لظهور كرتان أصفران $21 = \frac{7!}{6!} \times \frac{3!}{2!} = C_7^1 \times C_3^2$

التمرين 05: يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

- ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

الحل :

1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك 125=5×5×5 عددا ممكنا

2) في الحالة الثانية هناك 60=3×4×5 عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى، الكرية المسحوبة لا ترجع)

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي 12=3×4 حالة ملائمة و بالتالي

التمرين :**6** ما هو عدد كلمات السر التي يمكن الحصول عليها من استخدام حرفين من حروف اللغة الإنجليزية)عددها (26 وثلاثة أرقام يسار الأحرف في الحالات التالية:

1-عدم تكرار الحرف والرقم؟

- **2**تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟

- **3**تكرار الحرف والرقم؟

الحل:

1 – عدد الكلمات مع عدم تكرار الحرف والرقم هو

$= 8 \times 9 \times 10 \times 25 \times 26$ كلمة 468000

2– عدد الكلمات مع تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم هو

$= 8 \times 9 \times 10 \times 26 \times 26$ كلمة 486720

3– عدد الكلمات مع تكرار الحرف والرقم هو

$= 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$ كلمة 676000

التمرين :**7** في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار عدد الأسئلة في الحالات التالية:

1– اختيار الأسئلة بدون شرط؟

2– إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3– إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1– يمكن اختيار الأسئلة الخمسة بطرق عددها: = طريقة 56

2– إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى، يبقى له اختيار السؤالين المتبقيين من بين الأسئلة الخمسة الأخيرة بطرق عددها = :طريقة 10

3– يمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الضرورية من الخمسة أسئلة الأولى بطرق عددها =:طريقة 10

ويبقى له سؤالين يتم اختيارهما من الأسئلة الثلاثة الأخيرة بطرق عددها 3:

وبالتالي يكون إجمالي عدد طرق اختيار الأسئلة الخمسة هو $= 3 \times 10$:طريقة 30

التمرين :**8** إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و 7 طالبات .إذا أردنا تكوين لجنة من هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

1– بدون شرط؟

2– ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟

3– يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟

4 – الطالب Q والطالبة R يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

الحل:

1– عدد اللجان التي يمكن تكوينها هي = لجنة 792

2– عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث ثلاثة من الطلبة يرفضون الترشح هو = لجنة 126

3– عدد اللجان التي يكون فيها طالبين على الأقل هي

$= 1 \times 1 + 7 \times 5 + 21 \times 10 + 35 \times 10$ لجنة596

4- لا يمكنهما أن يكونا في اللجنة معا هو R والطالبة Q

عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الطالب أما ضمن اللجنة وبالتالي عدد اللجان التي يجتمعان فيها هي R :

والطالبة Q نعتبر الطالب

= لجنة240

من خلال R :والطالبة Q من تم يمكن حساب اللجان التي لا يجتمع فيها الطالب

$= 792 - 240 =$ لجنة552

التمرين 9: عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و 6 نساء.

1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

2- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

أ - من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟

ب - من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟

ج - يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

3- ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟

الحل:

1 - عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو

= لجنة462

2- عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

أ - من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط هو:

$= 15 \times 5 = 1$ لجنة75

ب - من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر هو:

$= 1 \times 1 + 6 \times 5 + 15 \times 10$ لجنة181

ج - يجب أن تكون اللجنة متكونة من رجلين وامرأتين على الأقل هو:

$= 15 \times 10 + 20 \times 10$ لجنة350

3- عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب هو

= لجنة990

التمرين 10: تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1 ، M2 ، M3 .

25 % من التلاميذ يأتون من المتوسطة M1 ، 40 % من المتوسطة M2 و الباقي من المتوسطة M3

5 % من تلاميذ من المتوسطة M1 ، 10 % من تلاميذ M2 و 0,1 % من تلاميذ M3 يعيدون السنة .

نختار تلميذا عشوائيا .

a) كوّن شجرة متوازنة تترجم الوضعية .

b) احسب احتمال الحادثة A " التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة "

الحل:

نرمز بالرمز A_i للحادثة " التلميذ قادم من المتوسطة M_i " مع $1 \leq i \leq 3$

و بالرمز B للحادثة " التلميذ يعيد السنة "

a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم (تساوي احتمال) تترجم النسب الى الاحتمالات التالية

$$p(A_1)=0,40 \;\; ; \;\; p(A_2)=0,25 \;\; ; \;\; p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=0,35$$

➢ نشكل الشجرة المتوازنة

نضع على الفروع الأولى الاحتمالات السابقة

$$p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$$

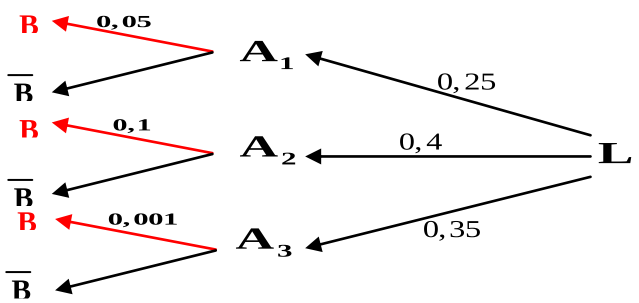
➢ تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي :

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادما من المتوسطة M1 هو 0,05

أي $p_{A_1}(B)=0,05$ و كذلك نقرأ $p_{A_2}(B)=0,1$ و $p_{A_3}(B)=0,001$

➢ نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو $\overline{B}$ ($\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$p_{A_1}(B)+p_{A_1}(\overline{B})=1$ و كذلك $p(A_i \cap B)=p(A_i)\times p_{A_i}(B)$

b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية

$$p(B)=p(A_1 \cap B)+p(A_2 \cap B)+p(A_3 \cap B)$$

$$=0,25\times 0,05+0,4\times 0,1+0,35\times 0,001=0,05285$$