

Epreuve :

Analyse 1

امتحان

EX01

1) Je fais le tableau de variations de $f(x) - x$

$$\text{car } f(x) - x = \frac{x^3 + 1}{3} - x = \frac{x^3 - 3x + 1}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3}$$

car $f(x) - x$ est défini sur \mathbb{R}

de plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \boxed{+\infty}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \boxed{-\infty}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

ص: ...

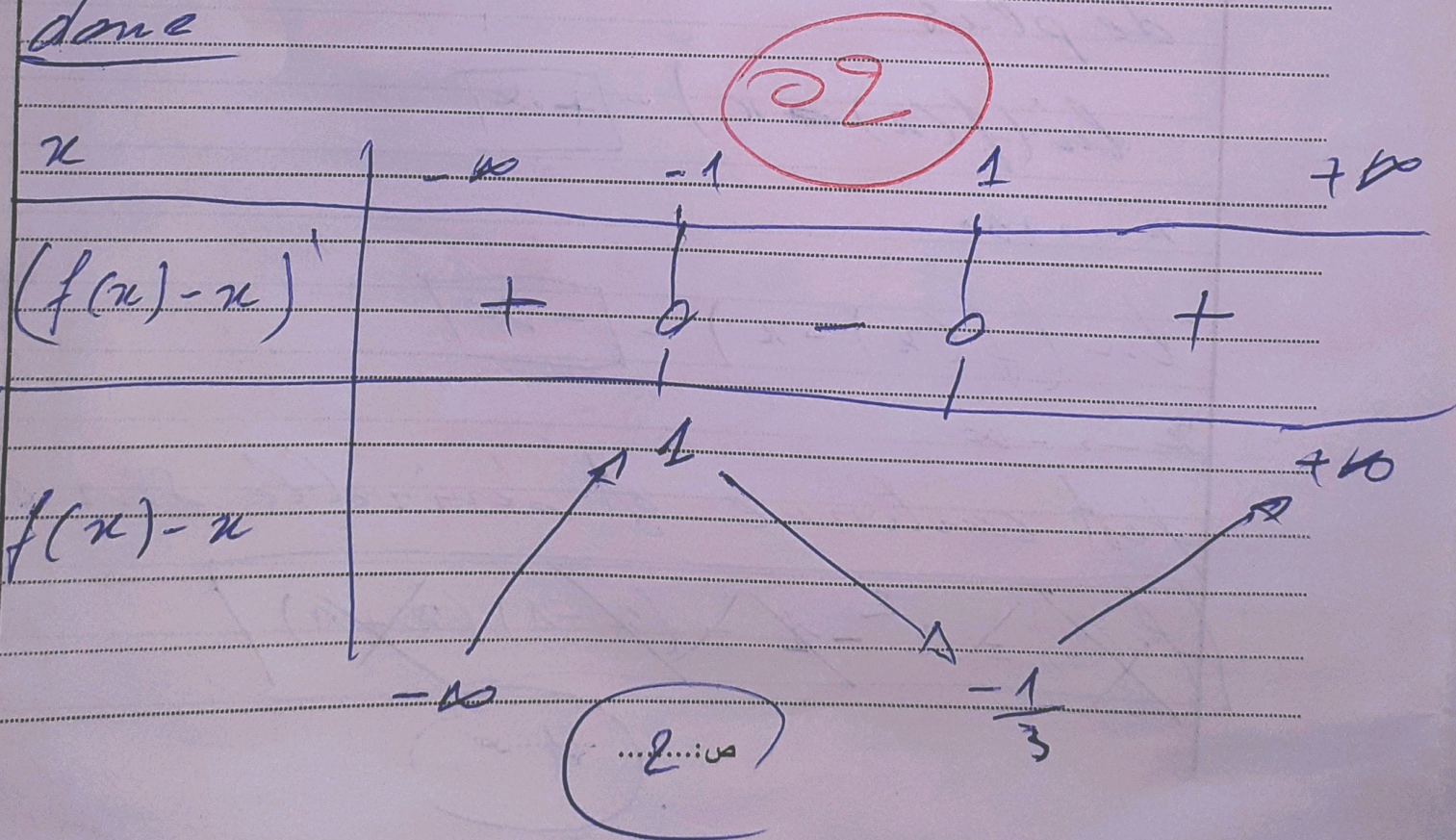
$$(f(x) - x)' = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{alors } (f(x) - x)' \begin{cases} > 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ = 0 \text{ si } x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ < 0 \text{ si } x \in]-1, 1[\end{cases}$$

$$\text{de plus } f(1) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$f(-1) + 1 = 1$$

donc



2) montrons que $f(x) = x$ possède 3 solutions revient à montrer que $f(x) - x = 0$ possède 3 solutions.

ona. soit g fonction t_f .

$$g(x) = f(x) - x$$

alors.

g est strictement positive sur $] -\infty, 1[$

de plus ona: $g(1) = 1 > 0$

$$\text{et } g(-2) = -\frac{7}{3} + 2 < 0$$

alors $g(1) \cdot g(-2) < 0$

donc il existe $\boxed{l_1 < -1} \mid t_f$

$\& g(l_1) = 0$ donc

$$\& \boxed{f(l_1) = l_1}$$

donc g est décroissante sur $] -1, 1[$

et $g(1) \cdot g(-1) < 0$. donc

$\exists l_2 \in] -1, 1[\mid t_f g(l_2) = 0$

$$\text{donc } \boxed{f(l_2) = l_2}$$

d'ens¹ pour $x > 1$

on prend

$$g(1) \cdot g(100) < 0$$

$$\text{donc } \exists l_3 > 1 \text{ tq } g(l_3) = 0$$

$$\text{donc } \boxed{f(l_3) = l_3}$$

alors $f(x) = x$ admet 3 solutions

tq

$$\boxed{l_1 < -1 < l_2 < 1 < l_3}$$

b] le signe de $f(x) - x$

$$f(x) - x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = l_1, l_2 \text{ ou } l_3 \\ > 0 & \text{si } x \in]l_1, l_2[\cup]l_3, +\infty[\\ < 0 & \text{si } x \in]-\infty, l_1[\cup]l_2, l_3[\end{cases}$$

e) vérifions que f est croissante

on a:

$$f'(x) = x^2 > 0 \text{ alors } f \text{ est croissante}$$

3) le comportement de la suite u_n à l_0 .

on a:

1^{er} cas

$Si u_0 \in \{l_1, l_2, l_3\}$

alors $u_{n+1} = u_n \quad \forall n$

donc (u_n) est une suite constante

$Si u_0 \in]l_1, l_2[\cup]l_3, +\infty[$

alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est une

Suite croissante

3^{eme} cas

$Si u_0 \in]-\infty, l_1[\cup]l_2, l_3[$

alors $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est decroissante

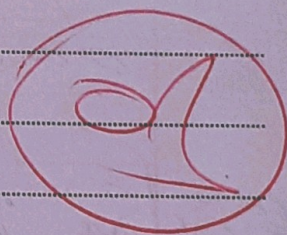
2^{em} cas
Signature
Lisible de
L'enseignant

Handwritten marks and scribbles at the bottom of the page.

EX02

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

$$1] D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$



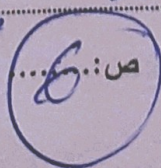
2] pour que f soit continue il faut que

ona: $e^x - e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}
alors $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^*

il suffit donc f soit continue en 0

ona

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$



on a: pour x assez proche de 0
on a $x \sim -x$ donc $e^x \sim e^{-x}$
de plus.

$$\text{posant } f(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

donc

$$f(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) - (e^0 - e^{-0})}{x - 0}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x}) - (e^0 - e^{-0})}{x - 0}$$

e c'est la dérivée de

$e^x - e^{-x}$ on part de

$$\text{donc } (e^x - e^{-x})' = e^x + e^x = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

il suffit de prendre $a = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

ص: 7

2 méthode

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

= 2

3) Etude de la dérivabilité de f
sur \mathbb{R}

ona $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$ et dérivable sur \mathbb{R}^*

il reste le point $x=0$.

ona:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$$

alors ona:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

~~lim~~
~~x~~

04

~~lim~~
~~f(x)~~

donc ona

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

alors f n'est pas dérivable en 0