Epreuve : Analyse 1 :إمتحان

19/2

Exo 1

1) le tableau de variation de $f(x)-x$

on a : $f(x)-x = \frac{x^3+1}{3} - x = \frac{x^3-3x+1}{3}$

$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3}$

on a $f(x)-x$ et défini sur $\mathbb{R}$.

de plus

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)-x) = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x \to -\infty} (f(x)-x) = \boxed{-\infty}$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\cancel{f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)}$

$$\left(f(x)-x\right)' = x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

alors $\left(f(x)-x\right)' \begin{cases} >0 & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1;+\infty[\\ = & \text{si } x=1 \text{ ou } x=-1 \\ <0 & \text{si } x \in]-1;1[\end{cases}$.

de plus $f(1)-1 = \frac{2}{3}-1 = \frac{-1}{3}$

$f(-1)+1 = 1$

<u>donc</u>

02

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\left(f(x)-x\right)'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) montrons que $f(x) = x$ possède 3 solution revien a montrer que $f(x) - x = 0$ possède 3 solution.

on a. Soit g fonction t_q :

$$g(x) = f(x) - x$$

alors.

g est strictement positive sur $]-\infty, 1[$

de plus on a : $g(1) = 1 > 0$

et $g(-2) = \frac{-7}{3} + 2 < 0$

alors $g(1) \cdot g(-2) < 0$

donc il existe $\boxed{l_1 < -1}$ t_q $g(l_1) = 0$ donc

$$\boxed{f(l_1) = l_1}$$

donc g est decroissante sur $]-1, 1[$

et $g(1) \cdot g(-1) < 0$. donc

$\exists\, l_2 \in]-1, 1[$ t_q $g(l_2) = 0$

donc $\boxed{f(l_2) = l_2}$

démé pour $x > 1$

on prende

$$g(1) \cdot g(100) < 0$$

d'où $\exists\, l_3 > 1$ tq $g(l_3) = 0$

d'où $\boxed{f(l_3) = l_3}$

alors $f(x) = x$ admet 3 solution

tq $\boxed{l_1 < -1 < l_2 < 1 < l_3}$

b] le signe de $f(x) - x$.

$$f(x) - x = \begin{cases} 0 \text{ si } x = l_1,\, l_2 \text{ ou } l_3 \\ > 0 \text{ si } x \in]l_1, l_2[\cup]l_3, +\infty[\\ < 0 \text{ si } x \in]-\infty, l_1[\cup]l_2 ; l_3[\end{cases}$$

03

2) vérifions que f est croissante

on a : 01

$f'(x) = x^2 > 0$ alors f est croissante

3) le comportement de U_n suite à U_0.

on a.

Epreuve : Analyse 1 امتحان :

$\boxed{1^{er}\ cas}$ $\boxed{\text{Si } U_0 \in \{l_1 ; l_2 ; l_3\}}$

alors $U_{n+1} = U_n \ \forall n$

donc U_n est une suite constante

$\lim = l_2$ $\lim = +\infty$

2^{em} cas $\boxed{\text{Si } U_0 \in]l_1 ; l_2[\cup]l_3 ; +\infty[}$

Signature Lisible de L'enseignant

alors $U_{n+1} - U_n > 0$ donc (U_n) est une

$\boxed{\text{Suite croissante}}$

$\lim = -\infty$ $\lim = l_2$

3^{eme} cas Si $U_0 \in]-\infty ; l_1[\cup]l_2 , l_3[$

alors $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite

(U_n) est decroissante

$\frac{2}{03}$

EX02

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

1) $\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[}$ 1

2) pour que f soit continue il faut que

on a: $e^{x} - e^{-x}$ et continue sur $\mathbb{R}$

alors $\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{x}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$

il suffit que f soit continue en 0

on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{x}$$

on a : pour x assez proche de 0

on a $x \sim -x$ donc $e^{x} \sim e^{-x}$

de plus.

posant $g(x) = e^{x} - e^{-x}$

$g(0) = 1 - 1 = 0$

donc

$$f(x) = \frac{(e^{x} - e^{-x}) - (e^{0} - e^{-0})}{x - 0}$$

donc

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - e^{-x}) - (e^{0} - e^{-0})}{x - 0}$$

c'est la dérivé de $e^{x} - e^{-x}$ en point 0

donc $(e^{x} - e^{-x})' = e^{x} + e^{x} = \boxed{2}$.

d'où $\lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{2}$

3

il suffit de prendre $\boxed{a = 2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

2ème méthode

1°) $\dfrac{e^{x} - 1}{x} + \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}$

$= 2.$

3/ Etude de la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

on a $\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

il reste le point $x=0$.

on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{e^{x}-e^{-x}}{x^2}$$

alors on a : $$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}}{x}$$

04

$$= \cancel{\lim} f(x)$$

donc on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

alors f n'est pas dérivable en 0