Université de Khemis Miliana — 2020/2021

Département :M-I — $3^{ème}$ Année Maths

Équations de la Phy-Maths — Examen final — Durée 1h

Exercice 1 *(10 pts)*

1) Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$$

2) Résoudre le système différentiel suivant:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{(y-x)\,z}.$$

Exercice 2 *(10 pts)*

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1}$$

i) Donner les régions du plan où l'équation (1) est du type hyperbolique, parabolique ou elliptique.

ii) Donner la solution générale dans le cas où l'équation (1) est hyperbolique.

Correction de l'Examen final L^3S_1 (2021)

EXO 1 1) Soit l'EDP suivante

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+u=0 \Longleftrightarrow x^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-u$$

1

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x^2}=-dy=-\frac{du}{u}$$

1,5 i) les deux premiers rapports on déduit l'intégrale première $H(x,y,u)=y-\frac{1}{x}$ ... ①

ii) puis les deux derniers rapports, on trouve d'autre

1,5 intégrale première $L(x,y,u)=\frac{u}{e^y}$ ... ②

et d'après ① et ② la solution générale est donnée par : $F\left(y-\frac{1}{x},\frac{u}{e^y}\right)=0$ ou bien

1 $u(x,y)=e^yR\left(y-\frac{1}{x}\right)$, avec F et R sont deux fonctions arbitraires.

2) soit le système différentiel suivant

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{(y-x)z}$$

i) les deux premiers rapports, l'intégrale première

1,5 $U(x,y,z)=xy$

ii) En additionnant les numérateurs des deux premiers rapports, puis en additionnant leurs dénominateurs

2,5 On trouve l'équation $dx+dy=-\frac{dz}{z}$ qui donne une autre intégrale première du système différentiel

$V(x,y,z)=ze^{x+y}$

1 d'après i) et ii) la solution générale est donnée par : $F(xy,ze^{x+y})=0 \Leftrightarrow z(x,y)=e^{-(x+y)}H(xy)$.

EXO2 : soit l'EDP suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ldots (*)$

0,5

1) On a $\Delta = b^2 - 4ac = -4y = 4(-y)$

1,5 i) si $y<0$ l'EDP est hyperbolique

ii) " $y=0$ " " parabolique.

iii) " $y>0$ " " elliptique.

2) La solution générale de l'EDP si $y<0$.

les équations caractéristiques sont données par :

0,5 $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{-y}$ et $\frac{dy}{dx} = \sqrt{-y}$. $\Rightarrow 2\sqrt{-y} + x = \varphi(x,y)$

0,5 et $-2\sqrt{-y} + x = \psi(x,y)$ où $J(\varphi,\psi) = \frac{\pm 2}{\sqrt{-y}} \neq 0$.

On a : i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \psi}$ ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$

4 iii) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\right)$.

iv) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-1}{2\sqrt{(-y)^3}}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \psi}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}\right)$

en remplaçant dans $(*)$ on obtient la forme

1,5 canonique suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} = 0$.

dont la solution générale est donnée par :

1,5 $u(x,y) = f(x+2\sqrt{-y}) + g(x-2\sqrt{-y})$ où f et g

sont deux fonctions arbitraires.