# 2-Transformations géométriques et interpolation

## 1. Transformations géométriques

Comment transformer une image ?

Chaque pixel de l'image est défini par sa position (i, j) et son amplitude (intensité) k dans l'image

Il existe deux types de transformations sur les pixels de l'image :

- **les transformations géométriques** qui modifient les positions des pixels
- **les transformations radiométriques** qui modifient les intensités des pixels

Possibilité d'effectuer des opérations entre images, qui utilisent ces deux types de transformation

### 1.1. Transformation affine

- Transformation directe sur les coordonnées spatiales d'un pixel exprimée de manière générale par :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + V$$

où T est une matrice de transformation, et V un vecteur

- Transformation inverse sur les coordonnées spatiales d'un pixel (sans V)

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

- On construit alors l'image J à partir de I par : $J(i_0 , j_0 ) = I(i, j)$

### 1.2. Translation

- La translation d'un pixel (i, j) de vecteur $(t_i ,t_j)^t$ s'exprime :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \end{pmatrix}$$


### 1.3. Changement d'échelle :

- Le changement d'échelle d'un pixel (i, j) de cœfficients $\alpha_i$ et $\alpha_j$ s'exprime :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$


### 1.4. Rotation

- La rotation d'un pixel (i, j) d'angle θ (dans un repère au centre de l'image) s'exprime :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$


### 1.5. Déformation linéaire

- La déformation linéaire d'un pixel (i, j) de cœfficients $\beta_{i1}$ , $\beta_{i2}$ , $\beta_{j1}$ et $\beta_{j2}$ s'exprime :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{i_1} & \beta_{i_2} \\ \beta_{j_1} & \beta_{j_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$


### 1.6.Les coordonnées homogènes :

- Système de coordonnées défini dans les "espaces projectifs"
 • espaces euclidiens ⊂ espaces affines ⊂ espaces projectifs
- Avec les mains : une coordonnée supplémentaire (x, y) affine → (x, y, 1) ~ (x·w,y·w,w) projectif
- Toutes les transformations géométriques sont exprimées matriciellement :

• Les translations de $R^2$ deviennent des transformations linéaires dans $R^3$

• Idem pour les projections (orthogonales ou non)

**Ex** : -déformation linéaire en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{i_1} & \beta_{i_2} & 0 \\ \beta_{j_1} & \beta_{j_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

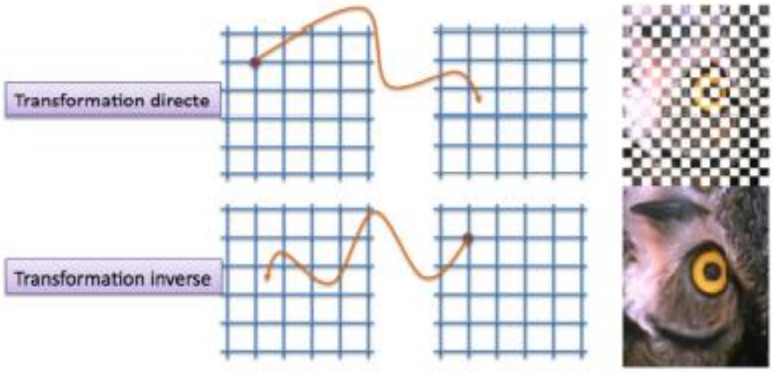
-déformation affine (linéaire + translation) :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{i_1} & \beta_{i_2} & T_x \\ \beta_{j_1} & \beta_{j_2} & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Transformations directe et inverse :

**Transformation directe :** on part des pixels de l'image initiale et on calcule leur transformé : génération de "trous" ou de superpositions

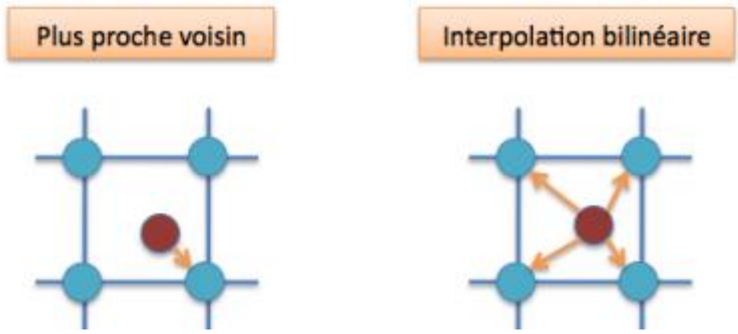
**Transformation inverse :** on part des pixels de l'image résultat et on détermine à quel pixel ils correspondent dans l'image initiale par transformation inverse.




Interpolations I Deux modes d'interpolation principaux :

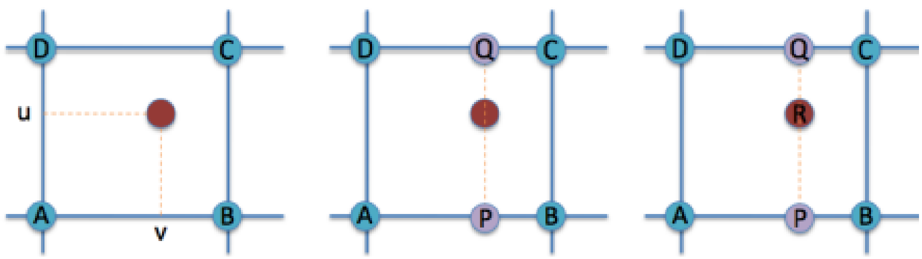
• Plus proche voisin : le pixel est de la même couleur que celle de son plus proche voisin

• Interpolation bilinéaire : prise en compte des 4 voisins du pixel pour faire une combinaison bilinéaire des intensités




I Il en existe beaucoup d'autres : B-splines, polynômes d'Hermitte, ...

Interpolation bilinéaire




$$\begin{aligned} P &= (1-v)A + vB \\ Q &= (1-v)D + vC \\ R &= (1-u)P + uQ \\ &= (1-v)(1-u)A + (1-u)vB + uvC + u(1-v)D \end{aligned}$$