Interrogation S1 Maths L3
(2020/2021).

EXO 1

Résoudre l'EDP suivante :

$$-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial u}{\partial z}=3uz \quad \cdots \quad (*)$$

solution

Le système caractéristique de (*) est donné par

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1+z^2}=\frac{du}{3uz}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{1+z^2}=\dfrac{du}{3uz} \\ \dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x} \\ \dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dz}{1+z^2} \end{cases}$$

1/ On a $\dfrac{dz}{1+z^2}=\dfrac{du}{3uz} \Leftrightarrow \dfrac{3z\,dz}{1+z^2}=\dfrac{du}{u}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ln(1+z^2)=\ln u+c \ , \quad c\in\mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{u}{(1+z^2)^{3/2}}\right)=c$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{(1+z^2)^{3/2}}=C_1=\psi_1(x,y,z,u).$$

2/ on a aussi $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x} \Leftrightarrow x\,dx=-y\,dy$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=C_2=\psi_2(x,y,z,u).$$

3/ $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dz}{1+z^2} \Leftrightarrow -\dfrac{x}{y}=\arctan(z)+C_3'$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} + \arctan(z) = C_3 = \psi_3(x,y,z,u).$$

Alors l'équation $V(x,y,z,u) = 0 \Leftrightarrow \phi(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{u}{(1+z^2)^{3/2}}, x^2+y^2, \frac{x}{y} + \arctan(z)\right) = 0$$

ou $\dfrac{u}{(1+z^2)^{3/2}} = H\left(x^2+y^2, \dfrac{x}{y} + \arctan(z)\right)$

donc $u(x,y,z) = (1+z^2)^{3/2} \cdot H\left(x^2+y^2, \dfrac{x}{y} + \arctan(z)\right).$

<u>EXO2</u> Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et l'EDP :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On introduit les nouvelles variables $\begin{cases} \varphi(x,y) = \alpha x + y \\ \psi(x,y) = \beta x + y \end{cases}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) Comment s'écrit l'EDP avec ces nouvelles variables

2) Donner la condition pour que l'EDP soit hyperbolique parabolique et elliptique.

<u>Solution</u>

soit l'équation : $a \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ldots (*)$

et $\begin{cases} \varphi(x,y) = \alpha x + y \\ \psi(x,y) = \beta x + y \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$

On a : 1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial \psi}$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial u}{\partial \psi}$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2\alpha\beta \dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi \partial \varphi} + \beta^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$

5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$$

donc $(*')$ $$\Longleftrightarrow (a\alpha^2 + b\alpha + c)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(2a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + 2c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} + \left(a\beta^2 + b\beta + c\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0.$$

* <u>Les Conditions</u> :

i) L'équation $(*')$ est hyperbolique si

$$b^2 - 4ac > 0$$

ii) L'équation $(*')$ est parabolique si

$$b^2 - 4ac = 0$$

iii) L'équation $(*')$ est elliptique si

$$b^2 - 4ac < 0.$$