Chapitre II. Conduction thermique

II.1. Définition

La conduction est le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des températures différentes.

Pour un milieu isotrope (propriétés physiques identiques) et homogène, λ (conductivité thermique) ne dépend que de la température.

Dans de nombreux cas pratiques, on peut considère λ comme constante pour un milieu donné.

Le tableau ci-dessous représente la conductivité thermique de quelques corps solides, liquides et gazeux

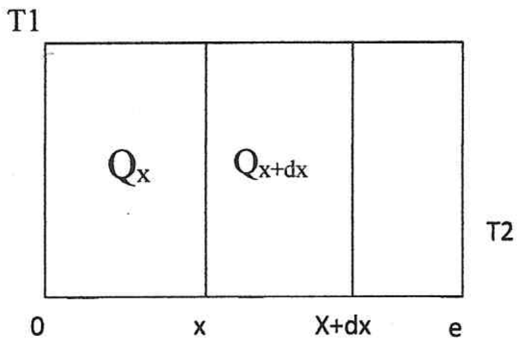
Matériau	λ (w / m. °k)
Aluminium	204
Fer purs	73
Mercure	8,2
eau	0,552
Air	0,0262

D'une façon générale, les métaux sont de bons conducteurs que les substances non métalliques. Les gaz sont des mauvais conducteurs.

II.2. Etude des modèles élémentaires

a/ Cas d'un mur simple (monocouche)

La figure représente une coupe transversale d'un mur de surfaces S, d'épaisseur e, de conductivité thermique λ.



On note T_1 : température de la paroi à x = 0.

T_2 : température à x = e.

Considérons un système d'épaisseur dx. Si le transfert thermique est indirectionnel ou il n y'a pas ni stockage, ni génération d'énergie.

Bilan d'énergie :

$$Q_{entrant} = Q_{Sortant} \Rightarrow Q_E = Q_S \Rightarrow Q_X = Q_{x+dx} = \text{constant}$$

On a la loi de Fourier : $\mathbf{Q = -\lambda.S.\frac{dT}{dx}}$

Signe −: car la température diminue → variation de température négative (T_2-T_1) et pour avoir le flux positif, on ajoute le signe −: selon le 2[éme] principe de la thermodynamique.

$$Q.dx = -\lambda.s.dT \Rightarrow Q.\int_0^e dx = -\lambda.s.\int_{T1}^{T2} dT \Rightarrow Q.e = -\lambda.s.(T_2 - T_1) = \lambda.s.(T_1 - T_2)$$

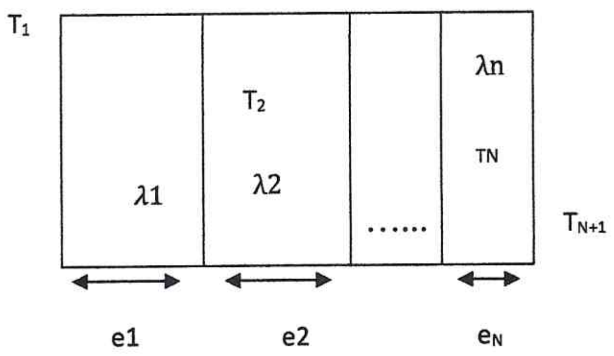
$$\Rightarrow Q = \frac{\lambda.s.(T_1 - T_2)}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda.s}} \qquad \text{avec } \frac{e}{\lambda.s} = R_{th} \text{ : résistance thermique}$$

Donc $Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$

Cette loi $R_{the} = \frac{e}{\lambda.s}$ est analogue à la loi d'ohm en électricité qui définit l'intensité de courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique.

b/ Cas d'un mur composite (multicouche)

- **Cas d'un composite en série**



Soit un mur composite de plusieurs couches d'épaisseur $e_1, \dots \dots \dots . e_N$ de surface S, de conductivité thermique $\lambda_1, \dots \dots \dots .. \lambda_N$

Avec : $T_1 > T_{N+1}$ (T. C de corps plus chaud au corps moins chaud)

La température à x = 0 est T_1 x : variation d'épaisseur

La température à x = $\sum ei = e_1 + \cdots \dots \dots .. + e_N$ est T_{N+1}

$$Q = constant = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 . S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 . S}} =, \dots \dots . = \frac{T_N - T_{N+1}}{\frac{e_N}{\lambda_N . S}}$$

Donc : $T_1 - T_2 = \frac{Q.e_1}{\lambda_1 . S}$

$T_2 - T_3 = \frac{Q.\ e_2}{\lambda_2 . S}$

$\vdots$

$T_N - T_{N+1} = \frac{Q.\ e_N}{\lambda_N . S}$

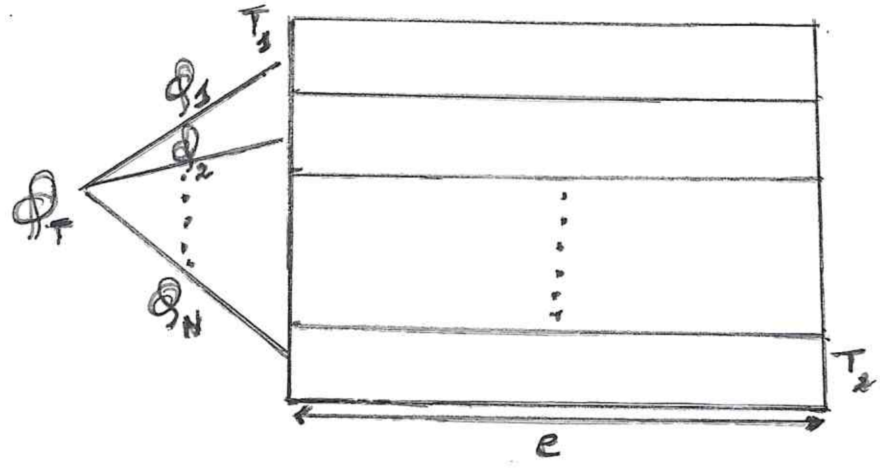
On fait la somme :

$$T_1 - T_{N+1} = Q \left[\frac{e_1}{\lambda_1 . S} + \frac{e_2}{\lambda_2 . S} + \cdots \dots \dots \frac{e_N}{\lambda_N . S} \right]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\frac{e_1}{\lambda_1 . S} + \frac{e_2}{\lambda_2 . S} + \cdots \dots .. + \frac{e_N}{\lambda_N . S}} = \frac{T_1 - T_{N+1}}{R_{thg}}$$

Avec R_{thg} : résistance thermique globale

- **Cas d'un mur en parallèle**



$Q_1 = \frac{T_1-T_2}{R_1}$, $Q_2 = \frac{T_1-T_2}{R_2}$, ………, $Q_N = \frac{T_1-T_2}{R_N}$

$$Q_T = \sum Q = Q_1 + Q_2 + \cdots \ldots. + Q_N = T_1 - T_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \ldots. + \frac{1}{R_N}\right)$$

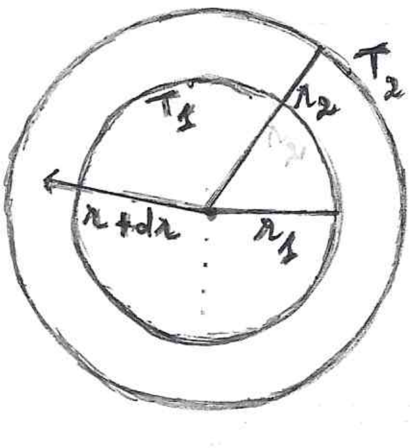
$$\frac{1}{R_{thg}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \ldots. + \frac{1}{R_N}$$

$$Q_T = \frac{T_1 - T_2}{R_{thg}}$$

c/ Cas d'un cylindre

- **Cas d'un cylindre simple (monocouche)**

La figure représente une coupe transversale d'un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon interne r_1 et rayon externe r_2



La température de face interne T_1 et la température de face externe T_2.

On suppose que le gradient longitudinale de température est négligeable (ni stockage, ni génération)

Bilan thermique : $Q_r = Q_{r+Q_r} = constant$

$Q = -\lambda\, S\frac{dT}{dr}$ $\qquad S_{cylindre} = 2\pi.r.l$ $\qquad$ avec l : longueur du cylindre

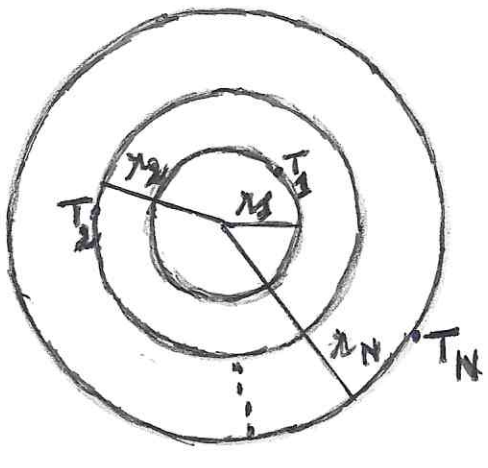
$$Q = -\lambda.2\pi.l.r.\frac{dT}{dr} \Longrightarrow Q\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r} = -\lambda.2.\pi.l.\int_{T1}^{T2} dT$$

$Q\ln\frac{r_2}{r_1} = 2.\pi.l.\lambda(T_1 - T_2)$. Donc $Q = \frac{2.\pi.l.\lambda(T_1-T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{T_1-T_2}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda}} = \frac{T_1-T_2}{R_{thg}}$

$$R_{thg} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda}$$

- **Cas d'un cylindre multicouche**

La figure représente une coupe transversale d'un cylindre multicouche creux.



La température de la face interne T_1. La température de la face externe T_N. Chaque couche est caractérisée par une λ.

Bilan thermique :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2}} = \cdots\ldots\ldots\ldots, = \frac{T_{N-1} - T_N}{\frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}}$$

$$T_1 - T_2 = Q.\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1}$$

$$T_2 - T_3 = Q.\frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2}$$

$$\vdots$$

$$T_{N-1} - T_N = Q.\frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}$$

On fait la somme :

$$T_1 - T_N = Q.\left[\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}\right]$$

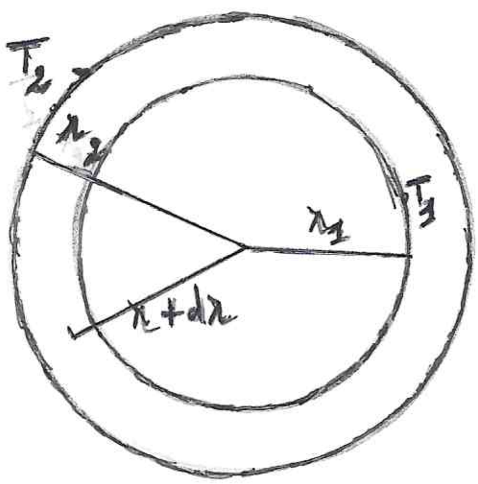
$$Q = \frac{T_1 - T_N}{\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}} = \frac{T_1 - T_N}{R_{thg}}$$

$$R_{thg} = \text{résistance thermique globle} = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2.\pi.l.\lambda_1} + \frac{\ln\frac{r_3}{r_2}}{2.\pi.l.\lambda_2} + \cdots \ldots + \frac{\ln\frac{r_N}{r_{N-1}}}{2.\pi.l.\lambda_{N-1}}$$

d/ Cas d'une sphère

- **Cas d'une sphère monocouche**

Soit une coupe transversale d'une sphère creuse de conductivité thermique λ. rayon interne r_1 et rayon externe r_2. On suppose qu'il n'y'a pas ni stockage, ni génération.



Bilan thermique : $Q_r = Q_{r+dr} = Q_{constant}$

$Q = -\lambda . S . \frac{dT}{dr}$ avec $S = 4.\pi.r^2$

$$Q.d_r = -\lambda.4.\pi.r^2.dT$$

$$Q.\int_{r_1}^{r_2} \frac{d_r}{r^2} = -\lambda.4.\pi \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$Q\int_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{1}{r}\right) = -4\pi\lambda\,(T_2 - T_1)$$

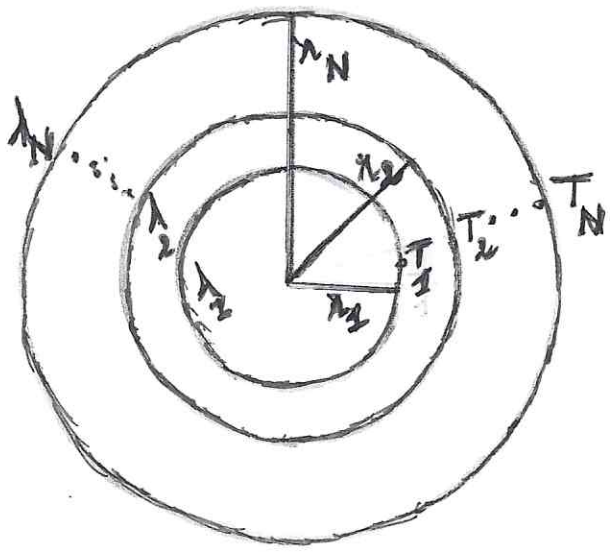
$$Q\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right) = -4\pi\lambda\,(T_2 - T_1)$$

$$Q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = 4\pi\lambda\,(T_1 - T_2)$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{thg}},\ R_{thg} = \frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}$$

- **Cas d'une sphère composite (multicouche)**

Supposant une sphère creuse multicouche de rayon interne r_1 et de rayon externe r_N.



T_1 : température interne.

T_N : température externe.

Conductivité thermique de λ_1à λ_N

Bilan thermique (flux thermique) :

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1}}$$

$$Q = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2}}$$

$$\vdots$$

$$Q = \frac{T_{N-1} - T_N}{\frac{\frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}}$$

Donc : $T_1 - T_2 = \frac{Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi\lambda_1}$

$T_2 - T_3 = \frac{Q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)}{4\pi\lambda_2}$

$$\vdots$$

$T_{N-1} - T_N = \frac{Q\left(\frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N}\right)}{4\pi\lambda_{N-1}}$

On fait la somme :

$$T_1 - T_N = Q\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1}+\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2}+\cdots\ldots\ldots..+\frac{\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}\right]$$

$$Q=\frac{T_1 - T_N}{\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda_1}+\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}}{4\pi\lambda_2}+\cdots\ldots\ldots..+\frac{\frac{1}{r_{N-1}}-\frac{1}{r_N}}{4\pi\lambda_{N-1}}}$$

$$Q=\frac{T_1 - T_N}{R_{thg}}$$