Université Djilali Bounaama
Faculté des sciences et de la technologie
Département MI

2020/2021

Analyse 1

Série n4

Exercice 1 *Soit la fonction réelle* $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

1. *Sachant que* $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, *trouver deux nombres réels* $\rho > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que*

$$0 < x-1 < \rho \quad \Rightarrow \quad f(x) > 10^8,$$
$$-\delta < x-1 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < -10^{11}.$$

2. *Sachant que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, *trouver deux nombres réels* $A > 0$ *et* $B > 0$ *tels que*

$$x > A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 1| < 10^{-4},$$
$$x < -B \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 1| < 10^{-4}.$$

Exercice 2 *Montrer par définition que :*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+7}{x+1} = 4, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{x-3} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x+7} = +\infty.$$

Exercice 3 *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad , \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \lim_{x\to 0} \sin(x)\ln(x), \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right],$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\frac{1}{x}]+x}{[\frac{1}{x}]-x}, \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1), \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}, \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - (x+1)\right)$$

Exercice 4 1. *En utilisant* $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$, *calculer* $\lim_{x\to 0}(1+\frac{k}{x})^x$, $k \in \mathbb{R}$.

2. *En utilisant* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *calculer* $\lim_{x\to 0}(\frac{x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Exercice 5 *Déterminer les limites suivantes quand elles existent :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(px)}{\sin(qx)}, (p,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}, \lim_{x\to\pi/2} (\pi - 2x)\tan x,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x, \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}, \lim_{x\to -1^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3), \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}, \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}, \lim_{x\to 0^+} \frac{a^x+b^x}{2} \quad a,b>0.$$

Exercice 6 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.*

2. En déduire que la fonction "sin" n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 *Montrer que les fonctions suivantes n'admet pas une limite en x_0 :*

$$f_1(x) = \cos x; x_0 = +\infty, f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right); x_0 = 0, f_3(x) = E(x); x_0 = 3,$$

$$f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{\ln x}\right); x_0 = 1.$$

Exercice 8 *Déterminer les nombres a et b de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 2\,; \\ 2x + bx, & x \geq 2. \end{cases} \quad \begin{cases} e^{ax}, & x < 1\,; \\ 2, & x = 1\,; \\ x^2 + b^2, & x > 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(\sqrt{x^2 - 1} + a), & x > 1\,; \\ 2\ln 3 + \sin(\pi x), & x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 9 *Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ pour les fonctions suivantes*

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0\,; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad f_2(x) = xE(x), \quad f_3(x) = E(x)\sin(\pi x),$$

$$f_4(x) = \big(x - E(x)\big)^2, \quad f_5(x) = E(x) + \big(x - E(x)\big)^2.$$

Exercice 10 – *Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution entre 0 et 1. La solution est-elle unique ?*
– *montrer que l'equation $x + \sin x = \frac{1}{x^2+4}$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.*

Exercice 11 *1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.*

2. Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas uniformément continues :

$$a) f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2, \quad b) g :]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{1}{x}, \quad c) h :]0, +\infty[\ni x \mapsto \ln x.$$

Exercice 12 *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction telle que*

$$\forall x, x' \in [a, b]; x \neq x' \ \text{ on a } \ |f(x) - f(x')| < |x - x'|$$

1. *Montrer que f est continue sur $[a, b]$.*
2. *Montrer que la fonction f admet un point fixe unique, c.a.d, l'equation $f(x) = x$ admet une solution unique.*

Exercice 13 *Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :*

$$f_n(x) = x^n - x - 1, \quad \text{avec } n \geq 2.$$

1. *Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.*
2. *Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.*
3. *En déduire que la suite (x_n) est décroissante et quelle converge vers une limite l.*
4. *Déterminer l.*