I Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.1 Dérivabilité en un point

Définition *(Nombre dérivé en un point)*

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Interprétation géométrique

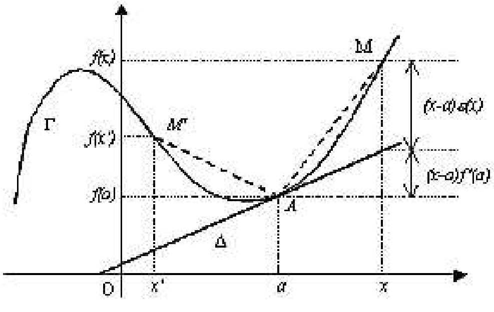
Soient $A = (a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ sur la courbe représentative Γ de f.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la *corde* AM.

Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la corde AM possède une position limite non verticale Δ, de coefficient directeur $f'(a)$, quand x tend vers a, c'est-à-dire quand M tend vers A sur Γ. On dit que Δ est la *tangente* à Γ en son point d'abscisse a.

Dire que f est dérivable en a, c'est donc dire que la courbe représentative Γ de f présente au point $A(a, f(a))$ une tangente Δ non verticale.

L'équation de Δ est $y = f(a) + (x - a)f'(a)$.



Proposition *(Une autre définition de la dérivabilité)*

f est dérivable en un point a de I $\Leftrightarrow$ il existe un réel ℓ et une application $x \mapsto \varepsilon(x)$ de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\varepsilon(a) = 0$, et tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x - a)\ell + (x - a)\varepsilon(x)$$

Le réel ℓ est alors égal à $f'(a)$.

La figure ci-dessus montre les quantités $(x - a)f'(a)$ et $(x - a)\varepsilon(x)$, relatives à un point $M(x, f(x))$ assez "éloigné" de A. Au voisinage de A, et si $f'(a) \neq 0$ (c'est-à-dire si la tangente Δ n'est pas horizontale), alors $(x - a)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $(x - a)f'(a)$.

Remarques et exemples

- Une translation permet de se ramener à un calcul à l'origine : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Si f dérivable en a, f est continue en a. La réciproque est fausse.
  Exemple : si $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, f est continue mais non dérivable en 0.
- Si f est constante sur I, alors : $\forall a \in I,\ f'(a) = 0$.
- Si f est l'application $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) alors : $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = na^{n-1}$.
- Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\exp'(a) = \exp(a)$ et $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.
- Pout tout a de $\mathbb{R}$, $\sin'(a) = \cos(a)$ et $\cos'(a) = -\sin(a)$.
  Si $a \neq \frac{\pi}{2}\,(\pi)$, alors $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a)$.

I.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

Définition *(Nombre dérivé à gauche)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité gauche de I.
On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x\to a, x<a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de f en a et est notée $f'_g(a)$.

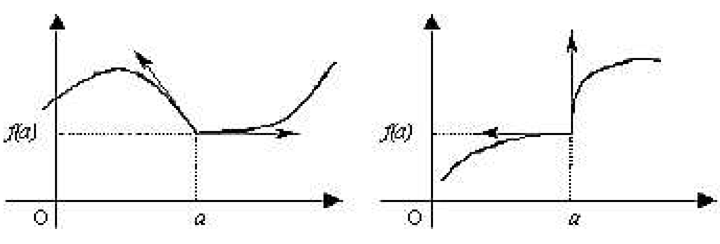
Définition *(Nombre dérivé à droite)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité droite de I.
On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée nombre dérivé à droite de f en a et est notée $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique

Dire que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, c'est dire que la courbe Γ de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) non verticale.

Le coefficient directeur de cette demi-tangente est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$.)



Sur l'exemple de gauche, f est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a) = -1$ (demi-tangente oblique, parallèle à $y = -x$) et $f'_d(a) = 0$ (demi-tangente horizontale.)

Sur l'exemple de droite, on a $f'_g(a) = 0$ (demi-tangente horizontale), mais f n'est pas dérivable à droite en a (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).

Remarques

- Soit a un point de I qui ne soit pas une extrémité de I.
  f est dérivable en $a \Leftrightarrow$ elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
  On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Si f dérivable en a, alors f est continue en a.
  La réciproque est fausse (comme le montre l'exemple de $x \mapsto |x|$ en 0.)
  Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, elle y est continue à gauche (resp. à droite.)
- Si f coïncide en a et à droite de a avec une application g définie au voisinage de a et dérivable en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = g'(a)$ (remarque analogue à gauche de a.)
  Par exemple, si f est définie par $f(x) = |x| + \exp(x)$, elle coïncide en 0 et à droite de 0 avec $g(x) = x + \exp(x)$ qui est telle que $g'(0) = 2$.
  De même f coïncide en 0 et à gauche de 0 avec $h(x) = -x + \exp(x)$ qui est telle que $h'(0) = 0$.
  On en déduit que f est dérivable à droite et à gauche en 0, avec $f'_d(0) = 2$ et $f'_g(0) = 0$.

I.3 Opérations sur les applications dérivables en un point

Proposition *(Linéarité de la dérivation en un point)*

Soient f et g deux applications dérivables au point a. Pour tous scalaires α, β, l'application $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

Proposition *(Produit d'applications dérivables en un point)*

Soient f et g deux applications dérivables en un point a.
Alors l'application $h = fg$ est dérivable en a et $h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Proposition *(Dérivée de l'inverse)*

Si g est dérivable en a, avec $g(a) \neq 0$, alors $h = \dfrac{1}{g}$ est dérivable en a, et $h'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.
Supposons de plus que f soit dérivable en a.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Proposition *(Composition et dérivation)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application dérivable en un point a de I.
Soit J un intervalle contenant $f(I)$ et non réduit à un point.
Soit $g : J \to \mathbb{R}$, une application dérivable au point $b = f(a)$ de J.
Alors $g \circ f$ est dérivable au point a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$.

Proposition *(Dérivation et bijection réciproque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, strictement monotone.
f est donc bijective de I sur un intervalle J. Soit a dans I tel que $f'(a) \neq 0$.
Alors $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ et $g'(b) = \dfrac{1}{f'(b)} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(a)}$.

II Dérivabilité sur un intervalle

II.1 Applications dérivables, applications de classe C1

Définition

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
L'application $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout a associe $f'(a)$ est appelée *application dérivée* de f.
Cette application est également notée $\mathrm{D}f$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^1$)*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.

Opérations sur applications dérivables sur un intervalle I

- Soient f et g deux applications dérivables sur l'intervalle I.
  Pour tous α, β dans $\mathbb{R}$, $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $h' = \alpha f' + \beta g'$.
  L'application fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
  Si g ne s'annule pas sur I, alors $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables, avec $f(I) \subset J$.
  Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, strictement monotone.
  L'application f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
  Si f' ne s'annule pas sur I, alors $g = f^{-1}$ est dérivable sur J et $g' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
- Tous les résultats précédents s'énoncent à l'identique pour des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

- La dérivée de $x \to \sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $x \to \cos x$, nulle en $\pm\frac{\pi}{2}$. On en déduit :
$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- La dérivée de $x \to \cos x$ sur $[0, \pi]$ est $x \to \sin x$, nulle en $x = 0$ et $x = \pi$. On en déduit :
$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- La dérivée de $x \to \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $x \to 1 + \tan^2 x$, toujours non nulle. On en déduit :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Dérivation des fonctions puissances

- Par récurrence sur $n \geq 1$, on sait que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- Si n est un entier négatif, $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{-nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$.

  L'égalité $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc vraie pour les exposants α de $\mathbb{Z}$.
- Soit $f : x \to \sqrt[n]{x}$, bijection réciproque de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^n$.

  L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée $g'(x) = nx^{n-1}$ est non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

  Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \frac{1}{g'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

  La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc encore valable quand α est de la forme $\alpha = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

  Si $\alpha = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$, alors : $(x^\alpha)' = ((x^p)^{1/q})' = \frac{1}{q}(x^p)'(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{p-1+\frac{p}{q}-p} = \alpha x^{\alpha-1}$.

  La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc encore valable quand α est un rationnel.
- Dans le cas d'un exposant α quelconque, en particulier non rationnel :

$$\forall x > 0,\ (x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x}\exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

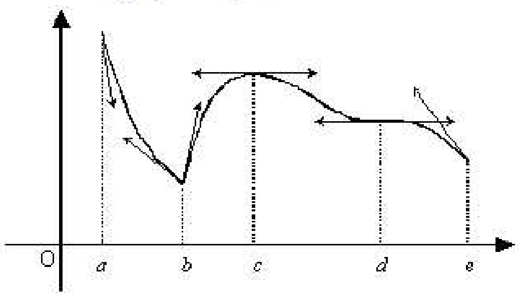
II.2 Extremums d'une fonction dérivable

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit a un point intérieur à I.
Si f possède un extrémum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques

- La réciproque est fausse : si $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extrémum en 0.
- En fait, les extrémums locaux d'une application f sur un intervalle I doivent être recherchés parmi les points où f n'est pas dérivable, parmi les extrémités de I, et parmi les points intérieurs à I où f est dérivable de dérivée nulle.
- Le graphe ci-dessous montre quelques cas possibles :



II.3 Rolle et accroissements finis

Théorème *(Théorème de Rolle)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème *(Egalité des accroissements finis)*

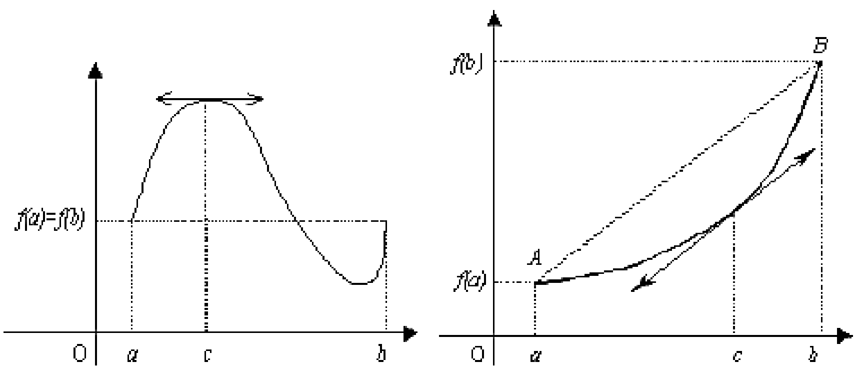
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Propriétés et remarques

- Il n'y a pas nécessairement unicité du point c de $]a, b[$ qui figure dans les deux théorèmes.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.
  On suppose que : $\forall x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M$. Alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|$, avec $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.
- On peut aussi écrire, en posant $b = a + h$:
  Soit f une application continue sur $[a, a + h]$ et dérivable sur $]a, a + h[$.
  Alors il existe θ dans $]0, 1[$ tel que : $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.
  Dans cette version du "TAF", le signe de h est quelconque (si f est dérivable sur un voisiange de a) et on peut considérer θ comme une fonction de h.

Interprétation géométrique

Soit Γ la courbe de f. Soient A, B les points d'abscisse a, b de Γ.
Avec les hypothèses du théorème de Rolle, il y a un point de Γ où la tangente est horizontale.
Avec les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe un point de Γ où la tangente est parallèle à la corde AB.



Proposition *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur l'intérieur de I.
f est k-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$.

Proposition *(Prolongement d'une application de classe $\mathcal{C}^1$)*

Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que f' possède une limite finie ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, avec $f'(a) = \ell$.
On a bien sûr un résultat analogue au point b.

Remarque

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \infty$.
Alors la courbe représentative de f admet au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale.

II.4 Monotonie des applications dérivables

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Toute application constante f de I dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I.

Proposition *(Caractérisation des applications monotones)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
– L'application f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
– L'application f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Proposition *(Caractérisation des applications strictement monotones)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable et monotone.
L'application f est strictement monotone sur I si et seulement si sa dérivée f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de I d'intérieur non vide (ou encore si et seulement si f' ne s'annule qu'en des points isolés de I.)

Proposition *(Applications ayant la même dérivée)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, dérivables sur I. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
– Pour tout x de I, on a $f'(x) = g'(x)$.
– Il existe une constante λ telle que : $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) + \lambda$.

Remarque

Tout ce qui découle de Rolle est valable sur un intervalle, et pas sur une réunion d'intervalles.
Par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$.
De même, si deux applications dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifient $f' = g'$ sur $\mathbb{R}^*$, alors elles diffèrent d'une constante λ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et d'une constante μ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III Applications de classe Ck

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

III.1 Dérivées successives

Définition *(Applications n fois dérivables sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée n-ième* de f sur I.

L'application $f^{(n)}$ est peut également être notée $D^n f$ ou encore $\dfrac{d^n f}{d x^n}$.

Remarques

- On note souvent f'' et f''' les applications dérivée seconde et dérivée troisième de f.
- *Nombre dérivé n-ième en un point :*
  Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier naturel.
  On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.
  On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *nombre dérivé n-ième* de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur I tout entier.)
- Si f est n fois dérivable sur I, alors pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, l'application $f^{(k)}$ est $n-k$ fois dérivable sur I (et en particulier continue si $k < n$).
  Pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, on a alors l'égalité : $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$.

Définition *(Applications de classe C^k)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, k fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe C^k* sur I.

On note $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe C^k pour tout k).

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.

Remarques

- $C^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.
  On a les inclusions $C^0(I, \mathbb{R}) \supset C^1(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset C^k(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset C^\infty(I, \mathbb{R})$.
  De même on a : $C^\infty(I, \mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I, \mathbb{R})$.
- On dit souvent d'une application de classe C^k qu'elle est k fois continûment dérivable.
- On a $f^{(n)} \equiv 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est une application polynomiale de degré $\leq n-1$ sur I.

III.2 Opérations sur les applications de classe Ck

Dans les énoncés suivants, k est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Les propriétés de ce paragraphe pourraient être énoncées de façon analogue en termes de fonctions k fois dérivables sur un intervalle I.

Proposition *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$. Soient α, β deux réels.
Alors $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$.

Proposition *(Formule de Leibniz)*

Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j f^{(j)} g^{(k-j)}$.

Proposition *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $f(I)$.
Soit g une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}$.
Alors l'application $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition *(Bijection réciproque d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, ou que $f'(x) < 0$ pour tout x de I.
L'application f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
Dans ces condtions, la bijection réciproque f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$

- Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des fonctions rationnelles sur leur domaine de définition.
- L'application $x \mapsto \exp x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  L'application $x \mapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- De même les égalités $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ montrent que les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il en découle que l'application $x \mapsto \tan x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
- Les applications $x \mapsto x^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les applications $x \mapsto \operatorname{ch} x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $x \mapsto \operatorname{th} x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les applications $x \mapsto \arcsin x$, et $x \mapsto \arccos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
  L'application $x \mapsto \arctan x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions qui se déduisent des précédentes par somme, produit, quotient, puissance et composition sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

III.3 Formules de Taylor

Proposition *(formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{n+1}. On a l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n}.$$

R_n est appelé le *reste intégral d'ordre n* de la formule de Taylor de f sur $[a,b]$.

Proposition *(inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{n+1}.

Soient a et b deux points de I.

Alors : $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Exemples

– Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq M_1 \, |b-a| \quad \text{où } M_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$$

Pour $n = 1$, on trouve :

$$|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq M_2 \frac{(b-a)^2}{2!} \quad \text{où } M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$$

– Voici des exemples d'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange aux fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$ sur l'intervalle $[0, x]$:

$$\left|\sin x - x\right| \leq \frac{|x|^3}{3!} \qquad \left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{|x|^5}{5!} \qquad \left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

$$\left|\cos x - 1\right| \leq \frac{x^2}{2!} \qquad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}\right| \leq \frac{x^4}{4!} \qquad \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

En posant $h = b - a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M = \sup_{[a,a+h]} \left| f^{(n+1)} \right|$$

Proposition *(formule de Taylor-Young)*

Soit f une application de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$, et soit a un point de I.

Alors il existe une application ε définie sur I, telle que :

$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

V Développements limités

V.1 Notion de développement limité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application, et soit x_0 un réel élément ou extrémité de I.
Soit n un entier naturel. On dit que f admet un *développement limité* (en abrégé un DL) à l'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Avec les notations de Landau, cela peut s'écrire : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.

Proposition *(unicité du développement limité)*

Soit f une application admettant un DL d'ordre n en x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.
Alors les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont définis de façon unique.
Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ est appelé *partie principale* du développement limité.

Troncature d'un développement limité

- Supposons que f admette un DL d'ordre n en x_0. Soit p un entier naturel, $p \leq n$.
  Alors f admet un DL d'ordre p en x_0, obtenu par *troncature*. Plus précisément :
  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^p)$.
  Par exemple, si $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 - x + 2x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.
- Il arrive qu'on utilise les notations "O" de Landau dans un développement limité.
  Par exemple, si $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 - x^4 + \mathrm{o}(x^4)$, alors $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{O}(x^4)$.
  Cette dernière écriture contient un peu plus d'informations que $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$.

DL et équivalents

- On considère le développement $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$.
  Si tous les a_k sont nuls, alors $f(x)$ est négligeable devant $(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0.
  Sinon, et si m est l'indice minimum tel que $a_m \neq 0$, alors $f(x) \sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0.
  Inversement, si $f(x) \sim a_m(x-x_0)^m$ en x_0, avec $m \in \mathbb{N}$, alors $f(x) = a_m(x-x_0)^m + \mathrm{o}((x-x_0)^m)$.
  Par exemple : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}(x^4) \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \sim \frac{x^4}{4!}$ en 0.
- Dans la pratique, on utilisera souvent les équivalents dans les recherches de limites, et les développements limités lorsqu'on cherche plus de précision (par exemple non seulement l'existence d'une demi-tangente mais encore la position de la courbe par rapport à celle-ci) ou quand il est difficile d'utiliser des équivalents (notamment dans les sommes.)

DL à gauche ou à droite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage d'un point x_0.

Il arrivera que seule la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ ou à $I \cap]-\infty, a[$ possède un DL en x_0.

On parlera dans ce cas de développement limité à droite ou à gauche en x_0.

Définition *(développement limité au voisinage de $\pm\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$.)

Soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité (en abrégé un DL) à l'ordre n en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$, avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Avec les notations de Landau, cela peut s'écrire : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Remarque

Tant pour les DL à droite où à gauche que pour les DL en $\pm\infty$, on dispose de propriétés analogues à celles qui ont déjà été vues (unicité, troncature, équivalents, etc.)

Importance des développements à l'origine

- f a un DL d'ordre n en $x_0 \Leftrightarrow g : x \mapsto g(x) = f(x_0 + x)$ a un DL d'ordre n en 0.
  Plus précisément : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \Leftrightarrow g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.
- De même, f a un DL d'ordre n en $\pm\infty \Leftrightarrow h : x \mapsto h\left(\frac{1}{x}\right)$ a un DL d'ordre n en 0.
  Plus précisément : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) \Leftrightarrow h(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$.
- Ces deux remarques, et le fait que les calculs y sont plus simples, font que les DL sont généralement formés à l'origine (c'est d'ailleurs le cas des DL usuels.)

DL et continuité, DL et dérivabilité

- Dire que f admet un DL $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$ d'ordre 0 en x_0, c'est dire que f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0.
  Ce développement s'écrit nécessairement $f(x) = f(x_0) + \mathrm{o}(1)$.
- Dire que que f admet un DL $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$ d'ordre 1 en x_0, c'est dire que f est dérivable (après prolongement éventuel en x_0).
  Ce développement s'écrit nécessairement $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$.
- En revanche un DL d'ordre $n \geq 2$ en x_0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en x_0.
  Un contre-exemple est donné par l'application $f : x \mapsto x^3 \sin\frac{1}{x}$ en 0.
- Si f est de classe C^n de I dans $\mathbb{R}$, et si x_0 appartient à I, alors l'égalité de Taylor-Young prouve l'existence du DL de f en x_0 à l'ordre n. Ce DL s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Placement par rapport à une tangente ou à une asymptote

– On suppose que f admet un DL d'ordre $n \geq 3$ en x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)).$$

On sait que cela implique la dérivabilité de f en x_0, avec $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$.
L'équation de la tangente Δ à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est donc $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.
Remarque : si le DL n'est valable qu'à gauche ou à droite de x_0, c'est une demi-tangente.
Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$.
Alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim a_m(x - x_0)^m$ au voisinage de x_0.
On en déduit le placement local de la courbe $y = f(x)$ par rapport à Δ.

- Si m est pair, le placement de $y = f(x)$ par rapport à Δ est donné par le signe de a_m.
  Si $a_m > 0$, la courbe est localement "au-dessus" de sa tangente.
  Si $a_m < 0$, la courbe est localement "en-dessous" de sa tangente.
- Si m est impair, la courbe $y = f(x)$ "traverse" Δ au voisinage de M_0.
  Δ est donc une tangente d'inflexion.

– On suppose qu'au voisinage de $\pm\infty$ on a le développement : $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.
Alors $f(x) = a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$ (c'est un "développement asymptotique".)
Ainsi $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - a_0x - a_1) = 0$. On en déduit que la droite Δ d'équation $y = a_0x + a_1$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.
Soit m l'indice minimum tel que $m \geq 2$ et $a_m \neq 0$. Alors $f(x) - a_0x - a_1 \sim \frac{a_m}{x^{m-1}}$.
On en déduit le placement de la courbe $y = f(x)$ par rapport à Δ au voisinage de $\pm\infty$.

DL et parité

– Soit f une application définie sur un intervalle de centre 0.
On suppose que f admet un DL d'ordre n à l'origine : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

- Si f est paire, la partie principale du DL est paire.
  Autrement dit les coefficients a_{2k+1} sont nuls : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} + \cdots$
- Si f est impaire, alors la partie principale du DL de f est un polynôme impair.
  Autrement dit les coefficients a_{2k} sont nuls : $f(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots$

– Si on forme le DL d'une fonction paire ou impaire, il pourra être utile d'utiliser cette parité et la notation "O" pour améliorer à peu de frais la précision du développement.
Supposons par exemple que f soit paire : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + O(x^6)$ est plus précis que $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^5)$, lui-même plus précis que $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)$.

Une dernière remarque

Dans un DL $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x)^k + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$, on ne développera jamais les termes $a_k(x - x_0)^k$, avec $k \geq 2$.

En revanche, on rappelle que $y = a_0 + a_1(x - x_0) = a_1x + (a_0 - a_1x_0)$ est l'équation de la tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ à la courbe $y = f(x)$.

V.2 Développements limités usuels

Tous les développements ci-dessous sont valables à l'origine, et peuvent être obtenus par la formule de Taylor-Young (ou par d'autres méthodes qui seront exposées plus loin.)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \qquad \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + o(x^{2n+2}) \qquad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \cdots$$

V.3 Opérations sur les DL

Pour simplifier, les résultats sont énoncés pour des DL à l'origine, mais on peut facilement les adapter à des développements en un autre point, voire en $\pm\infty$.

Combinaisons linéaires

– Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.

Alors, pour tous scalaires α, β, on a : $(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k + o(x^n)$.

– Exemples :

◇ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$.

◇ $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

DL obtenu par primitivation

– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (donc une application dérivable telle que $F' = f$.)
Alors F a en **0** un DL d'ordre $n+1$ obtenu par intégration terme à terme de celui de f.
Plus précisément : $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$ (ne pas oublier $F(0)$...)

– Exemples :

◇ Si $f(x) = \ln\cos x$, alors $f'(x) = -\tan x = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

On en déduit $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$.

◇ Si $f(x) = \arctan\frac{x+2}{1-2x}$, alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^7)$.

On en déduit $f(x) = \arctan 2 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$.

DL obtenu par dérivation

– Soit f une application de classe C^{n+1} au voisinage de 0. Alors le développement limité de f' en 0 à l'ordre n s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f en 0 à l'ordre $n+1$ (ces deux développements résultent de la formule de Taylor-Young).
Ce résultat est surtout utilisé pour des applications de classe C^∞.

– Exemple : On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.

Par dérivation, on en déduit : $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

Un nouvelle dérivation donne : $\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + o(x^n)$.

Produit de deux DL

– Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.

Alors $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$, avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

– Exemples :

◇ On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ et $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$.

On en déduit $\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + o(x^4)$

◇ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

Composition de deux DL

– Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.
Remarque : il est important que le coefficient constant a_0 du DL de f soit nul. Autrement dit l'application f doit être un infiniment petit quand x tend vers 0.
Dans ces conditions, l'application $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0.
Si on note $P = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ les parties régulières des DL de f et g, alors la partie régulière de celui de $g \circ f$ est obtenue en conservant les termes de degré $\leq n$ dans $Q \circ P$.
Dans la pratique, on pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k + o(X^n)$ et on remplace X par le DL de $f(x)$.
On calcule de proche en proche les DL des puissances successives $X^k = f(x)^k$, en ne gardant à chaque étape que les puissances x^m avec $m \leq n$.

– Exemple :
Supposons $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$ et $g(X) = 1 + X + 3X^2 - X^3 - X^4 + o(X^4)$.
Posons $X = f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$.
On trouve $X^2 = x^2 - 2x^3 + 5x^4 + o(x^4)$, puis $X^3 = x^3 - 3x^4 + o(x^4)$ et $X^4 = x^4 + o(x^4)$.
On en déduit le développement limité de $g \circ f$ à l'ordre 4 à l'origine :

$$(g \circ f)(x) = 1 + X + 3X^2 - X^3 - X^4 + o(X^4) = 1 + x + 2x^2 - 5x^3 + 18x^4 + o(x^4)$$

Les calculs précédents peuvent avantageusement prendre place dans un tableau comme indiqué ci-contre. Un tel tableau est particulièrement indiqué quand aucun des deux DL à composer n'est pair ou impair.

					coeff
X	x	$-x^2$	$2x^3$	x^4	1
X^2		x^2	$-2x^3$	$5x^4$	3
X^3			x^3	$-3x^4$	-1
X^4				x^4	-1
	x	$2x^2$	$-5x^3$	$18x^4$	

Inverse d'un DL

– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
On suppose que $a_0 \neq 0$ (autrement dit f possède une limite non nulle en 0.)
Dans ces conditions l'application $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ possède un DL d'ordre n en 0.
Pour cela on écrit $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0(1 - g(x))}$ où $g(x) = -\dfrac{1}{a_0}\left(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\right)$.
On compose ensuite le DL de $x \mapsto g(x)$ par celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

– Exemple :
On veut calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ à l'origine, à l'ordre 7.
On sait que $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^7)$.
On pose donc $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - g(x)}$, avec $X = g(x) = \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + o(x^7)$.
On utilise ensuite $\dfrac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + O(X^4)$.
On trouve $X^2 = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{24} + o(x^7)$ et $X^3 = \dfrac{x^6}{8} + o(x^7)$.
On obtient finalement : $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + o(x^7)$.

Quotient de deux DL

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, avec $b_0 \neq 0$.
  On suppose donc que l'application g ne tend vers 0 à l'origine.
  Dans ces conditions, $\dfrac{f}{g}$ admet un DL en 0 à l'ordre n.
  Ce développement est obtenu en effectuant le produit de celui de f par celui de $\dfrac{1}{g}$.
- Exemple :
  On peut obtenir le développement limité de $\tan x$ en 0 par quotient.
  On sait que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^8)$.
  On a vu précédemment que $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + o(x^7)$.
  On en déduit le développement limité de $x \mapsto \tan x$ en 0, à l'ordre 8 :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^7)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)\Big) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)\end{aligned}$$