Analyse 1

CORRIGE Serie n3

Exercice 1 :

1. faux, on ne peut rien dire sur (u_n). Contre-exple
   $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1 \to$ converge ~~et u_{2n+1}~~ $= -1$, ou aussi
   mais (u_n) ne converge pas.
2. Vrai
3. Faux; Contre-exple : les deux sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent mais pas la suite (u_n). (Elles doivent converger vers la même lim)
4. Vrai, (u_{n^2}) est une sous-suite de (u_n) (cv vers la m̂ limite de (u_n))
5. Vrai $u_n^2 = u_n . u_n$ produit de deux suites $u_n^2 \to 1 . 1 = 1$.
6. Faux, on ne peut rien dire sur la suite (u_n). Contre-exple =
   $$u_n = \frac{1}{n} \geq -\sqrt{n}\ ;\ \lim u_n = 0$$
7. Faux, on ne peut rien dire sur (u_n). Contre exple
   $$0 \leftarrow \frac{1}{n} \leq \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{ne cv pas}}}{(-1)^n} + 2 \leq \frac{4n+1}{n} \to 4$$
8. Vrai
9. Faux; $u_n = n$ et $v_n = -\infty$; $u_n + v_n = 0 \to 0$.
10. Faux; contre exple : $u_n = (-1)^n$; $v_n = (-1)^n$; $v_n \times u_n = 1 \to 0$.
11. Vrai, toute suite de Cauchy est bornée

Exercice 2

Pour tout entier n, posons $c_n = u_{6n}$.

– On a $c_n = a_{3n}$. La suite (c_n) est donc extraite de la suite (a_n).
  On en déduit que la suite (c_n) est convergente de limite ℓ.

– On a $c_n = b_{2n}$. La suite (c_n) est donc extraite de la suite (b_n).
  On en déduit que la suite (c_n) est convergente de limite ℓ'.

– Par unicité de la limite, il en découle $\ell = \ell'$.

Notons ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

La suite de terme général $x_n = u_{6n} = a_{3n} = c_{2n}$ est extraite de la suite (a_n).

La suite (x_n) est donc convergente de limite ℓ_a.

Mais la suite (x_n) est également extraite de la suite (c_n).

Ell est donc convergente de limite ℓ_c.

Par unicité de la limite, on en déduit $\ell_a = \ell_c$.

De même, la suite de terme général $y_n = u_{6n+3} = b_{3n+1} = c_{2n+1}$ est extraite de la suite (b_n) (donc convergente de limite ℓ_b) et extraite de la suite (c_n) (donc convergente de limite ℓ_c).

Par unicité de la limite, on en déduit $\ell_b = \ell_c$.

Finalement $\ell_a = \ell_b$. La suite des termes d'indices pairs et la suite des termes d'indices impairs de la suite (u_n) sont donc convergentes vers la même limite.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente vers $\ell = \ell_a = \ell_b$.

Exercice 3

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}\right)}$$

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt{\ }+\sqrt{\ })} = 1$$

$$b_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n} = \frac{\ln\left(e^n\left(\frac{n}{e^n}+1\right)\right)}{n} = \frac{\ln(e^n)+\ln\left(\frac{n}{e^n}+1\right)}{n}$$

$$= \underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{n}{e^n}+1\right)}{n/e^n}}_{\to 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ ; on pose } x = \frac{n}{e^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

$$c_n = \frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{b^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} \text{ ; si } a=b \text{ ; } \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \text{ ; si } a<b, \lim c_n = 1$$

si $a>b$, on calcule dans ce cas la limite de $c_n = \dfrac{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right)}{b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right)}$

$$\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = -1.$$

$$d_n = \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+2)!} = \frac{(n-1)!\,[n(n+1)+1]}{(n-1)!\,(n)(n+1)(n+2)} \text{ ; } \lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

$$e_n = \sqrt[n]{n^2} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n^2)\right) = \exp\Big(2\underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\to 0}\Big)$$

(Limite connue $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$$\lim e_n = 1.$$

$$g_n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right)$$

$$= \exp\Big(\underbrace{\frac{2n}{n+1}}_{\to 2} \times \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{\left(\frac{2}{n+1}\right)}}_{\to -1}\Big) \quad \left(x = \left(\frac{2}{n+1}\right)\right)$$

Limite connue $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1\right)$

$$\lim g_n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

$$h_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}} = \frac{\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}}{\frac{1-(1/3)^n}{1-1/3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{\to 0}}{1-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \frac{1}{3}.$$

$$v_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n} k = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[n^2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\sin(1/n^2)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}}_{\to 1}\Big]$$

Limite connue $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim v_n = \frac{1}{2}.$$

$$w_n = \prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} \times \cdots \times \frac{\cancel{2n-2}}{\cancel{2n-1}} \times \frac{\cancel{2n-1}}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n} \text{ ; } \lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

Exercice 4

On écrit $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^0} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^1} + \sum\limits_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^{n-1}} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^n} = 2 + \dfrac{2}{n} + \sum\limits_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k}$

Pour tout $n \geq 4$ et pour tout k de $\{2, \ldots, n-2\}$, on a : $\mathrm{C}_n^k \geq \mathrm{C}_n^2$ et $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On en déduit $2 \leq u_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{n-3}{\mathrm{C}_n^2}$ c'est-à-dire : $2 \leq u_n \leq 2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{2(n-3)}{n(n-1)}$.

Finalement on trouve : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Montrons que pour tout $x \geq 0$, on a l'encadrement $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Pour cela on définit $x \mapsto \varphi(x) = x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \psi(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2$.

Pour tout $x \geq 0$, on a : $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$.

Pour tout $x \geq 0$, on a : $\psi'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x} \geq 0$.

Ainsi, les applications φ et ψ, qui sont nulles en 0, sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que sur $\mathbb{R}^+$ elles sont à valeurs ≥ 0, ce qu'il fallait prouver.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $\ln u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 + \dfrac{k}{n^2})$.

Ainsi, en encadrant chaque terme de la somme : $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^2}{2n^4} \right) \leq \ln u_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2}$

Autrement dit : $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln u_n \leq \dfrac{n+1}{2n}$.

On fait tendre n vers $+\infty$ et on trouve : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = \dfrac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Par définition, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$.

Pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

On en déduit l'encadrement $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$,.

En passant à la limlite quand $n \to +\infty$, on trouve donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

On écrit $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! + \frac{1}{n} + 1 \geq 1$.

Pour chaque k de $\{1, \ldots, n-2\}$, on a $k! \leq (n-2)!$.

On en déduit un encadrement de u_n : $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} + (n-2)\frac{(n-2)!}{n!}$.

Autrement dit : $\forall n \geq 2,\ 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$. Il en découle $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 5

(a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$.

(b)

$$\ln u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$$

et

$$\ln u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{2}$$

donc

$$u_n \to \sqrt{e}$$

Exercice 6

En exploitant la formule $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\sin\frac{a}{2^n} P_n = \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{a}{2} = \ldots = \frac{1}{2^n}\sin(a)$$

Si $a = 0$ alors $P_n = 1 \to 1$.
Si $a \neq 0$ alors, pour n assez grand, $\sin(a/2^n) \neq 0$ et

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$$

Puisque

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \cos(0) = 1$$

on a

$$\frac{\sin a/2^n}{a/2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\frac{a}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(a)}{a}$$

car

$$2^n \sin\frac{a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \frac{a}{2^n} = a$$

Exercice 7

– La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.

– La suite (v_n) est décroissante car :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

– Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(n!)} = 0$.

– Les trois propriétés précédentes prouvent que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Elles sont donc convergentes et ont une même limite ℓ.

– On peut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}$.

– Pour tout entier n, on a $u_n < \ell < v_n$.
On en déduit l'encadrement : $n(n!)u_n < n(n!)\ell < n(n!)v_n$.
Mais $N = n(n!)u_n$ est un entier et $n(n!)v_n = N + 1$.
Cela prouve que $n(n!)\ell$ n'est jamais un entier, quelque soit n.
Il en découle que ℓ est irrationnel (par l'absurde, considérer n égal au dénominateur de ℓ).

Par une récurrence évidente, (u_n) et (v_n) sont bien définies et sont à valeurs > 0.
Pour tout $n \geq 0$, on a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \geq 0$.
On en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité : $u_n \leq v_n$.
Dans ces conditions : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$.
La suite (u_n) est donc croissante, et la suite (v_n) décroissante, à partir de $n = 1$.
En utilisant ce qui précède, on trouve : $\forall n \geq 1,\ u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$.
Ainsi la suite (u_n) est croissante majorée, et la suite (v_n) est décroissante minorée.
On en déduit que ces deux suites sont convergentes.
Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Si on passe à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ on trouve $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ donc $\ell = \ell'$.
Conclusion : les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Par une récurrence évidente, (u_n) et (v_n) sont bien définies et sont à valeurs > 0.

Pour tout $n \geq 0$, on a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \dfrac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité : $u_n \leq v_n$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n :

$\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n} \leq \dfrac{2}{u_n}$ (donc $u_n \leq u_{n+1}$) et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$.

La suite (u_n) est donc croissante, et la suite (v_n) décroissante, à partir de $n = 1$.

En utilisant ce qui précède, on trouve : $\forall n \geq 1,\ u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$.

Ainsi la suite (u_n) est croissante majorée, et la suite (v_n) est décroissante minorée.

On en déduit que ces deux suites sont convergentes.

Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Si on passe à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ on trouve $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ donc $\ell = \ell'$.

Conclusion : les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8

On voit que les deux suites sont parfaitement définies et à termes strictement positifs.

Pour tout entier n, on a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n^2 - u_n^2}{u_n + v_n} = v_n - u_n$.

Autrement dit la suite de terme général $d_n = v_n - u_n$ est constante.

On peut donc écrire, pour tout $n \geq 0$: $v_n = u_n + v_0 - u_0$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)^2$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_n}{u_n} = \left(\dfrac{v_0}{u_0}\right)^{2^n}$.

Posons $\lambda = v_0 - u_0$ et $\mu = \dfrac{v_0}{u_0}$.

- On constate que si $u_0 = v_0$, alors $u_1 = v_1 = \dfrac{u_0}{2}$ et plus généralement $u_n = v_n = \dfrac{u_0}{2^n}$ pour tout n. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont alors convergentes vers 0

- On suppose donc $u_0 \neq v_0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 1$.

  Pour tout entier n, on a : $v_n = u_n\, \mu^{2^n} = u_n + \lambda$, donc $u_n = \dfrac{\lambda}{\mu^{2^n} - 1}$.

  ◇ Supposons $0 < \mu < 1$, c'est-à-dire $0 < v_0 < u_0$.
  Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu^{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

  ◇ Supposons $1 < \mu$, c'est-à-dire $0 < u_0 < v_0$.
  Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu^{2^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lambda > 0$.

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \sqrt{12 - x}$.

L'application f réalise une bijection décroissante de $]-\infty, 12]$ sur $[0, +\infty[$.

Pour que u_1 soit défini, il est nécessaire que $u_0 \leq 12$.

Pour que u_2 soit défini, il faut alors $u_1 \leq 12$, c'est-à-dire $12 - u_0 \leq 144$, donc $u_0 \geq -132$.

Réciproquement, si $-132 \leq u_0 \leq 12$, alors $0 \leq u_1 \leq 12$ puis $0 \leq u_n \leq 12$ pour tout n.

L'équation $\ell = f(\ell)$ équivaut à $\ell^2 + \ell - 12 = 0$ et $\ell \geq 0$.

Or $\ell^2 + \ell - 12 = (\ell - 3)(\ell + 4)$.

La seule limite finie possible de la suite u est donc $\ell = 3$.

Pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} - 3 = \sqrt{12 - u_n} - \sqrt{12 - 3} = \dfrac{3 - u_n}{\sqrt{12 - u_n} + 3}$.

On en déduit $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$ et donc : $\forall n \geq 0, |u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 3|$.

Il en découle $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Remarque :

La suite u n'est pas monotone. On montre en effet que pour tout choix de u_0, les suites de terme général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont adjacentes, de limite commune $\ell = 3$.

Exercice 9

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

Par une récurrence évidente, on voit que u_n est défini et strictement positif pour tout n.

On a $f(x) - x = \dfrac{a - x^2}{2x}$.

En particulier $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$.

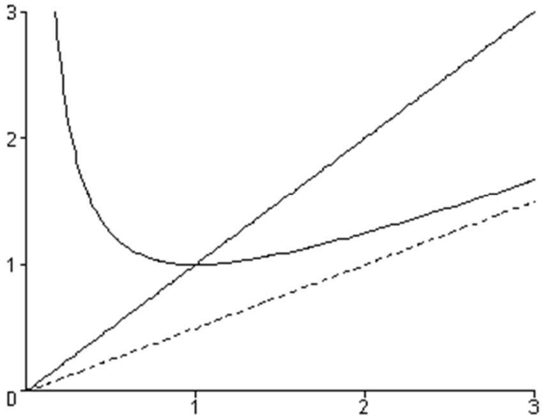
La seule limite finie *possible* de la suite u est donc $\ell = \sqrt{a}$.

Pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$

On en déduit le tableau de variations de f (avec le signe de $f(x) - x$), et la courbe de f (avec

$a = 1$, l'asymptote $y = \frac{x}{2}$ et la bissectrice $y = x$) :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	



On peut maintenant étudier la suite u, suivant les valeurs de u_0.

– Si $\sqrt{a} < u_0$.

  Pour tout $x > \sqrt{a}$, on a $\sqrt{a} < f(x) < x$.

  En particulier $\sqrt{a} < u_1 < u_0$ et $\sqrt{a} < u_2 < u_1$.

  Par une récurence évidente, on trouve : $\forall n \geq 0, \sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$.

  La suite u, décroissante et minorée, converge vers sa seule limite finie possible $\ell = \sqrt{a}$.

– Si $u_0 = \sqrt{a}$.

  Dans ce cas, la suite u est constante : $\forall n \geq 0, u_n = \sqrt{a}$.

– Si $0 < u_0 < \sqrt{a}$.

  On constate que $u_1 = f(u_0) > \sqrt{a}$. On est donc ramené au premier cas.

– Conclusion : Dans tous les cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Remarque :

Puisque $f'(\sqrt{a}) = 0$, la convergence vers $\ell = \sqrt{a}$ est très rapide.

On peut en effet écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \ell &= f(u_n) - f(\ell) \\ &= (u_n - \ell)f'(\ell) + \frac{1}{2}(u_n - \ell)^2 f''(\ell) + \mathrm{o}((u_n - \ell)^2) \sim \frac{1}{2\ell}(u_n - \ell)^2 \end{aligned}$$

On dit que la convergence est de type *quadratique*. Dans la pratique, le nombre de décimales exactes, dans l'approximation $u_n \approx \sqrt{a}$, double à peu près à chaque itération.

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = 2 + \ln x$.

L'application f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on pose $g(x) = f(x) - x = 2 + \ln x - x$. On a $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

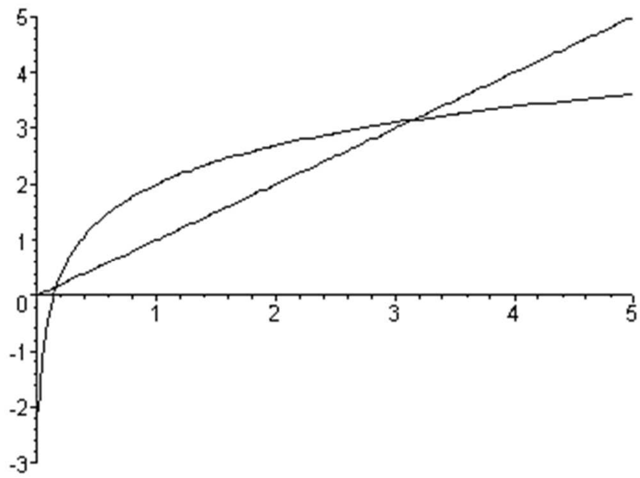
Voici les variations de g. L'équation $f(x) = x$ possède donc deux solutions distinctes α et β.

On trouve $\alpha \approx 0.1585943396$ et $\beta \approx 3.146193221$.

	0	α	1	β	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

α et β sont les deux seules limites finies *possibles* de la suite u.

Voici maintenant la courbe représentative de f (avec la première bissectrice) :



On peut maintenant étudier la suite u, suivant les valeurs de u_0.

– Si $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$. La suite u est constante : $\forall n \geq 0, u_n = u_0$.

– Si $\alpha < u_0 < \beta$.

Pour tout x de $]\alpha, \beta[$, on a : $\alpha < x < f(x) < \beta$.

En particulier $\alpha < u_0 < u_1 < \beta$ et $\alpha < u_1 < u_2 < \beta$.

Plus généralement, une récurrence évidente donne : $\forall n \geq 0, \alpha < u_n < u_{n+1} < \beta$.

La suite u, majorée et croissante, est donc convergente.

Ici on a manifestement $\lim u_n = \beta$ (l'autre limite *possible*, α, est ici exclue).

– Si $\beta < u_0$.

Pour tout x de $]\beta, +\infty[$, on a : $\beta < f(x) < x$. En particulier $\beta < u_1 < u_0$ et $\beta < u_2 < u_1$.

Plus généralement, une récurrence évidente donne : $\forall n \geq 0, \alpha < \beta < u_{n+1} < u_n$.

La suite u, minorée et décroissante, est donc convergente.

Ici encore on a manifestement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$ (α est exclu).

– Si $0 < u_0 < \alpha$.

On a vérifier que la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Pour cela on raisonne par l'absurde, et on suppose donc que pour tout n, u_n existe (et est donc strictement positif pour permettre le calcul de u_{n+1}).

Pour tout x de $]0, \alpha[$, on a $f(x) < x < \alpha$.

En particulier $0 < u_1 < u_0 < \alpha$ et $0 < u_2 < u_1 < \alpha$.

Plus généralement, une récurrence évidente donne : $\forall n \geq 0, 0 < u_{n+1} < u_n < \alpha < \beta$.

La suite u, minorée et décroissante, est donc convergente.

On aboutit à une contradiction car les deux seules limites *possibles*, α et β sont ici exclues.

Conclusion : si $0 < u_0 < \alpha$, alors la suite u n'est pas définie à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f\colon x \mapsto e^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - e^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.
La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de
$u_1 - u_0 = e^{u_0} - u_0 - 1$.
Étudions la fonction $g(x) = e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
g est dérivable et $g'(x) = e^x - 1$ du signe de x. $g(0) = 0$ donc g est positive.
Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0.
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = e^\ell - 1$ donc $\ell = 0$.
Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) converge vers la seule limite finie possible 0.

Exercice 10

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k)\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$ et, pour $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geqslant 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $[n, n+1]$. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroit sur $[n+1, n+2]$. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et donc la suite $u - v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, la suite u décroit, la suite v croit et la suite $u - v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite. Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$, et en

particulier, $v_3 \leqslant \gamma \leqslant u_1$ avec $v_3 = 0,5...$ et $u_1 = 1$. Donc, $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Plus précisément, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,005} - 1} = 199,5... \Leftrightarrow n \geqslant 200.$$

Donc $0 \leqslant \gamma - v_{100} \leqslant \frac{10^{-2}}{2}$ et une valeur approchée de v_{200} à $\frac{10^{-2}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la 3 ème décimale la plus proche) est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément,

$$\boxed{\gamma = 0,5772156649...\ (\gamma \text{ est la constante d'EULER}).}$$

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{array} \right. ,$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, d'après l'exercice 3, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 = -1 + \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - 1 + o(1) = \ln n + \gamma - 1 + o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + o(1) = \ln 2 + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1)\end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + o(1) = \ln 2 + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1)\end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2} = 6\left(\ln n + \gamma + \ln n + \gamma - 1 - 4\left(\frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1\right)\right) = 6(3 - 4\ln 2) + o(1).$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2} = 6(3 - 4\ln 2).}$$

Exercice 11 :

(U_n) est une suite de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}$ tq $p \geq q \geq N \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$.

$$U_n = \frac{n^2+1}{n^2}$$

On a :

$$|U_p - U_q| = \left| \frac{p^2+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{q^2} \right| = \left| \frac{q^2(p^2+1) - p^2(q^2+1)}{p^2 q^2} \right| = \frac{|q^2 - p^2|}{p^2 q^2}$$

$$= \frac{+p^2 - q^2}{p^2 q^2} \leq \frac{p^2}{p^2 q^2} = \frac{1}{q^2} < \varepsilon.$$

$\Leftrightarrow q^2 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Il suffit de prendre $\delta = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.

- $U_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$

On utilise la définition suivante : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \forall p \geq 1$,

$$|U_{n+p} - U_n| < \varepsilon.$$

On calcule :

$$|U_{n+p} - U_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k|}{2^k}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}}$$

qui est la somme des termes du suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1 - 1/2} \right) = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \right)$$

On obtient donc la majoration

$$|v_{n+p} - v_n| \leq \frac{1}{2^n} \left| \underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}_{\leq 1} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \left(\text{car } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ tend vers } 0\right)$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff \exp(n \ln 2) > 1/\varepsilon$$

$$n \ln(2) > \ln(1/\varepsilon)$$

$$\iff n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)}$$; il suffit donc de choisir

$$N = \left[\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)}\right] + 1$$

• $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}$

(x_n) n'est pas de Cauchy $\iff \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}$,

$p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| > \varepsilon$.

On va choisir $q = 2p$, on a.

$$|u_{2p} - u_p| = \left| \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{\ln(p+1)} + \cdots + \frac{1}{\ln(2p)} \right|.$$

$k=p+1$ $\ln(p+1)$ $\ln(2p)$

(On a :

$2p > p+1 \Rightarrow \ln(2p) > \ln(p+1)$ ($\ln$ est une fct $\nearrow$)

donc $\frac{1}{\ln(2p)} < \frac{1}{\ln(p+1)}$

On trouve :

$$|u_{2p} - u_p| \geq \left| \overbrace{\frac{1}{\ln(2p)} + \cdots + \frac{1}{\ln(2p)}}^{p\text{-termes}} \right| = \frac{p}{\ln(2p)}$$

Comme : $2p > \ln(2p)$ $\forall p \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2p} < \frac{1}{\ln(2p)}$

$$> \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Si on prend $\varepsilon \in]0, 1/2[$ cette inégalité n'est pas ~~vra~~ satisfaite. Donc (x_n) n'est pas de Cauchy.