Analyse 1

CORRIGE Série n2

Exercice 1

- $a = 2\mathrm{Re}\,\dfrac{2+5i}{1-i} = 2\mathrm{Re}\,\dfrac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \mathrm{Re}\,((2+5i)(1+i)) = -3.$
- $b = \dfrac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{-15+30i}{25} = -\dfrac{3}{5} + i\dfrac{6}{5}$
- $c = \dfrac{2i}{3-4i} + \dfrac{1-7i}{4+3i} = \dfrac{-2}{4+3i} + \dfrac{1-7i}{4+3i} = -\dfrac{1+7i}{4+3i} = \dfrac{(1+7i)(3i-4)}{25} = -1-i$

$$\begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ 2\bar{\omega} + \bar{z} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ 2\omega + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ (1+i)z = -1+3i \end{cases}$$

L'unique solution est $z = \dfrac{1}{2}(-1+3i)(1-i) = 1+2i$ et $\omega = \dfrac{1}{2}(3-z) = 1-i$

On a : $u_k = \dfrac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} = \dfrac{(1+(k+1)i)(1-ki)}{(1+ki)(1-(k+1)i)} = \dfrac{a_{k+1}\,b_k}{a_k\,b_{k+1}}$ avec $\begin{cases} a_k = 1+ki \\ b_k = 1-ki \end{cases}$

On en déduit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}\,b_k}{a_k\,b_{k+1}} = \frac{a_{n+1}b_1}{a_1 b_{n+1}} = \frac{1-i}{1+i}\,\frac{1+(n+1)i}{1-(n+1)i}$

Finalement : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} = \frac{i-1}{i+1} = i.$

Exercice 2

Pour cet exercice, on va voir deux méthodes :

- *Première méthode*

  On procède par élévation au carré, en sachant que pour tous u, v de $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |u+v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) = |u|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2 \\ |u-v|^2 = (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = |u|^2 - 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2 \\ |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \end{cases}$$

  On en déduit :

$$\left(\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|\right)^2 = \left|\frac{z+z'}{2}+u\right|^2 + 2\left|\frac{(z+z')^2}{4} - u^2\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|^2$$

$$= 2\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\,|u^2| + 2\left|\frac{(z+z')^2}{4} - zz'\right| = \left|\frac{(z+z')^2}{2}\right| + 2\,|z|\,|z'| + \left|\frac{(z-z')^2}{2}\right|$$

$$= |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$

  Ce qui est le résultat espéré.

– *Deuxième méthode*

Soient a une racine carré de z et b une racine carrée de z'.

On a donc $a^2 = z$, $b^2 = z'$ et $(ab)^2 = zz' = u^2$. Ainsi $u = \pm ab$.

L'énoncé donne le même rôle à u et à $-u$. On peut donc choisir $u = ab$.

On trouve alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| &= \left|\frac{a^2+b^2}{2}+ab\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2}-ab\right| \\ &= \left|\frac{(a+b)^2}{2}\right| + \left|\frac{(a-b)^2}{2}\right| = |a|^2+|b|^2 = |z|+|z'|\end{aligned}$$

Soit m le point du plan complexe ayant pour affixe z.
Dire que $|z| = |z-2|$, c'est dire que M est équidistant de O et de $A(2)$.
Cela équivaut donc à dire que z s'écrit $z = 1 + \lambda i$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'égalité $\arg z = \arg(z+3+i) \pmod{2\pi}$ équivaut à $z + 3 + i = \mu z$, avec $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$.
En remplaçant z par $1 + \lambda i$ dans cette expression, on trouve :
$4 + i(\lambda+1) = \mu(1+\lambda i)$ donc $\mu = 4$ et $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

L'égalité $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ équivaut à $|z| = 1$.

On doit donc chercher les nombres complexes de module 1 tels que $|z| = |z-1|$, c'est-à dire les points $m(z)$ du cercle unité qui sont équidistants de l'origine et du point d'affixe 1, c'est-à-dire qui ont pour abscisse $\frac{1}{2}$.
Les deux réponses sont bien sûr $z = \exp(i\dfrac{\pi}{3})$ et $z = \exp(-i\dfrac{\pi}{3})$

On sait qu'un nombre complexe z de module 1 vérifie l'égalité $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$. On a donc :

$$\begin{aligned}|x+y+z| &= |\overline{x+y+z}| = |\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}| = \left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right| \\ &= \left|\frac{xy+xz+yz}{xyz}\right| = \frac{|xy+xz+yz|}{|xyz|} = |xy+xz+yz|\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Si $a + ib = 0$, c'est-à-dire si $a = b = 0$, l'équation devient $z = -|z|$.

   Dans ce cas particulier, les solutions sont les réels négatifs ou nuls.

   On suppose donc $a + ib \neq 0$. Les éléments de $\mathbb{R}^-$ ne sont alors pas solutions.

   On pose $a + ib = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$.

   On cherche les solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$.

   L'équation devient $\rho(1 + e^{i\theta}) = re^{i\varphi}$ c'est-à-dire $2\rho \cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2} = re^{i\varphi}$.

   On a $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ car $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

   L'identification des modules et des arguments donne $2\rho\cos\frac{\theta}{2} = r$ et $\dfrac{\theta}{2} = \varphi$.

   Or $-\pi < \theta < \pi$. Cela signifie que si φ n'est pas dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, il n'y a pas de solution.

   Autrement dit, si $a \leq 0$, l'équation n'a pas de solution.

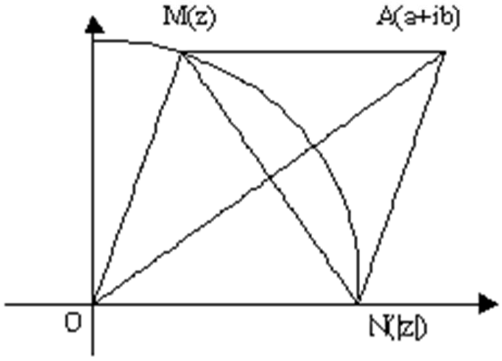
   Si $a > 0$, elle équivaut à : $\theta = 2\varphi$, et $\rho = \dfrac{r}{2\cos\varphi}$. L'unique solution est donc :

$$z = \frac{r}{2\cos\varphi} e^{2i\varphi} = \frac{r}{2\cos\varphi}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi) = \frac{a^2 - b^2}{2a} + ib$$

   Remarque : on aurait pu procéder par identification des parties réelles et imaginaires.

   La figure suivante montre le point image M de la solution z du problème, en fonction de la position du point image A de $a + ib$. Le quadrilatère $ONAM$ est un losange. La donnée du point A (avec une abscisse positive) donne M de manière unique.

   Plus précisément, le point N d'affixe $|z|$ est l'intersection de l'axe $x \geq 0, y = 0$ avec la médiatrice de OA, et $M(z)$ est le symétrique de N par rapport à la droite OA :



2. Evidemment, si on a fait la première question, on a fait la seconde car cette "nouvelle" équation s'écrit en fait $|Z| + Z = c + id$, avec $Z = -z$.

   Il n'y a de solution que si $c > 0$ et l'unique solution est alors $z = \dfrac{d^2 - c^2}{2c} - id$.

– $a = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) = 2\cos\frac{\varphi}{2}\exp(i\frac{\varphi}{2})$.

Puisque $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\frac{\varphi}{2} \geq 0$. On en déduit : $|a| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$.

Si $\varphi = \pi$ alors $a = 0$, sinon : $\arg a = \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

– Puisque $b = i\,\overline{a}$, on a $|b| = |a| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$.

Si $\varphi = \pi$ alors $b = 0$, sinon : $\arg(b) = \frac{\pi}{2} - \arg(a) = \frac{\pi-\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

– Si on pose $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, alors $\psi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Avec cette notation $c = \sin\psi + i(1-\cos\psi) = 2\sin\frac{\psi}{2}(\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}) = 2\sin\frac{\psi}{2}\exp(i\frac{\psi}{2})$

On en déduit : $\arg(c) = 2\left|\sin\frac{\psi}{2}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|$.

On a en particulier $c = 0$ si $\psi = 0$ c'est-à-dire si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

◇ Si $-\frac{\pi}{2} < \psi < 0$, c'est-à-dire si $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, alors $\sin\frac{\psi}{2} < 0$.

Dans ce cas $\arg(c) = \pi + \frac{\psi}{2} = \frac{5\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

◇ Si $0 < \psi \leq \frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire si $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$, alors $\sin\frac{\psi}{2} > 0$.

Dans ce cas $\arg(c) = \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

– $a = \cos^2\theta(1 + i\,\tan\theta)^2 = (\cos\theta + i\,\sin\theta)^2 = \exp(2i\theta)$.

Ainsi $|a| = 1$ et $\arg(a) = 2\theta \pmod{2\pi}$.

– $$b = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\,\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\,\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}\,\frac{\sin\frac{\theta}{2} + i\,\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

Ainsi $|b| = \left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$ et $\arg(b) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ si } \tan\frac{\theta}{2} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ si } \tan\frac{\theta}{2} < 0 \end{cases}$

On a $(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1)$.

D'autre part $(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})\,2\exp(i\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{2}\exp(i\frac{5\pi}{12})$.

On en déduit : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Finalement $\cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Les nombres complexes $(1+i\sqrt{3})^n$ et $(1-i\sqrt{3})^n$ sont conjugués.

D'autre part $1+i\sqrt{3} = 2\exp(i\frac{\pi}{3})$.

Donc $z = 2\mathrm{Re}\,(1+i\sqrt{3})^n = 2\mathrm{Re}\,\left(2^n \exp(i\frac{n\pi}{3})\right) = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$.

Si $n = 6q+r$, avec $0 \leq r \leq 5$, alors $z = 2^{n+1}\cos\frac{r\pi}{3}$.

Exercice 4

1-

Si $\omega = a - ib$, alors $\omega^2 = a^2 - b^2 - 2iab$, donc $2i\omega^2 = 4ab + 2i(a^2-b^2) = Z$.

Or $2i = (1+i)^2$. On en déduit $Z = ((1+i)(a-ib))^2 = (a+b+i(a-b))^2$.

Ainsi les racines carrées de Z sont z et $-z$, avec $z = (a+b)+i(a-b)$.

2-

On résout $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$ puis on prend les racines carrées des solutions.

Le discriminant est $\Delta = (5-14i)^2 + 8(5i+12) = -75-100i = (5-10i)^2$.

On trouve $Z_1 = \dfrac{1}{2}(5-14i-5+10i) = -2i$, et $Z_2 = \dfrac{1}{2}(5-14i+5-10i) = 5-12i$.

Les racines carrées de Z_1 sont $z_1 = 1-i$ et $z_1' = -z_1$.

Les racines carrées de Z_2 sont $z_2 = 3-2i$ et $z_2' = -z_2$.

Les solutions de l'équation initiale sont donc $1-i, -1+i, 3-2i, -3+2i$.

3-

On constate que le premier membre est factorisable par $z+i$:

$$\begin{aligned} z^3 - i = 6(z+i) \quad &\Leftrightarrow z^3 + i^3 = 6(z+i) \Leftrightarrow (z+i)(z^2-iz-1) = 6(z+i) \\ &\Leftrightarrow (z+i)(z^2-iz-7) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de z^2-iz-7 est $\Delta = -1+28 = 27 = (3\sqrt{3})^2$.

Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = -i$, $z_2 = \dfrac{1}{2}(i-3\sqrt{3})$ et $z_3 = \dfrac{1}{2}(i+3\sqrt{3})$.

4-

On a $\frac{-1+i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\exp\frac{3i\pi}{4} = 2^{-3/2}\exp\frac{3i\pi}{4}$. Les racines cubiques de Z sont :

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\frac{i\pi}{4}, \quad z_2 = jz_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\frac{11i\pi}{12}, \quad z_3 = j^2 z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\frac{19i\pi}{12}$$

Les puissances quatrièmes de ces nombres sont :

$$z_1^4 = \frac{1}{4}\exp i\pi = -\frac{1}{4}, \quad z_2^4 = jz_1^4 = -\frac{1}{8}j, \quad z_3^4 = j^2 z_1^4 = -\frac{1}{4}j^2$$

Effectivement, seule la puissance quatrième de z_1 est un nombre réel.

Exercice 5

1-

En prenant les modules, il vient $|z| = 1$. L'équation devient $\overline{z}^7 z^2 = 1$ donc $z^5 = 1$.

Les solutions sont les racines cinquièmes de l'unité : $z_k = \exp \frac{2ik\pi}{5}$ avec $0 \leq k \leq 4$.

2-

L'équation, qui ne possède pas la solution $z = 1$, s'écrit : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27 = 27e^{i\pi}$.

Les racines sixièmes de $27e^{i\pi}$ sont les $u_k = \sqrt{3}\exp\left(i\frac{\pi}{6} + \frac{ik\pi}{3}\right)$ avec $0 \leq k \leq 5$.

L'équation initiale est donc équivalente à : $\frac{z+1}{z-1} = u_k$, avec $0 \leq k \leq 5$.

Mais $\frac{z+1}{z-1} = u_k \Leftrightarrow z = \frac{u_k-1}{u_k+1}$ (les u_k sont tous distincts de -1).

On trouve successivement :

$$\begin{array}{lll} u_0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & u_1 = i\sqrt{3} & u_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ u_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} & u_4 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} & u_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{array}$$

Ensuite, si $u_k = x_k + iy_k$, on a : $\dfrac{u_k - 1}{u_k + 1} = \dfrac{(u_k - 1)(\overline{u_k} + 1)}{|u_k + 1|^2} = \dfrac{2 - 2iy_k}{4 - 2x_k} = \dfrac{1}{2 - x_k}(1 - iy_k)$.

Voici finalement les six solutions de l'équation initiale :

$$\begin{array}{lll} z_0 = 2 + i\sqrt{3} & z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & z_2 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}i\sqrt{3} \\ z_3 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}i\sqrt{3} & z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} & z_5 = 2 + i\sqrt{3} \end{array}$$

3-

On sait que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a la factorisation $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

Si on multiplie (E) par $(z + 1) - (z - 1)$ (donc par 2), on obtient une équation équivalente.

$(E) \Leftrightarrow (z - 1)^4 - (z + 1)^4 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z - 1}{z + 1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z - 1}{z + 1} = \omega \in \{1, i, -1, -i\}$.

L'égalité $\dfrac{z - 1}{z + 1} = 1$ ne donne aucune solution z. Sinon $\dfrac{z - 1}{z + 1} = \omega \Leftrightarrow z = \dfrac{1 + \omega}{1 - \omega}$.

On trouve trois solutions : $z_1 = \dfrac{1 + i}{1 - i} = i, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \dfrac{1 - i}{1 + i} = -i$

4-

On a $1 + i = \sqrt{2}\exp\frac{i\pi}{4}$ et $\sqrt{3} - i = 2\exp\frac{-i\pi}{6}$.

Donc $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\frac{5i\pi}{12}$.

On doit donc trouver les racines huitièmes de ω.

Les solutions sont les $z_k = 2^{-1/16}\exp\left(\frac{5i\pi}{96} + \frac{ik\pi}{4}\right)$, avec $k \in \{0, \ldots, 7\}$.

5-

On utilise le binôme pour développer $(1+x)^n$, avec $x=1$, $x=i$, $x=-1$ et $x=-i$.

On obtient successivement :

$$\begin{array}{lll}
(1+1)^n & = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + \cdots & = S+T+U+V \\
(1+i)^n & = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 + \cdots & = S+iT-U-iV \\
(1-1)^n & = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \cdots & = S-T+U-V \\
(1-i)^n & = C_n^0 - iC_n^1 - C_n^2 + iC_n^3 + C_n^4 - iC_n^5 + \cdots & = S-iT-U+iV
\end{array}$$

Ainsi S,T,U,V sont solutions du système : $\begin{cases} S+T+U+V=2^n & :(1) \\ S+iT-U-iV=(1+i)^n & :(2) \\ S-T+U-V=0 & :(3) \\ S-iT-U+iV=(1+i)^n \end{cases}$

En effectuant $(1)+(2)+(3)+(4)$, on trouve :

$$S = \frac{2^n+(1+i)^n+(1-i)^n}{4} = \frac{2^n+2\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)}{4} = \frac{2^n+2\sqrt{2}^n\cos n\frac{\pi}{4}}{4}$$

En effectuant $(1)-i(2)-(3)+i(4)$, on trouve :

$$T = \frac{2^n-i(1+i)^n+i(1-i)^n}{4} = \frac{2^n-2\mathrm{Re}\left(i(1+i)^n\right)}{4} = \frac{2^n+2\sqrt{2}^n\sin n\frac{\pi}{4}}{4}$$

En effectuant $(1)-(2)+(3)-(4)$, on trouve :

$$T = \frac{2^n-(1+i)^n-(1-i)^n}{4} = \frac{2^n-2\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)}{4} = \frac{2^n-2\sqrt{2}^n\cos n\frac{\pi}{4}}{4}$$

En effectuant $(1)+i(2)-(3)-i(4)$, on trouve :

$$T = \frac{2^n+i(1+i)^n-i(1-i)^n}{4} = \frac{2^n+2\mathrm{Re}\left(i(1+i)^n\right)}{4} = \frac{2^n-2\sqrt{2}^n\sin n\frac{\pi}{4}}{4}$$

Exercice 6

1-

Notons $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité : $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

L'équation s'écrit : $(z+1)^n = (e^{i2a})^n$.

Ses solutions sont les z_k tels que $z_k + 1 = \omega_k e^{i2a} = e^{i2a + i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $0 \le k \le n-1$.

On trouve donc $z_k = \exp\left(i2a + i\,\frac{2k\pi}{n}\right) - 1 = \exp\left(ia + i\,\frac{k\pi}{n}\right)\ 2i\,\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

On effectue le produit des z_k, pour $0 \le k \le n-1$. On trouve :

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \exp\left(ina + i\,\frac{(n-1)\pi}{2}\right)(2i)^n P_n = 2^n\, i^{2n-1}\, e^{ina}\, P_n = (-1)^{n+1}\, 2^n\, i\, e^{ina}\, P_n$$

D'un autre coté les z_k sont les racines du polynôme $A(z)$, avec $A(z) = (z+1)^n - e^{2ina}$.

Le coefficient constant de $A(z)$ est $1 - e^{2ina} = -e^{ina}\, 2i\, \sin(na)$.

Puisque $A(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$, ce coefficient constant vaut aussi $(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$.

On en déduit $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n+1} e^{ina}\, 2i\, \sin na$.

Ainsi $(-1)^{n+1}\, 2^n\, i\, e^{ina}\, P_n = (-1)^{n+1} e^{ina}\, 2i\, \sin na$. Conclusion : $P_n = \dfrac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

2-

Pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$, on a $\omega_k = \omega_1^k$, avec $\omega_1 = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$.

On en déduit : $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kp}$: S_p est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\omega_0 = 1$ et de raison $q = \omega_1^p$.

On a $q = 1 \Leftrightarrow \exp \dfrac{2ip\pi}{n} \Leftrightarrow p$ est un multiple de n. Dans ce cas $S_p = n$.

Si p n'est pas multiple de n, alors $S_p = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 0$ car $q = \omega_1^p$ est racine n-ième de 1.

Conclusion : si $n \equiv 0 \pmod{n}$ alors $S_p = n$, sinon $S_p = 0$.

3-

On connait la factorisation $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$. On en déduit $\prod_{k=0}^{n-1}(2 - \omega_k) = 2^n - 1$.

4-

On a $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = (z^n - e^{in\theta})(z^n - e^{-in\theta})$.

Notons $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité : $\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Les solutions de $z^n = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ sont les $z_k = \omega_k e^{i\theta} = e^{i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}$, avec $0 \le k \le n-1$.

Les solutions de $z^n = e^{-in\theta} = \left(e^{-i\theta}\right)^n$ sont les $z_k = \omega_k e^{-i\theta} = e^{-i\theta + \frac{2ik\pi}{n}}$, avec $0 \le k \le n-1$.

5-

Posons $a = \tan\theta$, avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors $\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$.

L'équation s'écrit alors $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = u^n$, avec $u = e^{2i\frac{\theta}{n}}$.

Notons $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité :

$\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = u^n \Leftrightarrow \exists k,\ \frac{1-iz}{1+iz} = \omega_k u \Leftrightarrow \exists k,\ i\,z(1+\omega_k u) = 1 - \omega_k u$

Mais $1 - \omega_k u = 1 - \exp\left(\frac{2i}{n}(\theta + k\pi)\right) = -\exp\left(\frac{i}{n}(\theta + k\pi)\right)\ 2i\ \sin\frac{\theta+k\pi}{n}$.

De même $1 + \omega_k u = 1 + \exp\left(\frac{2i}{n}(\theta + k\pi)\right) = \exp\left(\frac{i}{n}(\theta + k\pi)\right)\ 2\ \cos\frac{\theta+k\pi}{n}$.

L'équation initiale équivaut donc à : $z\ \cos\frac{\theta+k\pi}{n} = -\sin\frac{\theta+k\pi}{n}$, avec $0 \le k \le n-1$.

On a $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{n} \le \frac{\theta+k\pi}{n} < \frac{\theta}{n} + \pi\frac{3\pi}{2}$.

La seule possibilité pour que $\cos\frac{\theta+k\pi}{n}$ soit nul est donc $\frac{\theta+k\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$.

Cette possibilité équivaut à $\theta = n\frac{\pi}{2} - k\pi$.

Cela ne se produit que si $\theta = 0$, n pair et $k = \frac{n}{2}$.

– Dans le cas général, l'équation a donc n solutions distinctes.

  Ce solutions sont données par $z_k = -\tan\frac{\theta+k\pi}{n}$, avec $\begin{cases} \theta = \arctan a \\ 0 \le k \le n-1 \end{cases}$

– Si $a = 0$ et si n est pair, l'équation possède $n-1$ solutions distinctes.

  Ces solutions sont données par la formule précédente, avec $0 \le k \le n-1$ et $k \ne \frac{n}{2}$.

Exercice 7

1-

A la somme S, on associe la somme $T = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(a+kb)$ et on évalue $Z = S + iT$.

On trouve successivement

$$Z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{ib}\right)^k = e^{ia}(1+e^{ib})^n = e^{i(a+nb/2)}\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n$$

En prenant la partie réelle, on trouve : $S = 2^n \cos^n \frac{b}{2} \cos\left(a + n\frac{b}{2}\right)$.

2-

Si $\theta = m\pi$, avec $m \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(2k-1)\theta = (-1)^m$ et $S = n(-1)^m$.

Pour tout entier k, on a : $2\sin\theta\ \cos(2k-1)\theta = \sin 2k\theta - \sin 2(k-1)\theta$.

On en déduit : $2S\sin\theta = \sum_{k=1}^{n} (\sin 2k\theta - \sin 2(k-1)\theta) = \sin 2n\theta$.

Conclusion : si $\theta \ne 0 \pmod{\pi}$ alors $S = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$.

3-

Si $\theta = 0 \pmod{\pi}$, on a $\cos^2 k\theta = 1$ donc $S = n+1$.

Dans le cas général : $\cos^2 k\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2k\theta)$, donc $S = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta$.

On constate que $2\sin\theta\,\cos 2k\theta = \sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta$. Ainsi :

$$2\sin\theta \sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta = \sum_{k=0}^{n} (\sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta) = \sin(2n+1)\theta + \sin\theta$$

On en déduit, si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta} + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad S = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$$

A titre de vérification, et sachant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on voit bien que $\lim_{\theta\to 0} S = n+1$.

4-

On pose $R = \sum_{k=1}^{n} \cos^k\theta\ \sin k\theta$ et on évalue $Z = R + iS$:

$Z = \sum_{k=1}^{n} \cos^k\theta\ \exp(ik\theta) = \sum_{k=1}^{n} u^k$, avec $u = (\cos\theta)\ \exp(i\theta)$.

On voit que $u = \cos^2\theta + i\cos\theta\ \sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(2i\theta)$.

En particulier, u n'est égal à 1 que si $\theta = 0 \pmod{\pi}$.

Dans le cas particulier $\theta = 0 \pmod{\pi}$, on a donc $Z = n$ puis $S = \mathrm{Im}\,(Z) = 0$.

Dans le cas général : $Z = u\frac{u^n - 1}{u-1} = \frac{e^{2i\theta}+1}{e^{2i\theta}-1}\left(\cos^n\theta\, e^{in\theta} - 1\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\cos^n\theta\, e^{in\theta} - 1\right)$

On prend alors la partie imaginaire, ce qui donne :

$$S = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^n\theta\ \sin(n\theta) = \frac{\cos^{n+1}\theta\ \sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

5-

Avec $T=\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\theta}{\cos^k \theta}$ et $Z = S + iT = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{\cos^k \theta} = \sum_{k=0}^{n} u^k$ où $u = \frac{e^{i\theta}}{\cos\theta} = 1 + i\,\tan\theta$.

En particulier, u n'est égal à 1 que si $\theta = 0 \pmod{\pi}$.

Dans le cas particulier $\theta = 0 \pmod{\pi}$, on a donc $Z = n+1$ puis $S = \mathrm{Re}(Z) = n+1$.

Dans le cas général : $Z = \frac{u^{n+1}-1}{u-1} = -i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{\exp(i(n+1)\theta)}{\cos^{n+1}\theta} - 1\right)$

On prend la partie réelle : $S = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta\ \cos^n\theta}$.

A titre de vérification, et sachant que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, on voit bien que $\lim_{\theta\to 0} S = n+1$.

6-

On remarque que si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, alors $\exp(i\theta) = 1$ et $S = 2n+1$.

On suppose donc que θ n'est pas congru à 0 modulo 2π. Dans ces conditions :

$$S = e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n}(e^{i\theta})^k = e^{-in\theta}\frac{e^{i(2n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{-in\theta}\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}\ 2i\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{e^{i\frac{\theta}{2}}\ 2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 8

1-

On développe $\cos 5a + i\sin 5a = (\cos a + i\sin a)^5$ et on prend les parties réelles :

$$\begin{aligned}\cos 5a &= \cos^5 a - 10\cos^3 a(1-\cos^2 a) + 5\cos a(1-\cos^2 a)^2 \\ &= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{\pi}{10}$ et on posant $x = \cos a$, on trouve :

$$0 = \cos 5a = 16x^5 - 20x^3 + 5x = x(16x^4 - 20x^2 + 5)$$

Le réel $t = x^2$ est solution de $16t^2 - 20t + 5$. Donc $t \in \left\{\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right\}$.

Or $0 < a < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 1$. La seule possibilité est donc $t = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

D'autre part, $x = \cos a$ est positif. On en déduit : $x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

2-

On a tout d'abord $\cos x + \cos 3x = 2\cos(2x)\cos x$.

On en déduit : $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x = 2\cos(2x)(1+\cos x) = 4\cos(2x)\cos^2\dfrac{x}{2}$.

3-

On a par exemple : $\sin x + \sin 8x = 2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{7x}{2}$ et $\sin 2x + \sin 7x = 2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$.

Donc $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x = 2\sin\dfrac{9x}{2}\left(\cos\dfrac{7x}{2} + \cos\dfrac{5x}{2}\right) = 4\sin\dfrac{9x}{2}\cos(3x)\cos\dfrac{x}{2}$

4-

On a : $(2\cos 2^k x - 1)(2\cos 2^k x + 1) = 4\cos^2(2^k x) - 1$
$= 4\,\dfrac{1+\cos(2^{k+1}x)}{2} - 1 = 2\cos(2^{k+1}x) + 1.$

Si on pose $v_k = 2\cos 2^k x + 1$, l'expression donnée par l'énoncé s'écrit :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2\cos 2^k x - 1) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_0} = \frac{2\cos(2^n x)+1}{2\cos x + 1}$$

5-

On a : $2\cos x(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x) = 2\cos x\cos(5x) + 10\cos x\cos 3x + 20\cos^2 x$
$= \cos 6x + \cos 4x + 5(\cos 4x + \cos 2x) + 10(1+\cos 2x)$
$\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$

Conclusion : $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} = 2\cos x$

6-

Le premier membre est 2π-périodique en x, sur la réunion des $I_k = \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions a la même périodicité. On se place par exemple sur I_0.

L'application $x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$ est continue sur I_0, dérivable sur $I'_0 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in I'_0,\ \varphi'(x) = \dfrac{(\cos x)^{3/2} - (\sin x)^{3/2}}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}}$ a le signe de $\cos x - \sin x$.

Ainsi φ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$. On en déduit que sur I_0, $\varphi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.

Par périodicité, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $x = 2k\pi$ et les $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.