جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية السنة الأولى LMD المجموعة الثانية (2016/17)

الرياضيات 1 1سا 30 : 1 -03-2017

EXAMEN DE RATTRAPAGE

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة :

تمرين 1 [4.5] • **كل دالة تقبل الاشتقاق، تكون مستمرة.** صحيح ☒ ، خطأ ☐ 1.5

• f **دالة معرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل** : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ☐ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ☒ 1.5

• f **دالة معرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل** : $f(x)=\ln(1-e^{-x})+x$

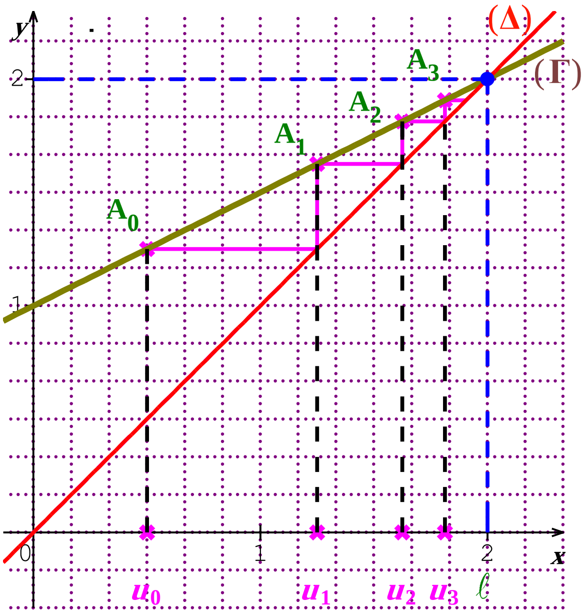
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ☐ ، f متزايدة على $]0,+\infty[$ ☒ 1.5

تمرين 2 [6.5] أ) يرمز (Γ) للمستقيم الذي معادلته $y=0.5x+1$ في مستوي منسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. **نعين نقطة تقاطع** (Γ) **مع المستقيم** (Δ) **الذي معادلته** $y=x$. 1

فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) تحقق: $x=0.5x+1$، أي $x=2$. وإحداثيات النقطة المطلوبة هما $(2;2)$

ب) • المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل: $\begin{cases} u_0=0.5 \\ u_{n+1}=0.5u_n+1 \quad , n\geq 0 \end{cases}$



1.5

1. **الحدود** u_1 **و** u_2 **و** u_3 . **والنهايات الممكنة للمتتالية** (u_n) 1

• بالحساب، نحصل على: $u_0=0.5$ ، $u_1=1.25$ ، $u_2=1.625$ ، $u_3=1.8125$.

• إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ، فإنها تحقق: $\ell = 0.5\,\ell + 1$، أي $0.5\,\ell = +1$ ومنه $\ell = 2$. 1

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب (الشكل في الصفحة الأولى)

3. نثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $0 < u_n < 2$ 1

بدء التراجع مُحقق. نفرض أن $0 < u_n < 2$. ومنه يكون $0 < 0.5\,u_n < 0.5\times 2$ وبالتالي $0 < 0.5\,u_n + 1 < 1+1$ أي $0 < u_{n+1} < 2$ وهو المطلوب. إذن $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < 2$ و (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

4. استنتاج بأن (u_n) متقاربة وتعيين نهايتها. 1

إشارة المقدار $u_{n+1} - u_n = (0.5\,u_n + 1) - u_n = -0.5\,u_n + 1$، موجبة تماما على المجال $]0\,;\,2[$ الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n)، وكذلك (u_n) محدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو $\ell = 2$

تمرين 3 [3] نعتبر الدالة $F(x) = \int_0^x (1 - e^{-t})\,dt$.

1. نبين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، وحساب مشتقتها $f(x)$. 1

$F(x)$ معرفة تماما، لأن $f(x) = 1 - e^{-x}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$، و $F(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = \left(\int_0^x (1 - e^{-t})\,dt\right)' = 1 - e^{-x} = f(x)$$

2. تحقيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x) = 1 - e^{-x}$ في المجال $[-1\,;+1]$ 2

$f(x)$ مستمرة على المجال $[-1\,;+1]$، و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]-1\,;+1[$.

حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل α في $]-1\,;+1[$: $f'(\alpha) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$

إذن نحل في $]-1\,;+1[$، المعادلة $f'(x) = \dfrac{(1 - e^{-1}) - (1 - e)}{2}$ التي تكافئ $e^{-x} = \dfrac{e - e^{-1}}{2}$

ومنه الحل الوحيد $x = \alpha = \ln\dfrac{2}{e - e^{-1}} \approx -0.16$

تمرين 4 [6] نعتبر المعادلة التفاضلية: $y'(x) - 2\cdot y(x) = 2x \ \ldots\ (1)$ 1

• المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي: $y'(x) - 2\cdot y(x) = 0 \ \ldots\ (2)$ صحيح ☒، خطأ ☐

• الحل العام y_1 لـ(2) هو: $y_1(x) = c\cdot e^{-x^2}$ (c من $\mathbb{R}$) ☐، $y_1(x) = c\cdot e^{2x}$ (c من $\mathbb{R}$) ☒ 1

• حل خاص y_2 للمعادلة (1) هو: $y_2(x) = -x - \dfrac{1}{2}$ ☒، $y_2(x) = -x - \dfrac{1}{2}$ ☐ 2

• الحل العام y للمعادلة (1) هو : $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c\cdot e^{2x} - x - \dfrac{1}{2}$ (c من $\mathbb{R}$) 1

• حل خاص y_3 للمعادلة (1)، يحقق لشرط الابتدائي $y(0) = \dfrac{1}{2}$ هو: .... $y_3(x) = e^{2x} - x - \dfrac{1}{2}$ 1