

EMD 1

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (X) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة :

تمرين 1 [4.5] • كل دالة مستمرة تقبل الاشتقاق. خطأ ، صحيح **1.5**

• دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بالشكل : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ **1.5**
 متزايدة على $[0; +\infty[$ ، ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ،

• دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \begin{cases} e^x \ln(x-1), & x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ 0, & x = 0 \end{cases}$

الدالة g مستمرة عن يمين (-1) ، ، الدالة g تقبل الاشتقاق عند الصفر

تمرين 2 [6.5] (أ) • نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +4[$ كما يلي : $f(x) = \frac{-x-1}{x-4}$ **1.5**

يرمز (Γ) لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. نبين أن f متزايدة على $I = \left] \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3}{2} \right]$ **1**

الدالة f تقبل الاشتقاق على I : $f'(x) = \frac{5}{(x-4)^2}$. إذن الدالة f متزايدة على $\left] \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3}{2} \right]$

(ب) • نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} ، بـ :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{-u_n - 1}{u_n - 4}, n \geq 0 \end{cases}$$

1. الحدود u_1 و u_2 و u_3 . والنهايات الممكنة للمتتالية (u_n) **1**

• بالحساب، نحصل على : $u_0 = \frac{3}{2} = 1.5$ ، $u_1 = 1$ ، $u_2 = \frac{2}{3} \approx 0.667$ ، $u_3 = \frac{1}{2} = 0.5$ **1**

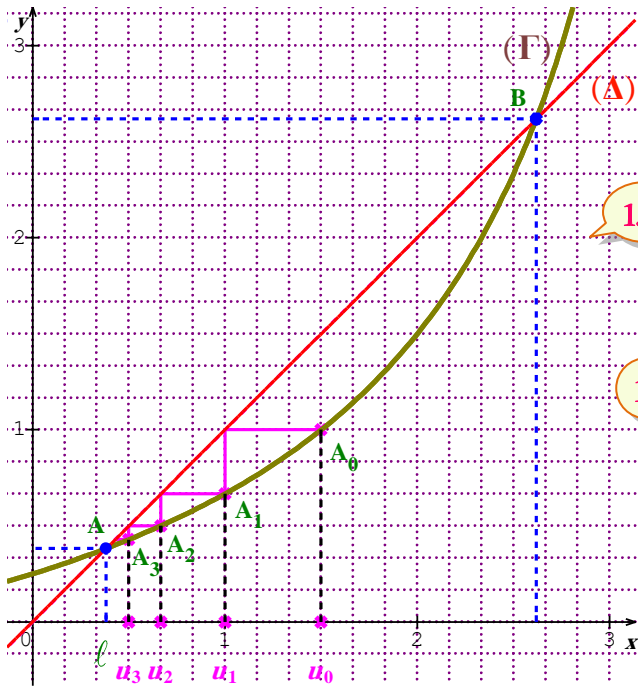
• إذا تقاربت (u_n) نحو l ، فإنها تحقق : $l = \frac{-l-1}{l-4}$ ، أي $l^2 - 3l + 1 = 0$ ومنه $l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ، لإنشاء النقط A_0 و A_1

و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب (الشكل في الصفحة الثانية)

3. أثبات أنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، يكون $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$ **1**

بدء التراجع مُحقق. نفرض أن $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$. بما أن f متزايدة على I يكون $f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) < f(u_n) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$



أي $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < u_{n+1} \leq 1 < \frac{3}{2}$
 وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$
 ومنه (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل)

4. تناقص المتتالية (u_n) ، وتقاربها .

بوضع $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، نجد المقدار

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 4}$$

الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n) ، ومنه (u_n) متناقصة تماما، وهي أيضا محدودة من الأسفل، فهي

متقاربة. (u_n) تتقارب نحو $l = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0.382$

تمرين 3 [3] نعتبر الدالة $F(x) = \int_1^x (\ln t)^2 dt$

1. نبين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، وحساب مشتقتها $f(x)$.

$F(x)$ معرفة تماما، لأن $f(x) = (\ln x)^2$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على J : $F'(x) = (\ln x)^2 = f(x)$

2. تعيين القيمة المتوسطة c لـ $f(x) = (\ln x)^2$ على $I = [1; 3]$.

الدالة $f(x) = (\ln x)^2$ مستمرة على المجال $[1; 3]$ ، فهي تقبل المكاملة على I .

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $[1; 3]$: $f(c) = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(t) dt$

$$f(c) = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (\ln t)^2 dt = \frac{1}{2} \left[2x - 2x (\ln x) + x (\ln x)^2 \right]_1^3 = \frac{3}{2} (\ln 3)^2 - 3 \ln 3 + 2 = 2$$

بحل $f(x) = 2$ في $[1; 3]$ ، المكافئة لـ $(\ln x)^2 = 2$ ، نجد القيمة المتوسطة c لـ $f(x)$ على I : $c = e \approx 2.718$

تمرين 4 [6] نعتبر المعادلة التفاضلية: $(1) \dots x y'(x) + y(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}$

المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ (1) هي: $(2) \dots x y'(x) + y(x) = 0$ صحيح خطأ

الحل العام y_1 لـ (2) هو: $y_1(x) = c \cdot e^{-x}$ (c من \mathbb{R}) ، $y_1(x) = \frac{c}{x}$ (c من \mathbb{R})

حل خاص y_2 للمعادلة (1) هو: $y_2(x) = \frac{\sqrt{e^x + 1}}{x}$ ، $y_2(x) = -x \sqrt{e^x + 1}$

الحل العام y للمعادلة (1) هو: $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{c}{x} + \frac{\sqrt{e^x + 1}}{x}$ (c من \mathbb{R})

حل خاص y_3 للمعادلة (1)، يحقق لشرط الابتدائي $y(1) = \sqrt{e+1}$ هو: $y_3(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{e^x + 1}}{x}$