جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية — السنة الأولى LMD

الرياضيات 1 — : $1_{30}$ سا

# EMD 01

## تصحيح مُختصر .

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة

تمرين 1

- $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{e^{4x^2-1}}{e^{2x-1}}$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)=e^{2x+1}$ ☒ ، $f'(x)=f(x)$ ☐ ، $f$ متناقصة على $]-\infty,0[$ ☐

- $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\infty$ ☐ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$ ☒ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ ☐

- $f$ دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & , x\neq0\\ 1 & , x=0\end{cases}$

الدالة $f$ مستمرة عند 1 ☒ ، الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند 1 ☐ ، $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ☐

- $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x)=\ln(5+e^{-x})+\dfrac{3}{4}x$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)=\ln(5e^{x}-1)-\dfrac{1}{4}x$ ☒ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ☐ ، $f$ متزايدة على $\mathbb{R}$ ☐

- **حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة** $f(x)=1-e^{-x}$ **في المجال** $[-1;+1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[-1;+1]$، و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]-1;+1[$ .

حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل $\alpha\in]-1;+1[$ : $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

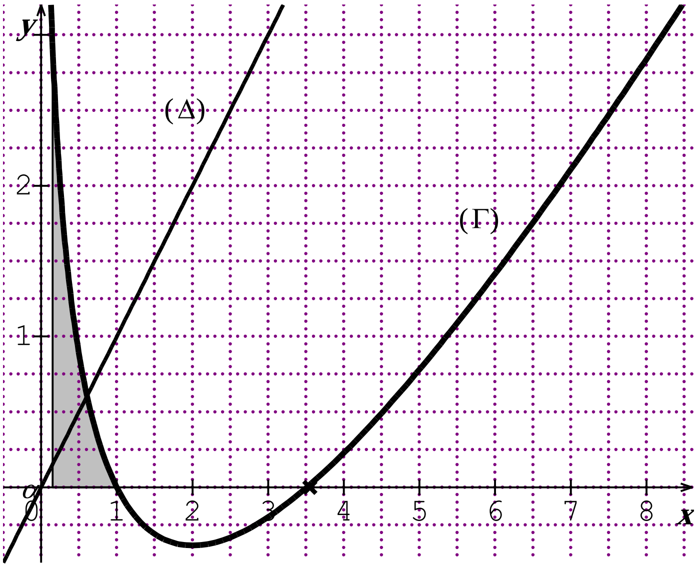
إذن نحل في $]-1;+1[$، المعادلة $f'(x)=\dfrac{(1-e^{-1})-(1-e)}{2}$ التي تكافئ $e^{-x}=\dfrac{e-e^{-1}}{2}$

ومنه الحل الوحيد $x=\alpha=\ln\dfrac{2}{e-e^{-1}}\approx-0.16$

تمرين 2 [2.5]

أ) • نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-2\ln x$

يرمز $(\Gamma)$ لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. كما هو مبين في الشكل أدناه:




- بين أن $(\Gamma)$ يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه مستقيم مائل $(\Delta)$، يُطلب تعيين معادلة له. أرسم $(\Delta)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(1-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x})=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-2\ln x)=+\infty$

وبالتالي المنحنى $(\Gamma)$ يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$.

ب) • نضع
$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x\ , & x>0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

- أدرس استمرارية الدالة $F$ عن يمين $x_0=0$. ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}$. ماذا تستنتج ؟

• الدالة $F$ مستمرة عن يمين الصفر، لأن $F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$

• لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{2}x+1-2\ln x)=+\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}$.

ومنه $F$ لا تقبل الاشتقاق عن يمين الصفر.

- ليكن $\alpha$ من المجال $]0;1[$. أحسب $S(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx$. ما هي النهاية $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}S(\alpha)$ ؟

ولدينا $S(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=[F(x)]_\alpha^1=\left[\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x\right]_\alpha^1=\boxed{\frac{3}{2}-(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha)}$

ولدينا أيضا $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha)\right)=\frac{3}{2}$

تمرين 3 [5]

- لتكن المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=(x+1)e^{-x}$ ... (1)

المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي : $y'(x)+y(x)=0$ ... (2) صحيح $\boxed{\times}$، خطأ $\boxed{\phantom{x}}$.

الحل العام $y_1$ للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هو $y_1=c\cdot e^{-x}$ ($c$ من $\mathbb{R}$) صحيح $\boxed{\times}$، خطأ $\boxed{\phantom{x}}$

- أوجد بطريقة تغيير الثابت حلا خاصا $y_2$ للمعادلة (1)

نوجد حلا خاصا $y_2$ للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $\boxed{y_2=c(x)\cdot e^{-x}}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة: $y'_2=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}=c'(x)\cdot e^{-x}-y_2$ . وبالتعويض في المعادلة (1) :

$y'_2+y_2=(c'(x)\cdot e^{-x}-\cancel{y_2})+\cancel{y_2}=(x+1)e^{-x}$ ومنه $c'(x)\cdot e^{-x}=(x+1)e^{-x}$

أي $c'(x)=x+1$ . وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c'(x)$ بالشكل:

$$c(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x$$

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة (1) الشكل الآتي : $\boxed{y_2=c(x)\cdot e^{-x}=(\frac{1}{2}x^2+x)\cdot e^{-x}}$

- الحل العام $y$ للمعادلة (1) : $\boxed{y=y_1+y_2=c\cdot e^{-x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot e^{-x}}$ ($c\in\mathbb{R}$)

- الحل الخاص $y_3$ للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي $y(0)=1$ :

لدينا : $y(0)=1 \Leftrightarrow c\cdot e^0+\left(\frac{1}{2}0^2+0\right)\cdot e^0=1 \Leftrightarrow c=1$ . ومنه: $\boxed{y_3=e^{-x}+(\frac{1}{2}x^2+x)\cdot e^{-x}}$

- تشكيل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=(\frac{1}{2}x^2+x+c)\cdot e^{-x}$ حلا لها. ($c$ ثابت اختياري حقيقي)

باشتقاق الدالة: $z(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x+c\right)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=-\left(\frac{1}{2}x^2-1+c\right)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري $c$ نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل:

$$z'(x)+z(x)=-\left(\frac{1}{2}x^2-1+c\right)\cdot e^{-x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x+c\right)\cdot e^{-x}=(x+1)\cdot e^{-x}$$

وهي نفس المعادلة (1): $\boxed{z'(x)+z(x)=(x+1)e^{-x}}$