جامعة خميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية   السنة الأولى LMD

الرياضيات 1   ⏱ : 1_{30}سا

EMD 1

تمرين 1 [10] أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left]0, +\infty\right[$ بالشكل: $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$

1. أدرس تغيرات f على المجال $\left]0, +\infty\right[$.
2. برهن بأنه إذا كان $x \in \left[0\,;\ 1+\sqrt{2}\right]$ فإن $f(x) \in \left[0\,;\ 1+\sqrt{2}\right]$.

ب) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3-\dfrac{2}{u_n+1} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3. ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟
2. مثل بيانيا المنحنيَيْن اللذيْن معادلتيهما $y=f(x)$ و $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، ثم استخدمهما لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2. على الترتيب. (الوحدة 4 سم).
3. أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$. ماذا تستنتج ؟

جـ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0 = 3$ والعلاقة $v_{n+1} = 3-\dfrac{2}{v_n+1}$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$

1. أثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن المتتالية (v_n) متناقصة.
2. بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن $v_n - u_n \leq 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. واستنتج بأن (u_n) و (v_n) متجاورتان. ما هي $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ؟

تمرين 2 [10] $f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 \quad , \quad x \geq 1 \\ x\,e^{x-1}+1 \quad , \quad x < 1 \end{cases}$$

1. عين الصور $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 1$.
3. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$، واستنتج بأن اقتصار f على $\left]1, +\infty\right[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}
4. أنشئ منحنييْ الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).
5. هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\,,\,2]$ ؟
6. استخدم التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. لوِّن بقلم الرصاص مساحة الحيز من المستوي التي تمثل قيمة هذا التكامل (المحدد بالمستقيمات: $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ ومنحنى $y=f(x)$).

معهد العلوم الاقتصادية   **السنة الأولى LMD**   **السنة الدراسية 2014/13**

مقياس الرياضيات1   حل مفصل لـ EMD 1

تمرين 1

أ) 1. **تغيرات** f 1.5

الدالة $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+}$ حيث $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

جدول تغيرات $f(x)$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$+3$

2. **الاستلزام** $x\in\left[0;\ 1+\sqrt{2}\right] \Rightarrow f(x)\in\left[0;\ 1+\sqrt{2}\right]$ 1

ليكن $x\in\left[0,1+\sqrt{2}\right]$. بما أن $0\le x\le 1+\sqrt{2}$ و f متزايدة على $\left[0,+\infty\right[$، فإن

$$f(0)\le f(x)\le f(1+\sqrt{2})$$

ومنه أيضا $1\le f(x)\le 1+\sqrt{2}$ وأخيرا نحصل على : $\boxed{f\left(\left[0,1+\sqrt{2}\right]\right)=\left[1,1+\sqrt{2}\right]\subset\left[0,1+\sqrt{2}\right]}$

ب) 1. **الحدود** u_1 **و** u_2 **و** u_3**، والنهايات الممكنة لـ**(u_n)

1   1.5

- بالحساب نجد: $u_1=2$ ، $u_2=\dfrac{7}{3}\approx 2.33$ ، $u_3=\dfrac{12}{5}=2.4$
- إذا تقاربت المتتالية ذات الحدود الموجبة (u_n) نحو النهاية ℓ، فإن هذه النهاية تحقق: $\ell=3-\dfrac{2}{\ell+1}$،

أي: $\ell^2-2\ell-1=0$. وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي: $\boxed{\ell=1+\sqrt{2}\approx 2.41}$.

2. **التمثيل البياني** موضح في الشكل 1.   1.5

3. **أثبات باستخدام البرهان بالتراجع : من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **يكون** $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}\ \ldots(*)$

بما أن: $u_0=1$ و $u_1=f(u_0)=2$ ، فإن المتراجحات $(*)$ تتحقق من أجل $n=0$.

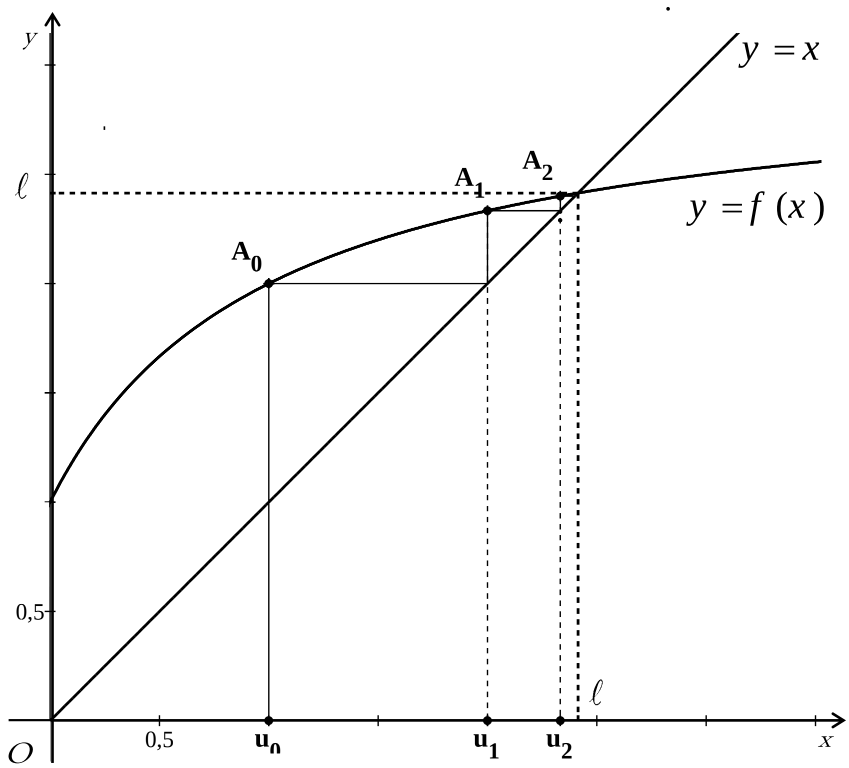
من أجل $0\le n$، نفرض أن $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}$.

بما أن f متزايدة على $\left[0,+\infty\right[$، يكون $f(0)\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le f(1+\sqrt{2})$

أي $1\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1+\sqrt{2}$ ، ومنه : $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1+\sqrt{2}$

إذن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_n\le u_{n+1}\le 1+\sqrt{2}}$ 0.5

نستنتج بأن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $1+\sqrt{2}$ ، فهي إذن متقاربة، وحسب السؤال **ب) 1.** فإن هذه النهاية ما هي إلا $\ell=1+\sqrt{2}\approx 1.41$.



1.5

شكل 1

جـ) 1. نثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن المتتالية (v_n) متناقصة 1

نثبت بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \le v_n \quad \dots (**)$

(v_n) ذات حدود موجبة. لدينا $v_0 = 3$ و $v_1 = f(u_0) = 2.5$ ، ومنه المتراجحة$(**)$ متحققة من أجل $n = 0$. ومن أجل $0 \le n$، نفرض أن $v_{n+1} \le v_n$، بما أن الدالة f متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون لدينا أيضا $f(v_{n+1}) \le f(v_n)$ ، أي $v_{n+2} \le v_{n+1}$

وحسب مبدأ التراجع نحصل على : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \le v_n}$

2. نثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

1

ليكن n عدد طبيعي.

لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{(u_n + 1)(v_n + 1)}\left(v_n - u_n\right)$

وبما أن الجداء $(u_n + 1)(v_n + 1)$ موجب تماما، فإن إشارة $v_{n+1} - u_{n+1}$ هي من نفس إشارة $v_n - u_n$ ، التي هي من إشارة $v_0 - u_0 = 3 - 1 = 2$ (الموجبة تماما). ومن جهة أخرى، ولكون $1 \le u_n$ و $3 \le v_n$، فإن $2 \le u_n + 1$ و $4 \le v_n + 1$ ، ينتج من ذلك أن $8 \le (u_n + 1)(v_n + 1)$. وبالتالي $\frac{1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \le \frac{1}{8}$.

وبالتالي يكون $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)}$

0.5

لنستخدم الآن البرهان بالتراجع لإثبات الخاصية $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0 - u_0 = 2$ و $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2$ ومنه $v_0 - u_0 \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0$. ومنه المتراجحة متحققة من أجل $n=0$.

ومن أجل $0 \le n$، وبفرض $v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، يكون لدينا :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right) \le \frac{1}{4}\cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

وأخير نحصل على

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

إذن، من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا $0 \le v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة عندما $n \to +\infty$، نجد $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - v_n) = 0$. وهذا يدل على أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان. لهما نفس النهاية، أي $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = 1+\sqrt{2}}$.

تمرين 2

1.5

1. **حساب الصور** $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.

بالحساب المباشر: $f(-2) = -\frac{2}{e^3}+1 \simeq 0.90$ ، $f(-1) = -\frac{1}{e^2}+1 \simeq 0.86$، $f(0)=1$،
$f(1)=2$، $f(1.5)=\sqrt{e}+1 \simeq 2.65$ ، $f(2)=e+1 \simeq 3.72$

2. **دراسة اشتقاق الدالة** f

1.5

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & ,\quad x > 1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & ,\quad x < 1 \end{cases}$$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\,e^{x-1}+1-2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+1-2}{x-1} = 1$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0 = 1$.

3. • **تغيرات** f **على** $\mathbb{R}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. ومنحنى f يقبل خط مقارب معادلته $y=1$. (الشكل **1**).

جدول تغيرات f

1.5

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$	‖ 1	$+$	
$f(x)$	1 ↘		$1-e^{-3}$ ↗		2 ↗		$+\infty$

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x=-2$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0=1$ وتغير إشارتها على جانبيها).

1.5

• **اقتصار f على $]1,+\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$** :

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $]1,+\infty[$ فهي تقابل. تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ في $]1,+\infty[$.

منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$.

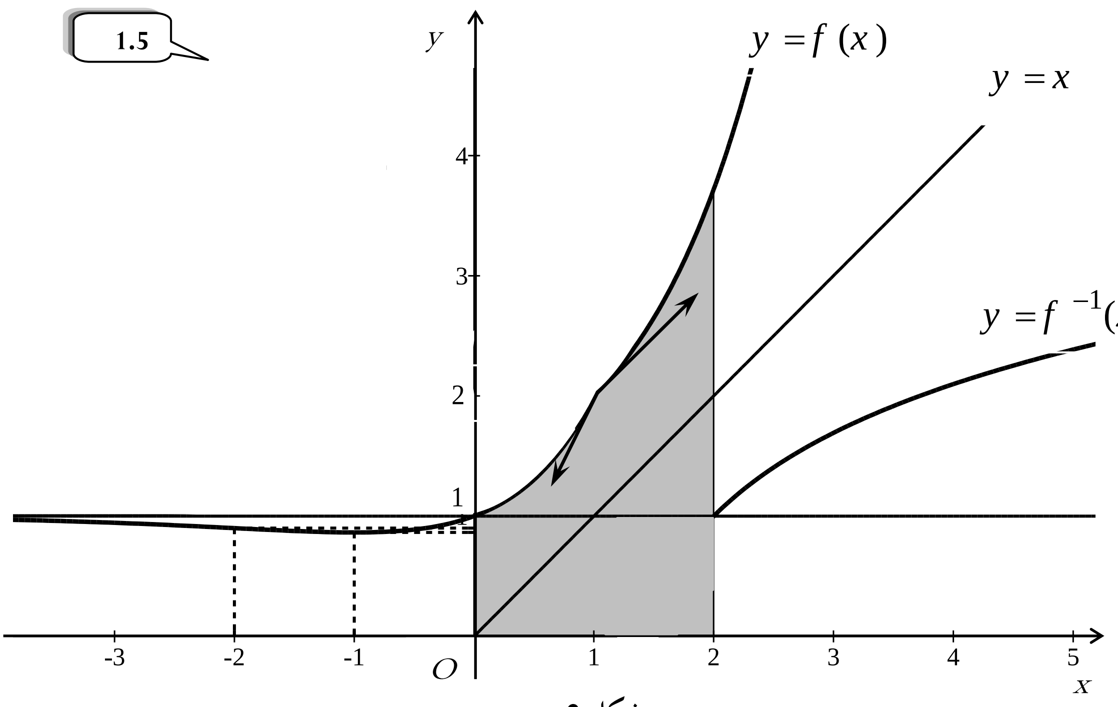
•بوضع : $y=f(x)=e^{x-1}+1,\ x\geq 1$ نحصل على $x=\ln(y-1)+1,\ y\geq 2$

ومنه

$$\boxed{(x\geq 2)\qquad f^{-1}(x)=\ln(x-1)+1}$$

4. **منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل 2).

1.5



شكل 2

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\,,2]$** 1

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0\,,2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\,,2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

6. **استخدام التكامل بالتجزئة لحساب** $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

لدينا $$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x\,e^{x-1} + 1)\,dx + \int_1^2 e^{x-1}dx$$

لنحسب (بالتجزئة) التكامل J : $J = \int x\,e^{x-1}dx$

1.5

نضع $u = x$ يكون $du = dx$ ، وبوضع $dv = e^{x-1}dx$ يكون $v = e^{x-1}$

ومنه $$J = x\,e^{x-1} - \int e^{x-1}dx = x\,e^{x-1} - e^{x-1}$$

إذن $$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \Big[x\,e^{x-1} - e^{x-1} + x\Big]_0^1 + \Big[e^{x-1}\Big]_1^2$$

ومنه قيمة I بالوحدات المربعة : $\boxed{I = (e^{-1}+1) + (e-1) = e + e^{-1} \approx 3.08}$