تمرين

أ) حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+x\cdot y(x)=2x$ ..... (1)

- نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+x\,y(x)=0$ ، الذي هو:

$$\boxed{y_1(x)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'(x)=c'(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-x\cdot c(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

أي: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-x.y_0$ ، وبالتعويض في (1) نجد: $c'(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-x.y_0+x.y_0=2.x$

ومنه: $c'(x)=2.x.e^{\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow \frac{dc}{dx}=2.x.e^{\frac{1}{2}x^2} \Leftrightarrow dc=2.x.e^{\frac{1}{2}x^2}dx$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل: $c(x)=\int 2\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة المتجانسة: $y_0(x)=c(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}=2.e^{-\frac{1}{2}x^2}\times e^{-\frac{1}{2}x^2}=2$

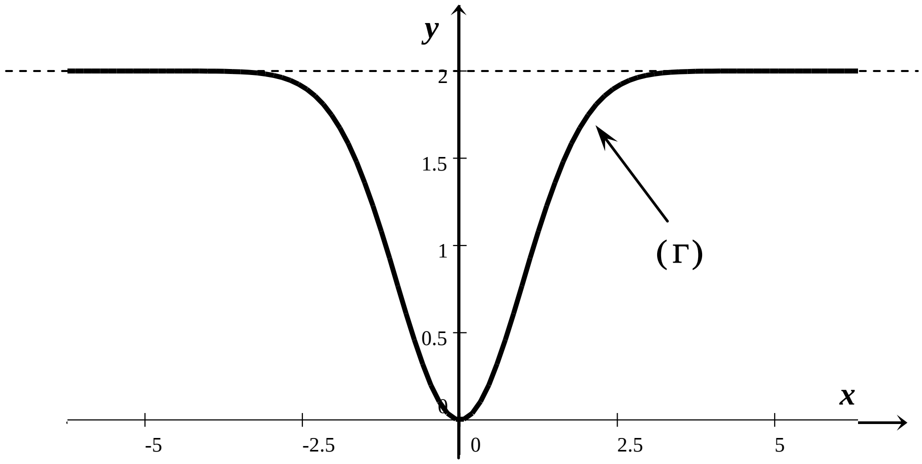
- الحل العام y للمعادلة (1): $y=y_1+y_0$ هو: $\boxed{y(x)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2}$

والحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y(0)=0$

أي : $c\cdot e^0+2=0 \Rightarrow c=-2$ هو : $\boxed{y_2(x)=f(x)=-2.e^{-\frac{1}{2}x^2}+2}$

ب) 1. نلخص دراسة تغيرات الدالة $f(x)=2.(1-e^{-\frac{1}{2}x^2})$ المستمرة على مجموعة تعريفها $D_f=]-\infty,+\infty[$ في النقاط الآتية:

$$\left.\begin{array}{r} \text{الدالة } f(x) \text{ زوجية، ندرسها على المجال } [0,+\infty[\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2.(1-e^{-\frac{1}{2}x^2})=2 \\ f'(x)=2.x.e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ ، } f(0)=0 \\ f'(x)\geq 0,\quad \forall x\geq 0 \end{array}\right\}$$



2. إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة كالآتي:

$$z(x)=\int -c\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=c.e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- باشتقاق الدالة: $z(x)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2$ نجد : $z'(x)=c\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z'(x)+x\,z(x)=2x$

جـ) 1. الدالة $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق مرتين على المجال $]-1,+\infty[$. ولدينا:

- $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\boxed{g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1}$
- ومن العلاقة: $\boxed{g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\dfrac{1}{2}}$ يتضح أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.
- وكذلك $g'(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر: $\boxed{g''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\dfrac{2}{3}}$.

2. النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x)=g(0)+g'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}g''(0)\cdot x+o\left(x^2\right)$$

$$\boxed{g(x)=1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x^2+o\left(x^2\right)}\ .$$

ومنه تكون معادلة المماس لمنحنى $y=g(x)$ عند نقطة المبدأ، هي: $\boxed{y=1-\dfrac{1}{2}\cdot x}$.