Analyse 1

CORRIGE Serie n1

Exercice 1:

Exo 01 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

1) $|x+y| \leq |x|+|y| \iff |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, car $\begin{cases} |x+y| \geq 0 \\ \text{et} \\ |x|+|y| \geq 0 \end{cases}$

$$\iff x^2+y^2+2xy \leq x^2+y^2+2|xy|$$

$$\iff xy \leq |xy| \quad \ldots (*)$$

la relation $(*)$ est vraie, donc on déduit que l'assertion (1) est vraie.

2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$\underbrace{|x|+|y|}_{\geq 0} \leq \underbrace{|x+y|+|x-y|}_{\geq 0} \iff (|x|+|y|)^2 \leq (|x+y|+|x-y|)^2$

$$\iff (|x|+|y|)^2 + 2|x+y|\,|x-y| \geq \quad (**)$$

la relation $(**)$ est vraie donc (2) est vraie.

3) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on sait que :

$$-|x-y| \overset{(i)}{\leq} |x|-|y| \overset{(ii)}{\leq} |x-y|$$

(3) $\iff$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$ d'après !!

$$\iff |x|-|y| \leq |x-y|. \quad -- (ii)$$

$\forall y \in \mathbb{R}$: $|y| = |y-x+x| \leq |x-y|+|x|.$

$$\iff -|x-y| \leq |x|-|y| \quad --- (i).$$

④ soit $x, y \in \mathbb{R}$, par distinct des cas :

I) si $|y| \leq |x+y|$, alors :

④ $\Leftrightarrow$ $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\Leftarrow$ l'inégalité triangulaire

II) si $|y| > |x+y|$, alors :

④ $\Leftrightarrow$ $|x+y| \leq |x| + |x+y|$ $\Leftrightarrow$ $0 \leq |x|$ ✓

⑤ : ~~les deux membres sont positifs alors on :~~

⑤ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x| + |xy| + |y| + |xy|}{(1+|x|)(1+|y|)}$

$\Leftrightarrow$ $|x+y| \leq |x| + |y| + 2|xy| + |xy| \cdot |x+y|$ ... (**)

on sait que $\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ \quad\wedge \\ |x|+|y| \leq |x| + |y| + 2|xy| + |xy| \cdot |x+y| \end{cases}$

alors (**) est vraie.

6) par la contraposée :

⑥ $\Leftrightarrow$ $x \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \overbrace{\boxed{(x < 0) \vee (x \geq \varepsilon)}}^{(\Pi)}$.

soit $x \in \mathbb{R}^*$; on a :

i) si $x < 0$, alors (Π) est satisfaite pour tous $\varepsilon > 0$.

ii) si $x > 0$, il suffit de prendre $\boxed{\varepsilon = \frac{x}{2}}$.

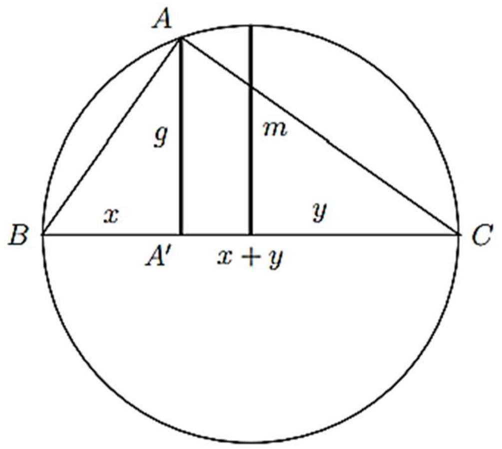
Exercice 2 :

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. On a déjà $x = \frac{x+x}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} = m \leqslant \frac{y+y}{2} = y$ et donc $\boxed{x \leqslant m \leqslant y}$.
   (on peut aussi écrire : $m - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ et donc $\boxed{x \leqslant g \leqslant y}$.
3. $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$
   et donc, $\boxed{x \leqslant g \leqslant m \leqslant y}$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, ce qui fournit $\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{h} \leqslant \frac{1}{x}$, ou encore $\boxed{x \leqslant h \leqslant y}$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ ou encore $\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$ et finalement

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \frac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$.
Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.
Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B.A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.
On accolle deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x + y$) noté [BC], tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



La moyenne arithmétique de x et y est $m = \frac{x+y}{2}$, le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B.A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Exercice 3 :

1-

Les entiers impairs successifs sont les $u_k = 2k - 1$, avec $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Le n-ième entier impair est donc $u_n = 2n - 1$.

On nous demande de calculer $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

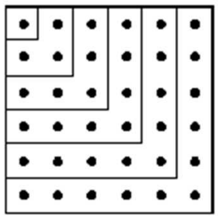
On vérifie que $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$, etc.

Il semble donc que la formule cherchée soit $S_n = n^2$.

Si elle vraie au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Conclusion : pour tout entier n, $S_n = n^2$.

Remarque : il y a une illustration très simple du résultat, qui consiste à compter les n^2 cases d'un carré de coté n, en procédant par "couches successives" à partir d'une case de coin, comme le montre le dessin ci-dessous (où on voit bien pourquoi $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$) :



2-

On peut trouver S connaissant les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)k = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n-1) \end{aligned}$$

Voici une autre démonstration. On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$.

On remarque que $v_{k+1} - v_k = (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = 3k(k-1)$.

Ainsi $S = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{3} (v_{n+1} - v_1) = \frac{1}{3} v_{n+1} = \frac{1}{3} (n+1)n(n-1)$

3-

On constate que $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)! - k!$

On en déduit : $U = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$.

4-

On peut utiliser au moins deux méthodes, comme dans le calcul précédent.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1) \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (n+1)\frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(3(n+1) - (2n+1)) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Posons $u_k = k(n+1-k) = nk - k(k-1)$, $v_k = k(k-1)(k-2)$ et $w_k = k(k-1)$.

On a $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$ et $w_{k+1} - w_k = 2k$.

On en déduit $u_k = a_{k+1} - a_k$ avec $a_k = \frac{n}{2} w_k - \frac{1}{3} v_k$.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} \\ &= \frac{n}{2} w_{n+1} - \frac{1}{3} v_{n+1} = \frac{1}{2} n^2(n+1) - \frac{1}{3} (n+1)n(n-1) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

5-

Posons $u_k = k(k+1)(k+2)$ et $v_k = (k-1)k(k+1)(k+2)$.

On constate que :

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) \\ &= 4k(k+1)(k+2) = 4u_k \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) \\ &= \frac{1}{4}(v_{n+1} - v_1) = \frac{1}{4} v_{n+1} = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

6-

Pour tout entier m, posons $S_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$.

On sait que $S_0 = n$, $S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

L'idée est d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n}(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = S_4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0.$$

D'autre part $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=2}^{n+1} k^4 = (n+1)^4 + S_4 - 1$.

On en déduit : $(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Pour calculer S_4, on utilise la même méthode :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 = \sum_{k=1}^{n}(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) = S_5 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0.$$

On a bien sûr : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^5 = (n+1)^5 + S_5 - 1$.

On en déduit : $S_4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - (n+1)\right)$.

Tout calcul fait, on trouverait : $S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.

Exercice 4 :

1-

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ t.q : $x \leq y$; on a :

$$\begin{cases} [x] \leq x \\ x \leq y \end{cases} \Rightarrow [x] \leq y$$, et on sait que ; $y < [y]+1$

alors $[x] < [y]+1$.

(en utilisant la propriété suivante : $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a < b \iff a \leq b-1$.)

$\Rightarrow [x] \leq [y]$. signifie que $x \mapsto [x]$ est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$.

Grâce à l'encadrement de la partie entière :

$$x+a-1 < [x+a] \leq x+a$$

$$x-1 < [x] \leq x \Rightarrow -x \leq -[x] < -x+1$$

$$\cancel{y-1 < [y] \leq y \Rightarrow -y \leq -[y] < -y+1}$$

$$-1 < [x+a]-[x]-a < 1$$

puisque $\begin{cases} \underbrace{[x+a]-[x]-a}\in \mathbb{Z} \\ \quad '' \quad \in \,]-1,1[\end{cases}$

$\Rightarrow [x+a]-[x]-a = 0 \iff [x+a] = [x]+a$.

3-

On prend $x = 1,6$, $y = 1,4$

$[x+y] = [3] = 3$

$[x]+[y] = [1,6]+[1,4] = 1+1 = 2$.

$[xy] = [2,24] = 2$

$[x] \cdot [y] = 1$

généralement $\begin{cases} [x+y] \neq [x]+[y] \\ [xy] \neq [x] \cdot [y] \end{cases}$.

4-

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad [x] + [-x] = x - x = 0 \quad \cdots (i)$

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$x - 1 < [x] \leq x$$
$$-x - 1 < [-x] \leq -x$$
$$\overline{-2 < [x] + [-x] \leq 0}$$

$$\Longrightarrow \quad [x] + [-x] = 0 \quad \vee \quad [x] + [-x] = -1$$

de (i) et (ii), on peut déduire :

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} . \\ -1 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} . \end{cases}$$

5-

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$\cancel{nx \leq [nx]}$

$$nx - 1 < [nx] \leq nx$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq x$$

$$\Longrightarrow \quad \left[x - \frac{1}{n}\right] \leq \left[\frac{[nx]}{n}\right] \underset{(1)}{\leq} [x] . \quad \cdots (*)$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$\underbrace{n[x]}_{\in \mathbb{Z}} \leq nx < \underbrace{n[x] + n}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\Longrightarrow \quad n[x] = [n[x]] \leq [nx] \leq [n[x] + n] = n[x] + n$$

$$\Longrightarrow \quad [x] \leq \frac{[nx]}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad [x] = [[x]] \leq \left[\frac{[nx]}{n}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad [x] \leq \left[\frac{[nx]}{n}\right] \quad \cdots (2)$$

alors : $\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$.

Exercice 5 :

1-

Soit $A \subset B$; on montre que $\inf(B)$ est un minorant de A :

Soit $x \in A$, comme $A \subset B$ alors $x \in B$,

B est borné $\Rightarrow$ $x \geq \inf(B)$.

donc on a montré que : $\forall x \in A : x \geq \inf(B)$

$\Rightarrow$ $\inf(B)$ est un minorant de A.

et on sait que $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A

on déduit que : $\inf(A) \geq \inf(B)$.

2-

2) .. de même manière.

3) $\sup(A \cup B) \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} \max\{\sup A, \sup B\}$.

i) $\leq$: on montre que $M = \max\{\sup A, \sup B\}$ est un majorant de l'ensemble $A \cup B$.

soit $x \in A \cup B$;

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \xRightarrow{A \text{ est borné}} \\ \vee \\ x \in B \xRightarrow[B \text{ est borné}]{} \end{cases} \begin{cases} x \leq \sup A \\ \vee \\ x \leq \sup B \end{cases}$$

$\Longrightarrow x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

alors $M = \max\{\ \}$ est un majorant de $A \cup B$ est par définition, $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des ...

est par définition, $\sup(A\cup B)$ est le plus petit des majorants de $A\cup B$, donc

$$\sup(A\cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$$

ii) $\geq$: d'après (e) :

on a $\begin{cases} A \subset A\cup B \\ \wedge \\ B \subset A\cup B \end{cases} \overset{②}{\Longrightarrow} \begin{cases} \sup A \leq \sup(A\cup B) \\ \wedge \\ \sup B \leq \sup(A\cup B) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A\cup B)$$

4- de même.

5-

[I] D'abord on montre que $-A$ est borné :

1 Soit $y \in -A \Rightarrow \exists x \in A : y = -x$.

Comme A est borné, alors $\inf A \leq x \leq \sup A$

$$\Rightarrow \underbrace{-\sup A}_{m} \leq \underset{y}{\underset{\parallel}{-x}} \leq \underbrace{-\inf A}_{M}.$$

donc $\exists M = -\inf A,\ m = -\sup A \in \mathbb{R},\ \forall y \in -A$:

$$m \leq y \leq M.$$

($-A$ est borné)

II $1^{ère}$ <u>méth</u> :

$*\quad \sup(-A) = -\inf A \iff \begin{cases} \sup(-A) \leq -\inf A \ldots (i) \\ \wedge \\ \sup(-A) \geq -\inf A \ldots (ii) \end{cases}$

i) ~~on~~ ~~Il suffit~~ on a montré que $-\inf A$ est un majorant de $(-A)$: alors on déduit que :

$$\sup(-A) \leq -\inf A$$

ii) $\sup(-A) \geq -\inf A \Leftrightarrow \inf A \geq -\sup(-A)$.

On montre que $-\sup(-A)$ est un minorant de A :

Soit $x \in A$, alors $-x \in -A$; et comme $-A$ est borné

alors : $-x \leq \sup(-A)$

$$\Rightarrow x \geq -\sup(-A)$$

or $m = -\sup(-A)$ est un minorant de A, et le fait que $\inf A$ est le plus grand des minorants de A :

$$\inf A \geq -\sup(-A)$$

II $2^{ème}$ méth : On utilise la propriété caractéristique de la b. supérieure.

$$M = -\inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ -\inf A \text{ est un majorant de } (-A) \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y_\varepsilon \in (-A) : M - \varepsilon < y_\varepsilon \leq M \end{cases}$$

(i) on a montrer ça ds (I).

(ii) on écrit la propriété de $\inf A$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \inf A \leq x_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$.

donc : $-x_\varepsilon \in (-A)$ avec : $-\inf A - \varepsilon < -x_\varepsilon \leq -\inf A$.

alors on peut écrire :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon = -x_\varepsilon \in (-A) : \underbrace{-\inf A}_{M} - \varepsilon < y_\varepsilon \leq \underbrace{-\inf A}_{M} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sup(-A) = -\inf A.$$

Exercice 6:

	L'ensemble des majorants	L'ensemble des minorants	sup	inf	Min	Max
$A_1 = [0,1[$	$[1,+\infty[$	$]-\infty,0]$	1	0	0	Non
$A_2 =]-2,7] \cup \{11\}$	$[11,+\infty[$	$]-\infty,-2]$	11	-2	Non	11
A_3	$[-\frac{1}{2},+\infty[$	$]-\infty,-1]$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
A_4	$[3,+\infty[$	$]-\infty,2]$	3	2	Non	3
A_5	$[1,+\infty[$	$]-\infty,0]$	1	0	0	Non
A_6	$[\pi+1,+\infty[$	$]-\infty,\pi]$	$\pi+1$	π	Non	$\pi+1$
A_7	$[\frac{3}{2},+\infty[$	$]-\infty,-1]$	$\frac{3}{2}$	-1	Non	$\frac{3}{2}$
A_8	$[2,+\infty[$	$]-\infty,-1]$	2	-1	Non	2

On prend au moins deux exemples par la propriété caractéristique.

Exercice 7:

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$. On trouve en effet :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{2})^k \mathrm{C}_n^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 + \sqrt{2}\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^3 + 2^2\mathrm{C}_n^4 + 2^2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^5 + \cdots \\ &= A + B\sqrt{2}\end{aligned}$$

De même, $(1-\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$.

On en déduit : $A = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ et $B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$.

- *Première méthode :*

  On a $A = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$. Or $k\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

  On en déduit $A = n \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} = n2^{n-1}$.

- *Deuxième méthode :*

  Pour tout réel x, on sait que $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

  Si on dérive cette égalité par rapport à x, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$.

  En particulier avec $x = 1$, on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

- *Troisième méthode :*

  C_n^k est le nombre de parties à k éléments de $E = \{1, \ldots, n\}$.

  Donc $A = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card} X$ (somme étant étendue à toutes les parties X de E.)

  Or quand X décrit $\mathcal{P}(E)$, $\overline{X}$ décrit lui aussi $\mathcal{P}(E)$.

  On peut donc également écrire :

  $A = \sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card} \overline{X} = \sum\limits_{X \subset E} (n - \operatorname{Card} X) = n \sum\limits_{X \subset E} 1 - \sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card} X = n2^n - A$.

  On retrouve donc bien $A = n2^{n-1}$.

- *Première méthode :*

  Comme pour A, on note que $(n+1)\mathrm{C}_n^k = (k+1)\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ donc $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

  Ainsi : $B = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} = \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

- *Deuxième méthode :*

  On intègre l'égalité $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$ entre 0 et x.

  On trouve $\dfrac{1}{n+1}((1+x)^{n+1} - 1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \dfrac{1}{k+1} x^{k+1}$.

  On donne à x la valeur 1 et on obtient : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$.