

Série d'exercices N°2

Ensembles – Relations et Applications

Exercice n°1 : Soient A , B , et C trois sous-ensembles de l'ensemble non vide E .

1. En utilisant les propriétés des opérations sur les ensembles montrer que :

$$\text{i) } \overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} \quad \text{ii) } (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A.$$

2. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x| \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 > 5x - 6\}$, et $C = \{x \in \mathbb{R}^+, x^2 - 5 \leq 20\}$. Déterminer les ensembles A , B , et C et vérifier la propriété i) donnée dans la question précédente.

Exercice n°2 : Soit R une relation définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1. Démontrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer \bar{a} la classe d'équivalence de l'entier a .

Exercice n°3 : Soit R une relation définie sur \mathbb{Z} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow 7 \text{ divise } (x - y).$$

1. Démontrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\bar{0}$ et $\bar{2}$ les classes d'équivalence de 0 et de 2.

Exercice n°4 : Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.

1. Déterminer l'image directe $f(A_1)$ et $f(A_2)$ avec $A_1 = \{-1, 0, 1, \sqrt{8}\}$ et $A_2 = [0, 1]$.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_3)$ avec $B_1 = \{-5\}$, $B_2 = \{0, 1/2\}$ et $B_3 = [1, 2]$.
3. La fonction f est-elle injective ? surjective ? justifier.
4. Montrer que $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

Exercice n°5 : Considérons la fonction $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{12x+5}{3x-6}$.

1. Montrer que f est injective et déterminer si f est surjective.
2. Trouver l'ensemble F tel que f est bijective de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers F , puis calculer la fonction réciproque f^{-1} .

Université de Khemis - Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Module : MATHS 1
L1 : SM+ST S1-2020-2021