UNIV. Djilali Bounaama,
Departement SM.
Faculté ST.

2019 / 2020.

Serie d'exercice N° 1.
Logique et Raisonnement.
(Solutions)

Exercice No. 1

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p\Rightarrow q$	$\bar{p}\wedge(p\Rightarrow q)$	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge\bar{q}$	$[\bar{p}\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow\bar{q}$	$[(p\vee q)\wedge\bar{q}]\Rightarrow q$
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

EXO2 :

$n\in\mathbb{Z}$: $9n+5$ paire $\Longrightarrow (3n+2)$ impaire.

Methode 1 ; methode directe :

Soit $n\in\mathbb{Z}$: $9n+5$ est paire $\Longrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tq $9n+5=2k$.

$9n+5=2k \Longleftrightarrow 9n-2k=-5$.

on resout dans $\mathbb{Z}$ l'equation $9n-2k=-5$

$$9n-2k=-5$$
$$9(-5)-2(-20)=-5$$
$$9(n+5)-2(k-20)=0$$
$$9(n+5)=2(k-20)$$

$$\left.\begin{array}{l}2/9(n+5)\\ 2\wedge 9=1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} 2/n+5$$

$2/n+5 \Longrightarrow \exists t\in\mathbb{Z}$ tq : $n+5=2t$

C.A.D : $n=2t-5$

$$3n+2=3(2t-5)+2=6t-15+2=6t-13+14-14$$
$$=2(3t-7)+1=2t'+1 \text{ (impaire)}$$

Exercice 02

Methode 02 : (Raisonnement cas par cas)

Soit $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} n \text{ est pair} \\ \text{ou} \\ n \text{ est impair} \end{cases}$ donc on a soit $n = 2k \,/\, k \in \mathbb{Z}$ soit $n = 2k+1 \,/\, k \in \mathbb{Z}$

Si $n = 2k$ on a $9n+5 = 9(2k)+5 = 2(9k+2)+1$ impair

Si $n = 2k+1$ on a : $9n+5 = 9(2k+1)+5 = 18k+9+5 = 18k+14$

$9n+5 = 2(9k+7)$ qui est pair

donc $9n+5$ est pair $\Rightarrow n = 2k+1$.

et par suite $3n+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+5 = 2(3k+2)+1$

$3n+2$ est impair.

Methode 3 (Raisonnement par l'absurde)

on suppose que $9n+5$ est pair et $3n+2$ est pair

donc $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z}$ tq

$9n+5 = 2k$ et $3n+2 = 2k'$

$(9n+5)+(3n+2) = 2(k+k') = 2(k'')$ (la somme de deux entiers pairs et tj paire.)

$9n+5+3n+2 = 2k''$

$$\underbrace{\underbrace{14n+7}_{\text{impair}} = \underbrace{2k''}_{\text{pair}}}_{\text{contradiction}}$$

Exercice 3 (Methode directe)

soit $x, y \in \mathbb{Q}$. alors il existe p, q, p', q' tq

$p \in \mathbb{Z}$, $p' \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*$.

avec $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$

$$x^2 + 4y = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 4\left(\frac{p'}{q'}\right) = \frac{p'}{q^2} + \frac{4p'}{q'} = \frac{p'q' + 4p'q^2}{q^2 . q'}$$

Comme $q \neq 0$ et $q' \neq 0$ alors $q^2 . q' \in \mathbb{Z}^*$.

$q \in \mathbb{Z}$, $q' \in \mathbb{Z}$

d'autre part $p'q' + 4p'q^2$ est un entier.

on pose $q^2 . q' = t \in \mathbb{Z}^*$

$p'q' + 4p'q^2 = t' \in \mathbb{Z}$.

et donc $x^2 + 4y = \frac{t'}{t} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4 (Raisonnement par contraposé)

on sait que $(P \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{P})$

on suppose que $\overline{q}$ est vraie et on demontre que $\overline{P}$ est vraie

C.A.D on suppose que $a \neq b \neq 0$ et on demontre que

$a + b\sqrt{2} \neq 0$

Si $b \neq 0$ alors $b\sqrt{2} \neq 0$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors on a $a + b\sqrt{2} \neq 0$.

Exercice 5 (Raisonnement par l'absurde)

on suppose que n est le carré d'un entier et $2n$ est le carré d'un entier C.A.D. il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tq.

$$n = p^2 \text{ et } 2n = q^2$$

on a alors $\frac{2n}{n} = \frac{q^2}{p^2} = 2$ et on en deduit que

$2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2$ ce qui donne $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$.

Contradiction car $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 6

① on demontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $P(n)$: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

initialisation

pour $n = 1$ on a $2^0 = 1$, $1! = 1$, $1^1 = 1$

et donc $2^0 \leq 1! \leq 1^1$

hérédité (ou transmission) : soit $n \geq 1$.

on suppose que $P(n)$ est vraie et on demontre que $P(n+1)$ est vrai

C.A.D on suppose que $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

et on demontre que $2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$

on a :

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n \quad \ldots \times 2.$$

$$2^n \leq 2.n! \leq 2n^n.$$

on a : $n \geq 1$ et donc $n+1 \geq 2$ ce qui donne.

$$2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$$

on a aussi $n \leq n+1$ et donc $n^n \leq (n+1)^n$

Comme $(n+1)! = n!(n+1) \leq (n+1)n^n$ $\quad (n! \leq n^n)$

donc $(n+1)! \leq (n+1)n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$

finalement, on a : $2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+n}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

P(1) est vérifiée $\quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = 1/2 .$$

on suppose que P(n) est vraie et on demontre que P(n+1) est vraie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$=$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

on a : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 + \left(\frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

4) $1^2 - 2^2 + 3^2 + \ldots + (-1)^{n-1} . n^2 = (-1)^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

Pour $n = 1$. on a dans le premier terme. 1 et dans le deuxieme membre de l'egalité on a aussi 1

on suppose que :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} . \frac{n(n+1)}{2}$$

et on demontre que :

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} . (n+1)^2 = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^n (n+1)^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 + (-1)^n (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 \right]$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{n(n+1) - 2(n+1)^2}{2} \right]$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{(n+1)(n - 2n - 2)}{2} \right]$$

$$= (-1)^{n-1} \left[\frac{(n+1)(-n-2)}{2} \right]$$

$$= (-1)^{n} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]$$