Chapitre IV- Travail et énergie

Introduction :

En principe, les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connait les positions, la vitesse initiale des particules d'un système et toutes les forces agissant sur ces particules, on peut prévoir l'évolution de ce système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne peut pas connaitre toujours toutes les forces qui entre en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreux ou trop compliqué. Pour cette raison, en faisant appel à des nouvelles notions telles que « le travail et énergie ».

VI.1. Travail d'une force

VI.1.1. Travail effectué par une force constante :

- On dit qu'une force travaille quant son point d'application se déplace.
- Une force est dite constante lorsque la valeur, le sens et la direction de cette force ne changent pas au cours du temps.

Par définition, on appelle travaille élémentaire « dW » d'une force $\vec{F}$, le produit scalaire de cette force par le vecteur de déplacement élémentaire $\vec{dl}$

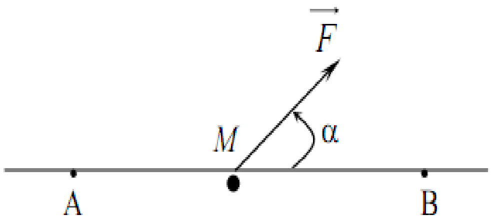
$$dW = \vec{F}.\vec{dl}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

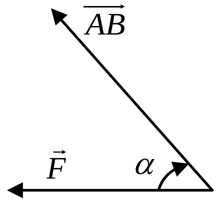
- Le travail d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ de son point d'application est donnée par :

  $$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos\left(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}}\right)$$



  L'unité $[W] = Joule$

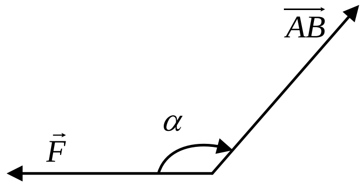
  α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$



Remarque :

- Si $\alpha < 90° \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow W > 0$: le travail est dit moteur.

La force dans ce cas favorise le mouvement dans le sens de déplacement $\overrightarrow{AB}$



- Si $\alpha > 90° \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow W < 0$: le travail est dit résistant.
  La force s'oppose au mouvement du corps.
- Si $\alpha = 90° \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow W = 0$: la force ne travaille pas.

✓ **Travail d'un ensemble de forces :**

Soit un ensemble de forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$ dont les points d'application subissent le même déplacement $\overrightarrow{AB}$

$$W = \vec{F_1}.\overrightarrow{AB} + \vec{F_2}.\overrightarrow{AB}......+\vec{F_3}.\overrightarrow{AB}$$

VI.1.2. Travail d'une force variable :

Dans le cas où la force appliqué varie en intensité et/ou en direction lors d'un déplacement d'une force quelconque, ce déplacement peut être subdivisé en « n » déplacement $\overrightarrow{\Delta l_1}, \overrightarrow{\Delta l_2}, ..., \overrightarrow{\Delta l_n}$ suffisamment petits pour qu'on puisse considérer que la force $\vec{F_i}$ reste constance lors de déplacement $\overrightarrow{\Delta l_i}$:

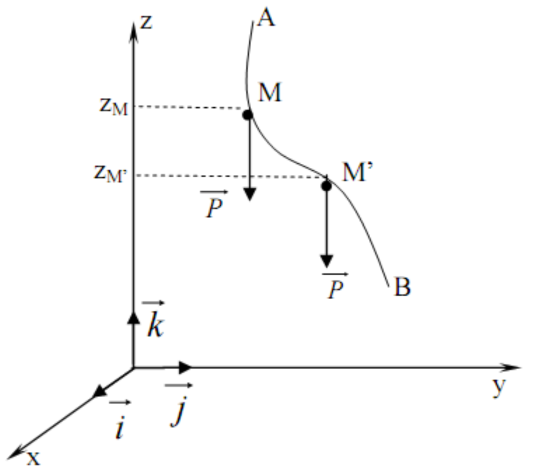
$$W_T = W_1 + W_2 + ... + W_n = \vec{F_1}.\overrightarrow{\Delta l_1} + \vec{F_2}.\overrightarrow{\Delta l_2} + ... + \vec{F_n}.\overrightarrow{\Delta l_n}$$

$$\boxed{\Rightarrow W_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}.\overrightarrow{\Delta l_i}}$$

Pour un déplacement élémentaire très petit : $\Delta l \to dl$ et $\sum \to \int_A^B$:

$$\boxed{\Rightarrow W_T = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

VI.1.3. Travail de la force de pesanteur :



$$h = z_M - z_{M'}$$

$$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \vec{dl}$$

et $\quad \vec{P} = -P\vec{k}\ ,\quad \vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

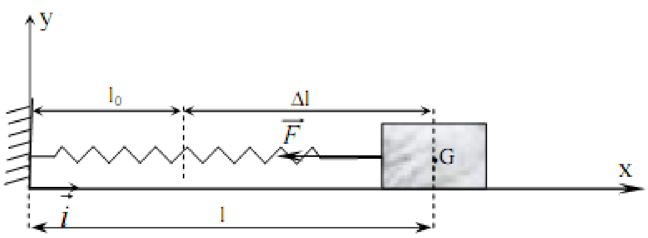
$$\Rightarrow \quad \vec{P}\,\vec{dl} = -P\,dz$$

donc, $\quad w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \vec{dl} = \int_M^{M'} -P\,dz = -P(z_{M'} - z_M)$

$$\Rightarrow \quad w_{\vec{P}} = P(z_M - z_{M'}) = P\,h = mg\,h$$

VI.1.4. Travail d'une force élastique

$$\vec{F} = -k\,\Delta l\vec{i} = -k(l - l_0)\vec{i}$$
$$= -k\,x\vec{i}$$



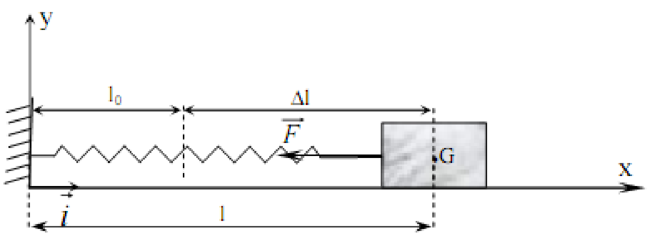
$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\,\vec{dl} = -kx\vec{i}\,dx\vec{i} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$$

Lorsque $\vec{F}$ passe de la position *x1* à *x2*, on a :

$$\boxed{w_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\,\vec{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2}\right)}$$

VI.1.5. Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapp



pour l'accomplir. Selon la durée considérée,

instantanée.

L'unité de la puissance, dans le système MKS

Puissance moyenne : $P_{moy} = \dfrac{\Delta W_{\vec{F}}}{\Delta t}$

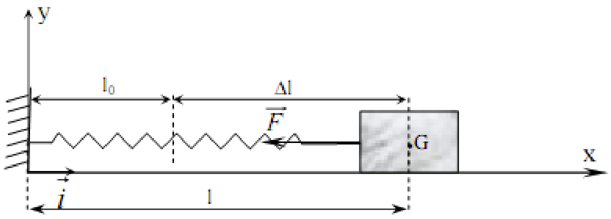
Puissance instantanée : $P(t) = \dfrac{dW_{\vec{F}}}{dt}$

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui dans l'intervalle de temps *dt* parvient à mouvoir un mobile de la distance $\vec{dl}$ (i.e. lui confère la vitesse $\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$) peut s'écrire :

$$\boxed{P(t) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}}$$

VI.2. Energie

VI.2.1. Théorème de l'énergie cinétique :



Il existe différentes types d'énergies : Mécanique, Electrique, Chimique, Thermique...

Dans un système fermé (Isolé), la somme de ces différentes forme d'énergie (appelé Energie totale) reste constante au cours du temps. Autrement dit l'énergie totale est conservée.

Considérons un objet ponctuel de masse « m » dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a_0 , sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$. Supposant que v_0 est sa vitesse initiale et que $\vec{F}$ est appliqué dans le sens du mouvement et produise par la suite un déplacement $\vec{d}$ $\left(\vec{F}//\vec{d}\right)$:

$$W = \vec{F}.\vec{d} = F.d = m.a_0.d$$

On a :

$$a_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2d} \Rightarrow W = m\frac{v^2 - {v_0}^2}{2d}d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$ se définit comme l'énergie cinétique de la masse *m* ;

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2}$$

E_C est défini comme étant la capacité d'un corps matériel pour faire un travail grâce à son mouvement :

$$\boxed{W = E_C - E_{C_0} = \Delta E_C}$$

Théorème :

« le travail effectué sur une masse ponctuelle est égale à la variation de son énergie cinétique »

Ce théorème reste valable dans le cas d'une force variable et pour une trajectoire quelconque.

On à :

$$W = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B F_t.dr$$

F_t : la composante de la force tangente à la trajectoire

$$F_t = m.a_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B m\frac{dv}{dt}dr = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right) = \Delta E_C}$$

VI.2.2. Forces conservatives et non conservatives

Les forces sont dites conservatives (on dit aussi que « la force dérive d'un potentiel *U*)
Lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point
D'arrivée.

✓ **Exemples**

- Force de pesanteur ;
- Force du poids ;
- Force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

✓ **Exemple**

- Force de frottement.

VI.2.3. Energie potentiel :

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle *Ep.*

On définit l'énergie potentielle « E_P » comme étant la quantité d'énergie qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique E_C pour que leur somme soit constante : $E_C+E_P=Cts$.

$$\Delta E_C = -\Delta E_P = W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_C}\right)$$

Avec $\overrightarrow{F_C}$ est une force conservative

$$\Rightarrow E_P(B)-E_P(A) = -W_{A\to B} = -\int_A^B \overrightarrow{F_C}.\overrightarrow{dr}$$

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_p \to dE_p$.

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c}\cdot\overrightarrow{dl}$$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de f est donnée par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

On définit un point M, repéré dans le référentiel Oxyz par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors

$$\overrightarrow{grad}\,f\cdot d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Il vient,
$$\overrightarrow{grad}\,f\cdot d\overrightarrow{OM} = df \qquad ✦$$

A partir de l'équation (✦), on peut facilement remarquer que puisque

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c}\cdot\overrightarrow{dl} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors $\overrightarrow{F_C} = -\overrightarrow{grad}E_P$

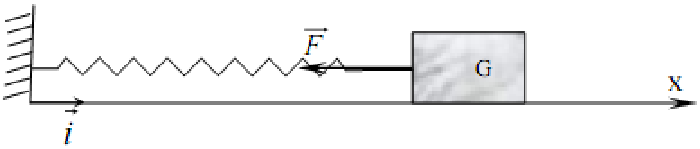
En appliquant l'opérateur rotationnel des deux cotés de l'équation précédente on aura

$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{F_C} = -\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}E_P\right) = \vec{0}$

VI.2.4. Exemples de forces conservatives :

✓*Force élastique*

$\vec{F} = -k\,x\vec{i}$



$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dE_p}{dx} = k\,x$$

$$\Rightarrow \qquad E_p = \int k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + cste$$

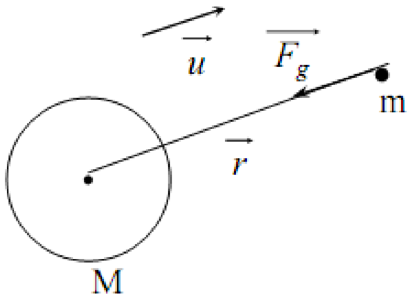
✓*Force gravitationnelle*

$\overrightarrow{F_g}$ est une force conservatrice.

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{M\,m}{r^2}\overrightarrow{u}$$

$$= -G\frac{M\,m}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

avec $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$



$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_g} = -G\frac{M\,m}{r^3}\overrightarrow{r}$$

$$\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad}\,E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\overrightarrow{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dr} = G\frac{M\,m}{r^2}$$

$$E_p(r) = \int G\frac{M\,m}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow \quad E_p(r) = -G\frac{M\,m}{r} + cste$$

VI.2.5. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\Rightarrow E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right) + \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

Avec : $\overrightarrow{F_C}$: Force conservative et $\overrightarrow{F_{NC}}$: Force non conservative

Alors $E_c(B) - E_C(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

puisque $\sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) = \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$

il vient $E_c(B) + E_p(B) - \left(E_C(A) + E_p(A)\right) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler *Energie Total* du système Symbolisée par (E), telle que,

$$E = E_c + E_p = Energie\,Cinétique + Energie\;Potentielle$$

Alors, entre les deux points A et B

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

- ✓ **Théorème de l'énergie mécanique**

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système,

$$\Rightarrow E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservative) l'énergie mécanique se conserve.