

I - Introduction: la dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes de mouvement.

II - 1. principe d'inertie: c'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe.

« Tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur lui »

En d'autres termes,

si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle,

- un objet au repos reste au repos.

- un objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante.

II - 2. Référentiels d'inertie ou galiléens: on appelle référentiel d'inertie ou galiléen, un système de référence (ou repère) dans lequel une particule libre se déplace à vitesse constante (un repère où le principe d'inertie est applicable). D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas; on ne dispose que de référentiels approximatifs.

Exemple:

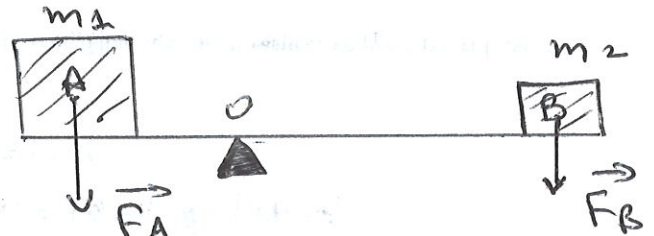
référentiel de Copernic, est un repère lié au soleil dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.

Remarque - si la loi d'inertie est valable dans un repère, elle sera valable aussi dans tout repère  $R'$  en translation uniforme par rapport à ce repère.

- Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d'inertie.
- la vitesse et l'accélération mesurées dans un référentiel galiléen sont dites absolues.

### II-3 - Centre d'inertie ou Barycentre : (Centre de gravité).

en équilibre, la somme des moments des forces par rapport à  $O$  est nulle,



$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_i} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OB} \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{OA} \wedge \vec{g} + m_2 \vec{OB} \wedge \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow (m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB}) \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} = \vec{0}}$$

pour un système quelconque:

$$m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + \dots + m_i \vec{OG}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum m_i \vec{OG}_i = \vec{0}$$

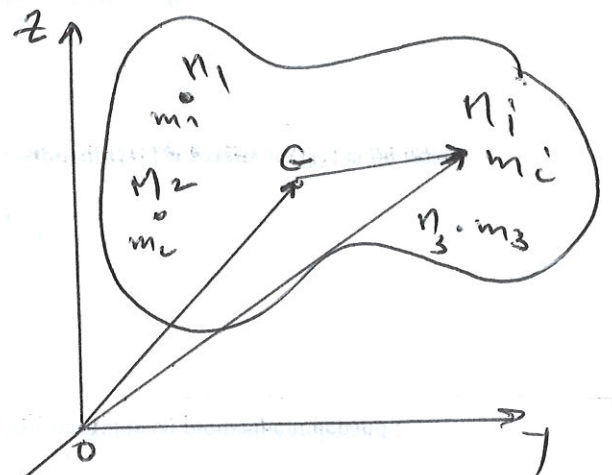
$$\text{d'autre part, } \vec{OG} + \vec{GH}_i = \vec{OH}_i$$

$$\Rightarrow \vec{GH}_i = \vec{OH}_i - \vec{OG}$$

$$\text{Donc } \sum m_i (\vec{OH}_i - \vec{OG}) = \vec{0} \Rightarrow \sum m_i \vec{OH}_i = \sum m_i \vec{OG}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OH}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{OH}_i}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OH}_i}{M}} : M \text{ représente la masse totale du système en équilibre.}$$



pour un milieu continu :

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{n} \iiint_n \vec{ON} \cdot dm}$$

L'intégral est triple car la masse est répartie en volume

### III. Quantité de mouvement,

le vecteur - quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  est défini par,  $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$

$\vec{P}$  a la même direction que  $\vec{v}$ .

le principe d'inertie peut s'énoncer alors de façon suivante :

"une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen."

$$\text{on a : } \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$\Rightarrow$  la dérivée de la quantité de mouvement égale à la résultante des forces extérieures appliquées sur le corps.

### III-2. Conservation de la quantité de mouvement,

un système est dit 'isolé' ou libre s'il ne subit aucune force (interaction) extérieure. Il est, alors, soumis à une force  $\vec{F}$  nulle.

Définition : Toute cause capable de modifier le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée "force".

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{cte.}$$

soit un système isolé à  $n$  particules en interaction :

la quantité de mouvement totale de ce système reste constante à tout instant 't'.

$$\vec{P}_T = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \text{cte.}$$

### Exemple :

Soit un système de deux particules isolées :

A deux instants  $t$  et  $t'$ , les quantités de mouvement  $\vec{P}(t)$  et  $\vec{P}'(t')$  sont égales :

$$\vec{P}(t) = \vec{P}'(t') \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$
$$\Rightarrow \vec{P}_1' - \vec{P}_1 = -(\vec{P}_2' - \vec{P}_2) \Rightarrow \Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = \vec{0}}$$

principe de conservation de la quantité  
de mouvement.

### II. Définition Newtonienne de la force :

Toute cause capable de modifier le vecteur-quantité de mouvement d'un point matériel est appelée "force".

Donc, la force est une notion mathématique qui, par définition, est égale à la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps.

la variation  $\Delta \vec{P}$  est due à l'interaction de la particule avec l'autre ou le système.

Suite à l'exemple précédent :

$$\text{on a : } \Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2 \Rightarrow \frac{\Delta \vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{P}_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

### II.2. Les lois de Newton :

II.2.1<sup>ère</sup> loi : Si  $\vec{F} = \vec{0}$  et  $\vec{v} = \text{cte}$  on obtient la formulation, en l'absence de force, du principe d'inertie.

## IV-2-2 - 1<sup>re</sup> loi fondamentale de la dynamique ou principe

fondamentale de la dynamique (PFD). (2<sup>ème</sup> loi).

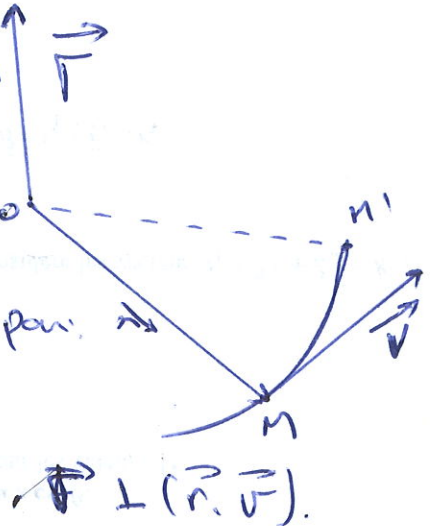
Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement de ce système d'inertie de ce système :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

## Théorème du moment cinétique :

Le moment cinétique du point M se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  et ayant une masse  $m$  par rapport à  $O$  est défini par :

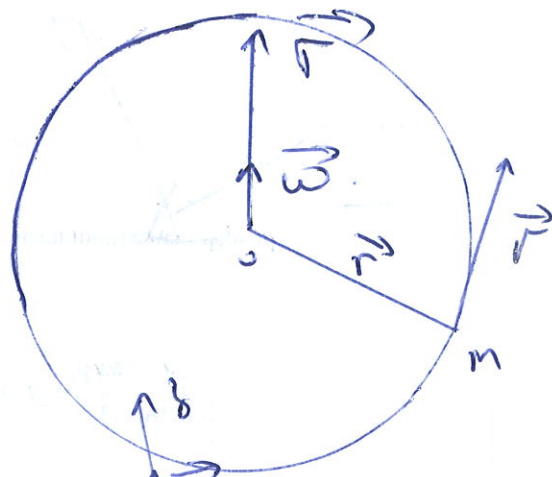
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{O} \vec{M} \wedge m\vec{v} = m \cdot \vec{r} \wedge \vec{v}$$



$$\vec{L} \perp (\vec{r}, \vec{v}).$$

Dans le cas du mouvement circulaire, si  $O$  le centre du cercle, on a  $\vec{r} \perp \vec{v}$  et  $v = r\omega$ .

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = m r^2 \omega}$$

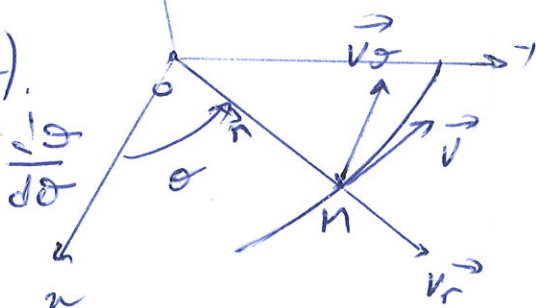


Dans le cas d'un mouvement curviligne plans :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta.$$

$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \vec{u}_r \wedge (v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta) = m r v_\theta \vec{k}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k}}$$



La dérivée de  $\vec{\sigma}$  par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

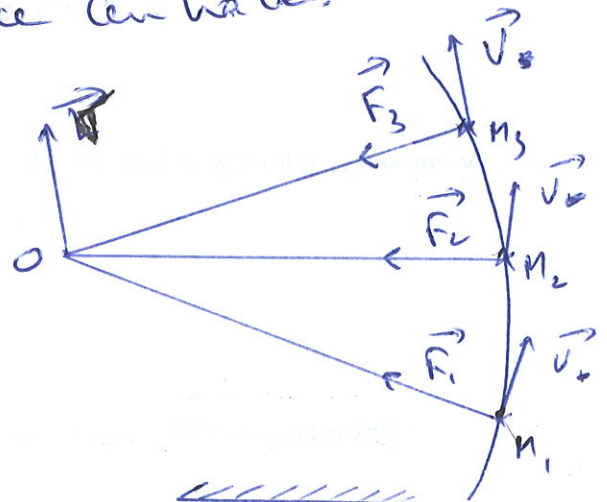
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O^F}$$

Théorème :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force qui lui est appliquée, quand les deux sont mesurés par rapport au même point.

Forces Centrales : une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée force centrale.

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r} = c\vec{\sigma}$$



Exemple : pendule simple :

on applique PFD :  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

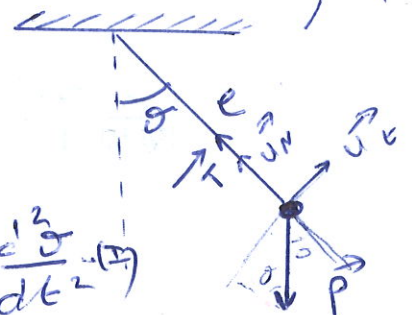
$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

par projection :

$$\begin{cases} u_t : -P \sin \theta = m a_t = m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (I) \\ u_n : T - P \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \quad (II) \end{cases}$$

$$(I) \Rightarrow -mg \sin \theta = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (\sin \theta \approx \theta) \Rightarrow -g\theta = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0}$$

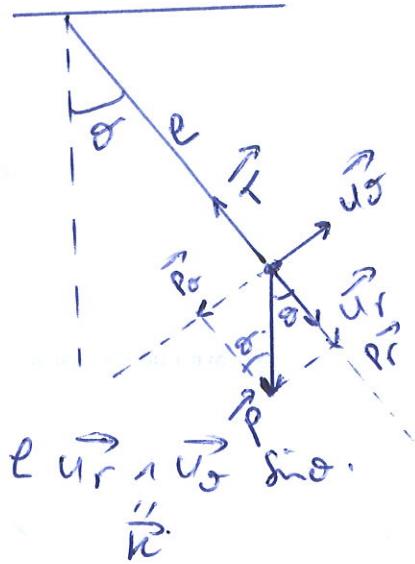


Appliquant la théorie du moment cinétique  
on utilise les coordonnées polaires.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{P} = \vec{P}_r + \vec{P}_\sigma = mg \cos \sigma \vec{u}_r - mg \sin \sigma \vec{u}_\sigma$$

$\vec{P}_\sigma$  : force tangentielle  
tangente au cercle de  $\vec{F}$



$$\vec{P}_\sigma = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = l \vec{u}_r \wedge (-mg \sin \sigma \vec{u}_\sigma) = -mgl \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\sigma \sin \sigma$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d\vec{L}}{dt} = -mgl \sin \sigma \vec{k} \right] \quad \text{--- (I)}$$

d'autre part, pour un mouvement circulaire :

$$\vec{L} = ml^2 \frac{d\sigma}{dt} \vec{k} \Rightarrow \left[ \frac{d\vec{L}}{dt} = ml^2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} \vec{k} \right] \quad \text{--- (II)}$$

$$(I) = (II) \Rightarrow ml^2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -mgl \sin \sigma \Rightarrow l \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g \sin \sigma$$

$$\cos : \sin \sigma \approx \sigma \Rightarrow \left[ \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{g}{l} \sigma = 0 \right] \text{ équation différentielle}$$

de 2<sup>ème</sup> degré qui admet pour solution :

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec : } \omega = \sqrt{g/l}$$

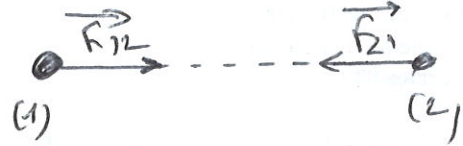
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{l/g}$$

$\sigma_0$  et  $\varphi$  peuvent être calculés à partir des conditions initiales.

#### IV - 2 - 3 - Principe de l'action et de la réaction (principe des réactions réciproques). (3<sup>ème</sup> loi de Newton)

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux; l'action exercée par (1) sur (2)  $\vec{F}_{12}$  est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1)  $\vec{F}_{21}$ ; soit:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|).$$



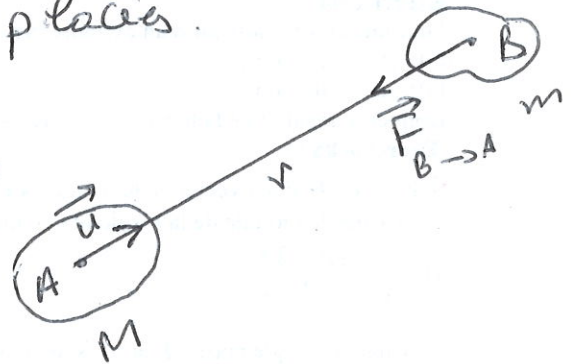
#### V - Quelques lois de forces:

V.1 - Loi de gravitation universelle. Fut énoncée par Newton en 1687 dans le but d'expliquer les mouvements des planètes autour du Soleil.

Soient deux masses  $M$  et  $m$  placées aux points  $A$  et  $B$  de l'espace.

Il existe une force d'attraction  $\vec{F}$  entre ces deux masses donnée par:

$$\boxed{\vec{F}_{B \rightarrow A} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}} \quad \dots (1)$$



$G$ : Constante de gravitation universelle. avec

$$G = 6,67253 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

on peut écrire (1) sous forme:

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\frac{G M m}{r^2} \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = -\frac{G M m}{r^3} \vec{r}.$$

Remarque:  $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$  (3<sup>ème</sup> loi de Newton).

Cas particulier : Le poids d'un objet placé sur la surface de la terre.

$$\vec{F} = - \frac{G M_T m}{R_T^2} \vec{u}$$

$M_T = \text{cte}$   
 $R_T = \text{cte}$   
 $G = \text{cte}$

on pose  $\vec{g} = - \frac{G M_T}{R_T^2} \vec{u}$  on trouve :

$$\boxed{\vec{F} = m \vec{g}} = \vec{P}$$



$\vec{g}$  : est appelé champ de pesanteur de la terre.

$$\vec{g}_0 = - \frac{G M_T}{R_T^2} \text{ au niveau de surface de la terre.}$$

A une altitude  $h$  :  $\vec{F} = - G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u}$

$$|\vec{g}| = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{G M_T}{R_T^2} \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \vec{g}_0 \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2} \text{ en négligeant la vitesse de rotation de la terre sur elle-même } (\omega \approx 0)$$

Si en ~~pas~~  $\omega \neq 0$  : Le poids de  $m$  devient égal à :

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \text{ avec}$$

$\vec{F}$  : force d'attraction.

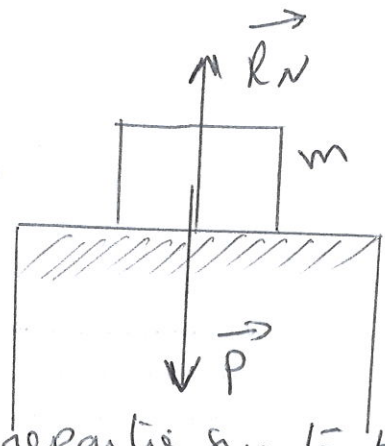
$\vec{F}_e$  : " d'entraînement avec  $\vec{F}_e = m \vec{a}_e = m \omega^2 R \vec{u}$

$\vec{F}_c$  : " de Coriolis avec  $\vec{F}_c = m \vec{a}_c = m$

## V-2 - Forces de contact :

### V-2-1. Reaction de support :

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance de support, s'appelle "Reaction de support".



La réaction de support sur l'objet  $m$  est répartie sur toute la surface de contact "Support - objet".

$\vec{R}_N$  : représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

En équilibre :  $\vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{R}_N$ .

### V-2-2. Forces de frottements :

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent :

- soit lors du mouvement d'un objet.
- soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer.

On distingue deux types de frottement :

- 1/- Frottement visqueux (contact : solide - liquide)
- 2/- " " Solide (contact : solide - solide)

#### V-2-2-1. Frottement visqueux :

Dans ce type de frottement, la force est proportionnelle et opposée à la vitesse.

$$\vec{F} = -K \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \text{ relativement faible}$$



$K$  : constante positive  
avec :  $k = -K \eta$

$K$  : dépend de la forme géométrique du corps

$\eta$  : coefficient de viscosité du fluide, dépend du frottement interne du fluide

pour des vitesses plus grandes, des expériences faits montrent que la force de frottement est donnée par :

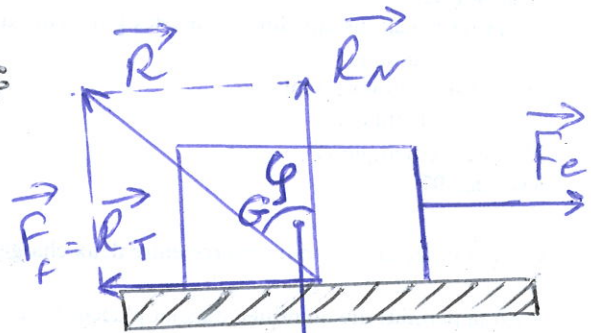
$$\boxed{\vec{F}_f = -k V^n \vec{u}} \quad n \geq 2.$$

### V-2-2-2 - Frottement solides

$\vec{F}_e$  : force d'entraînement.

$\vec{R}_n$  : force de réaction.

$\vec{F}_f = \vec{R}_t$  : force de frottement.



on augmente progressivement la valeur de  $\vec{F}_e$ .  
 chaque fois qu'on augmente  $\vec{F}_e$  la force de frottement  $\vec{F}_f$  augmente jusqu'à l'arriver à une valeur maximale  $\vec{F}_0 = \vec{R}_t$  correspond au début de glissement de l'objet.

cette ~~pos~~ position est appelée "équilibre limite".

Dans ce cas on a  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{0}$   
 par projection sur les axes (Ox) et (Oy) on obtient :

$$\begin{cases} (Ox) : F_e - R_{t0} = 0 \\ (Oy) : -P + R_{n0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{t0} = F_e \\ R_{n0} = P \end{cases}$$

on définit le coefficient de frottement statique

$$\boxed{\mu_s = \tan \varphi_s = \frac{R_{t0}}{R_{n0}}}$$

$\mu_s$  : caractérise l'état d'équilibre limite.

Quand  $\vec{F}_e$  augmente ( $\vec{F}_e > \vec{R}_T$ ), l'objet se met à bouger de  
sans état d'équilibre et on obtient un mouvement uniformément  
accéléré.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

par projection,  $\begin{cases} (Ox) : F_e - R_T = ma \\ (Oy) : P - R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_T = F_e - ma \\ R_N = P = mg \end{cases}$

on définit alors le coefficient de frottement dynamique :

$$\mu_d = \tan \varphi = R_T / R_N = \frac{F_e - ma}{mg}$$

Remarques :

1° -  $\mu$  dépend de la nature de surface de frottement.

2° - On note aussi que  $\mu_d (\mu_s)$  est :

- \* inférieur à  $\mu_s$ .
- \* sensiblement indépendant de la vitesse.
- \* " " " des surfaces de surface en contact et ne dépend que leur nature.

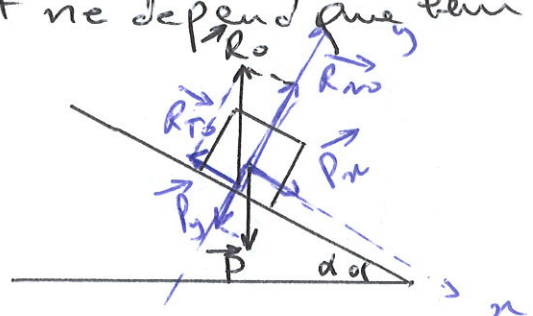
Application : plan incliné

à l'état d'équilibre limite :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

par projection,  $\begin{cases} (Ox) : P_N - R_T = 0 \\ (Oy) : P_T + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \sin \alpha = R_T \dots (1) \\ P \cos \alpha = R_N \dots (2) \end{cases}$

(1) / (2)  $\Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{R_T}{R_N} = \mu_s}$

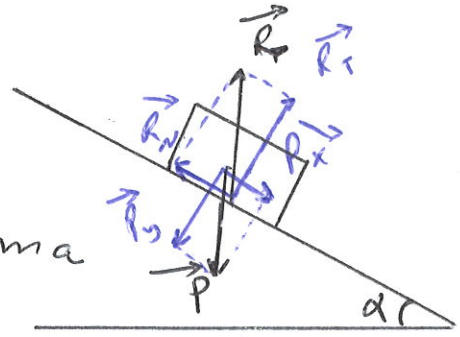


à l'état de mouvement:  $d \rightarrow a = a_s + a_b$ .

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

par projection :

$$\begin{cases} P_N - R_T = ma \\ P_N - R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \sin d - R_T = ma \\ P \cos d - R_N = 0 \end{cases}$$



$$a = a_s + a_b \Rightarrow \begin{cases} P \sin(d_s + d_b) - R_T = ma \\ P \sin d_s - R_{T0} = 0 \end{cases}$$

on a  $\sin(d_s + d_b) \approx \sin d_s \Rightarrow \begin{cases} R_T = P \sin d - ma \\ R_{T0} = P \sin d_s \end{cases}$

on a :

$$R_{T0} > R_T$$

$$\mu_s = \frac{R_T}{R_N} = \frac{g \sin d - a}{g \cos d}$$

V.2.3 - Forces élastiques: proportionnelle et opposée au vecteur position  $\vec{OM}$ .

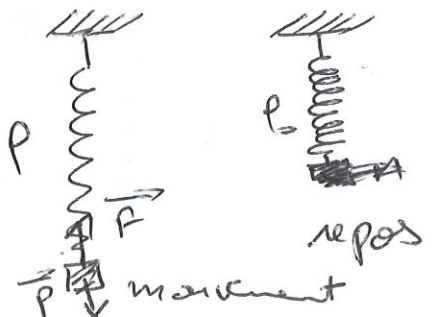
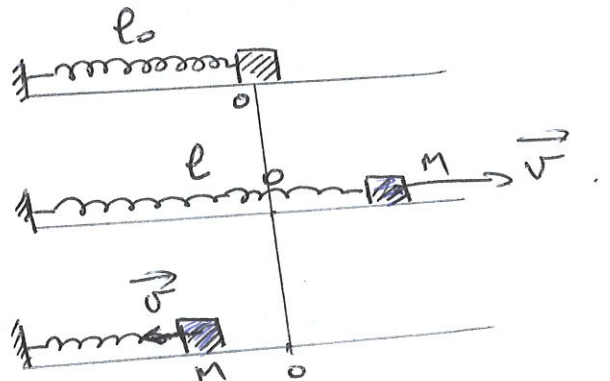
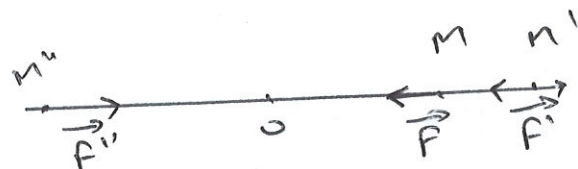
$$\vec{F} = -K\vec{OM}$$

K: constante de raideur. par projection:  $F_n = -Kn \cdot \vec{i}$

Exemple:

$$\vec{F} = -K\vec{OM}$$

$$F_n = -K(l_1 - l_0) \vec{i}$$



# Principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen.

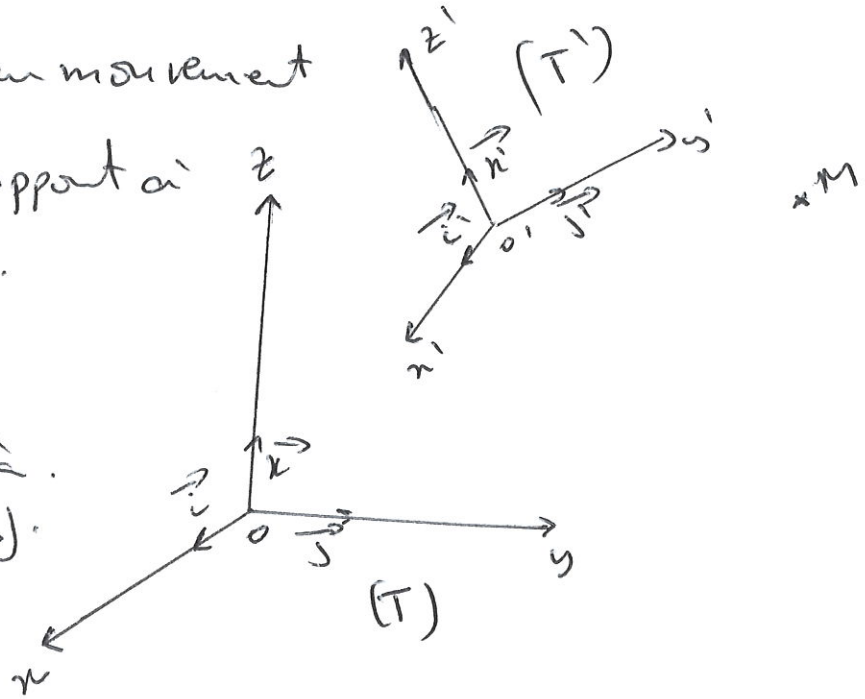
Soit  $(T')$  un repère en mouvement accéléré par rapport à un repère absolu  $(T)$ .

~~$(T')$  : repère galiléen.~~

~~$(T)$  : repère non galiléen.~~  
(absolu).

$(T')$  : non galiléen

$(T)$  : galiléen.



$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c.$$

$$\Rightarrow m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c.$$

$$\boxed{\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c}$$

$\vec{F}$  : la force agit sur le point M (force réelle)

$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$  : force d'inertie d'entraînement.

$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$  : " " de Coriolis.

$$= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}.$$

$\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_c$  sont des forces non réelles, elles dépendent du mouvement de  $(T') / (T)$ .

Cet résultat est applicable sur le mouvement des objets sur la surface terrestre.

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \vec{F}_r = \vec{P}$$

$$\omega \approx \frac{1}{1440} \text{ rad/s}, \quad \vec{F}_e \ll \vec{F}, \quad \vec{F}_c \ll \vec{F}$$

