

Chapitre II.

Cinématique d'un point matériel

Le but d'étudier la cinématique est de décrire de façon qualitative le mouvement d'un objet sans s'intéresser aux causes qui le produisent.

Les questions auxquelles nous allons essayer de répondre sont :

- 1 - où se trouve un objet ?

- 2 - Bouge-t-il ? comment ? rapidement, lentement
va-t-il se déplacer de plus en plus vite ? ou au contraire ? freine-t-il ?

- 3 - où se trouvera-t-il dans quelques minutes ? ...

Cela revient à étudier systématiquement la position, la vitesse et l'accélération d'un objet en mouvement et à définir les relations qui lient ces trois grandeurs.

I.1. Notion de point matériel : est un objet qui a des dimensions négligeables sur l'échelle macroscopique. Son mouvement sera désigné par une translation concernant la vitesse et l'accélération.

En réalité, l'étude de mouvement d'un objet peut être décrite par :

- 1 - l'étude de mot de l'objet autour de son centre de masse.
- 2 - " " " Son centre de masse lui-même.

I-2. Trajectoire, coordonnées curviligne, équation horaire

Soit M un point matériel mobile dans l'espace.

- La trajectoire du pt M est le lieu géométrique des positions successivement occupées par M au cours du temps.
- La valeur algébrique $M_0 M(t)$ est appelée "coordonnée curviligne".

$M_0 M(t) = S(t)$: équation horaire du mouvement.

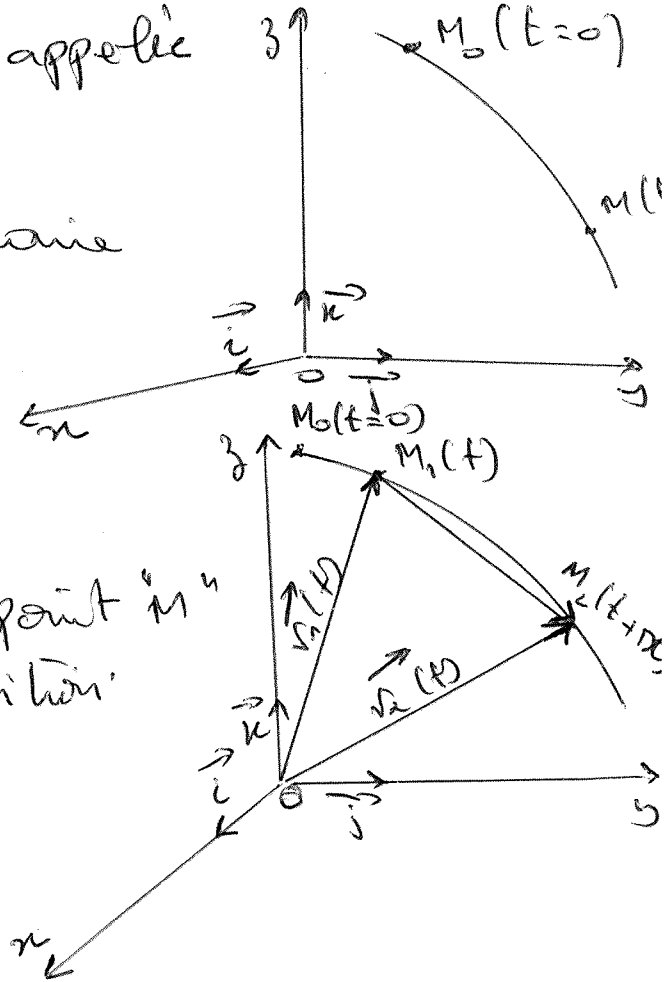
$\vec{OM}_1, \vec{OM}_2$: vecteurs position du pt M / O .

$\vec{M_1 M_2}$: vecteur de déplacement du point M de la position $M_1(t)$ à la position $M_2(t+dt)$.

$$|\vec{M_1 M_2}(t)| = |\vec{OM}_2(t) - \vec{OM}_1(t)| = |\vec{v}(t)|$$

$$S_1(t) = M_0 M_1(t)$$

$$S_2(t) = M_0 M_2(t)$$



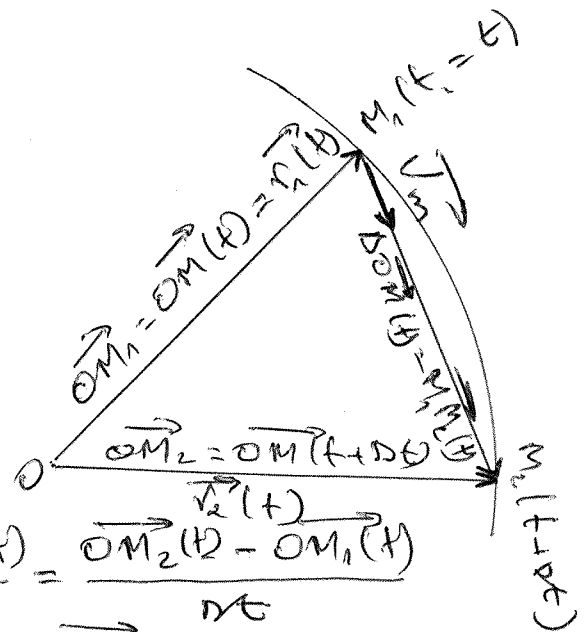
II. Mouvement curviligne

II-1. la vitesse

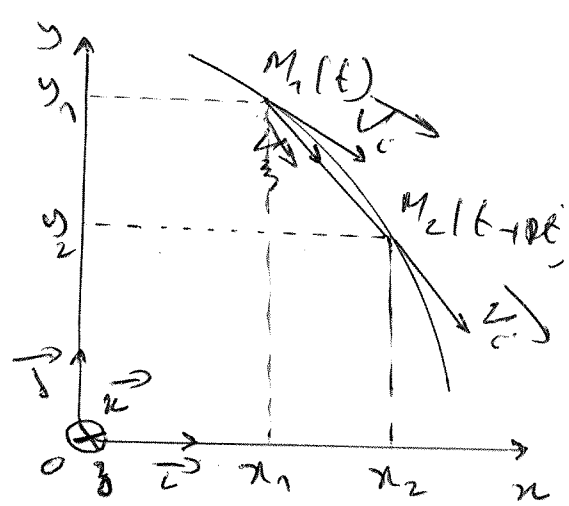
II-1-1. vitesse moyenne

par définition, la vitesse moyenne est donnée par :

$$\vec{V}_{\text{moy}} = \frac{\vec{OM}_2(t) - \vec{OM}_1(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{M_1 M_2}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t)}{\Delta t}$$



$$\vec{V}_{\text{moy}} = \frac{Dx}{Dt} \vec{i} + \frac{Dy}{Dt} \vec{j} + \frac{Dz}{Dt} \vec{k}$$



II-1-2 - Vitesse instantanée :

Elle s'obtient en calculant la vitesse moyenne pour un interval de temps de plus en plus court, c.a.d :

$$\vec{V}_{\text{inst}} = \vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D\vec{OM}(t)}{Dt} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

En coordonnée cartésienne :

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = dx/dt \\ V_y = dy/dt \\ V_z = dz/dt \end{cases}$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

En coordonnée plane :

$$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t) \vec{u}_r$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (r(t) \cdot \vec{u}_r)$$

$$= \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + r(t) \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(t) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta}$$

$$\text{avec : } \vec{u}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} = \vec{u}_\theta$$

$$\text{avec : } V_r = \frac{dr}{dt} : \text{ composante radiale}$$

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt} : \text{ transverse}$$

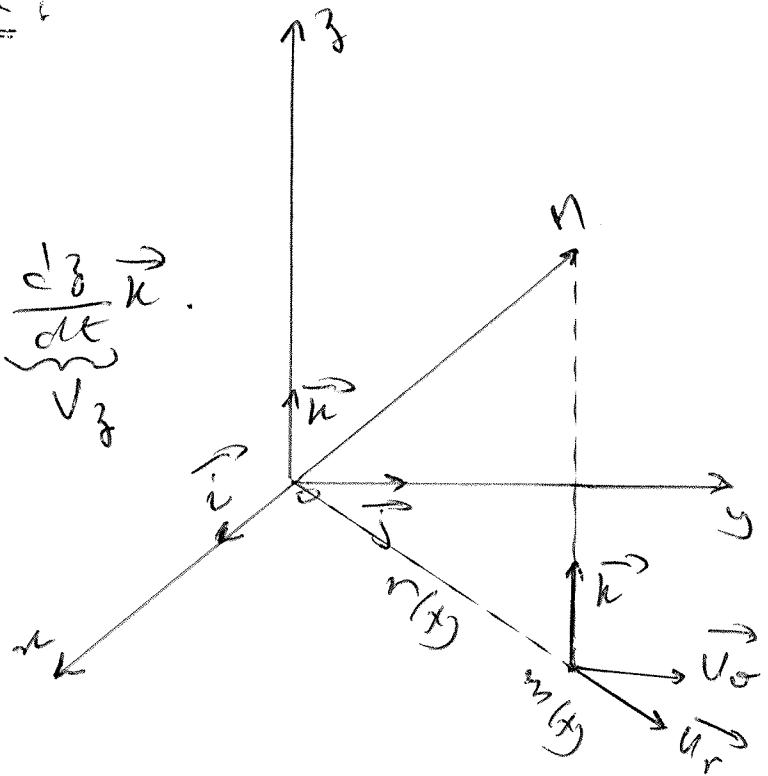
$$\text{et } V = |\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{OM}(t) &= \vec{Om}(t) + m \vec{M}(t) \\ &= r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{k}.\end{aligned}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{V_r} \vec{u}_r + r \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{V_\theta} \vec{u}_\theta + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_z} \vec{k}.$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_z^2}$$



r : rayon polaire $r \rightarrow 0 \rightarrow \infty$
 θ : angle polaire $\theta \rightarrow 0 \rightarrow 2\pi$
 z : cote $z \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty$

Coordonnées intrinsèques de la vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$$

$$= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{M_1 M_2}}{|\vec{M_1 M_2}|} \cdot \frac{|\vec{M_1 M_2}|}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{M_1 M_2}}{|\vec{M_1 M_2}|} \cdot \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{|\vec{M_1 M_2}|}{t_2 - t_1}$$

Quant $t_2 \rightarrow t_1$: $\frac{\vec{M_1 M_2}}{|\vec{M_1 M_2}|} = \vec{U}_t$ / $(\vec{M_1 M_2} = |\vec{M_1 M_2}| \vec{U}_t$

$$\Rightarrow \vec{V} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} \cdot \vec{U}_t = \frac{ds}{dt} \vec{U}_t$$

$$= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt} \vec{U}_t$$

$$\vec{V}(t) = \frac{ds}{dt} \vec{U}_t \text{ , composante tangentielle}$$

normale et unilat

II-2 - Vecteur accélération : c'est la variation de la vitesse au cours du temps.

II-2-1 - Accélération moyenne

$\vec{V}_1, \vec{V}_2$: vitesse ~~moyenne~~ instantanée de M.

par définition, l'accélération moyenne est donnée

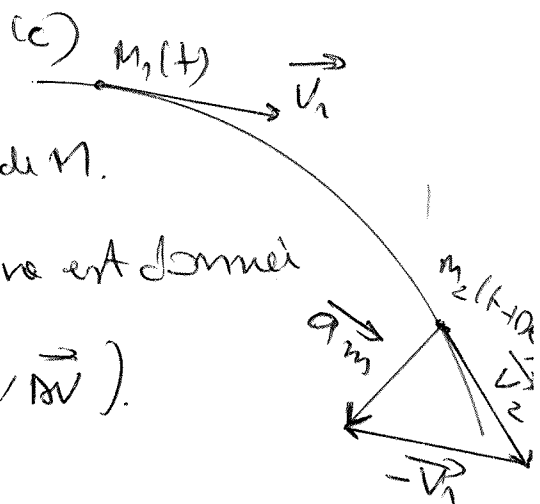
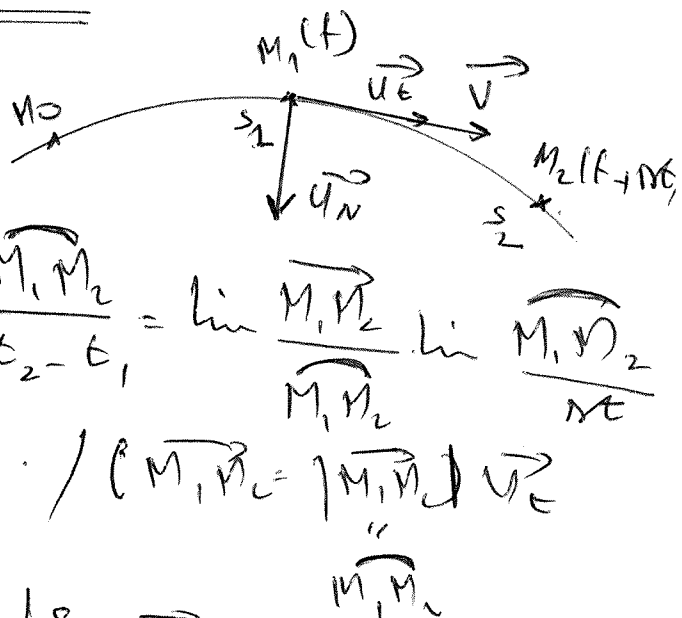
$$\text{par : } \vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} \text{ , } (\vec{a}_{\text{moy}} \parallel \Delta \vec{V})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t} \vec{k}$$

II-2-2 - Accélération instantanée

$$\vec{a}_i = \vec{a} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \vec{a}_{\text{moy}} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}}$$



En coordonnées cartésiennes:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

En coordonnées cylindriques:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right].$$

$$= \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]}_{a_r} \vec{u}_r + \underbrace{\left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]}_{a_\theta} \vec{u}_\theta + \underbrace{\frac{d^2z}{dt^2}}_{a_z} \vec{k}.$$

Coordonnées intrinsèques de l'accélération:

on a $\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt}.$$

on a: $\frac{d\vec{u}_t}{dt} \perp \vec{u}_t \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{dt} \vec{u}_n \quad (|\vec{u}_t|=1)$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt} \vec{u}_n.$$

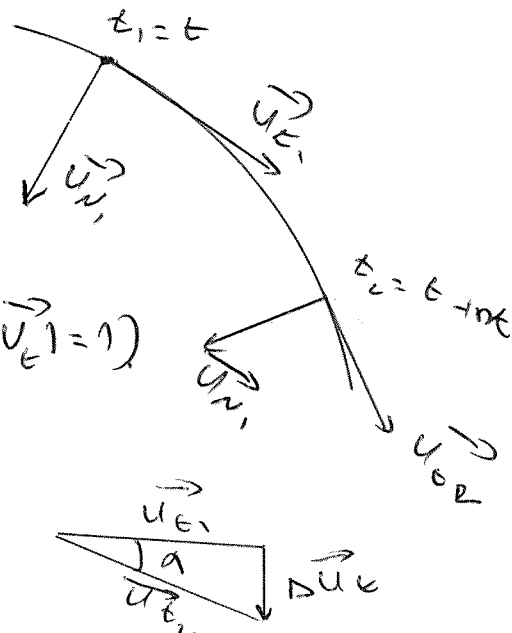
$$|\vec{u}_{t1}| = |\vec{u}_{t2}| = 1.$$

$$\Delta \vec{u}_t = \vec{u}_{t1} - \vec{u}_{t2} ; t_2 \rightarrow t_1 \Rightarrow \Delta \vec{u}_t \rightarrow d\vec{u}_t ; d\vec{u}_t = \vec{u}_n da ; |\vec{u}_t| = 1$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_t = da \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{da}{dt}.$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{da}{dt} \vec{u}_n = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{da}{ds} \frac{ds}{dt} \vec{u}_n$$

on a: $\frac{ds}{da} = \rho$: rayon de trajectoire.



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{u}_n}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{1}{\rho} v^2 \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = \begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \text{composante tangentielle liée} \\ \text{au changement de module de } v \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{v^2}{\rho} = \text{composante normale liée} \\ \text{au changement de la direction de } v. \end{cases}$$

Remarque: par les coordonnées cylindriques de l'accélération (coordonnées polaires pour $z=0$) on a:

$\frac{d^2 r}{dt^2}$: accélération radiale provenant du changement dans le temps de la vitesse radiale.

$r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$: "Accélération centrifuge": Dans le cas d'une particule en mouvement circulaire uniforme, la coordonnée "r" est constante et θ augmente linéairement avec le temps, $\theta(t) = \omega t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega$, $\frac{dr}{dt} = 0$ et on trouve la relation:

$$\boxed{\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_r}$$

$r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$: la contribution à l'accélération provenant de la variation dans le temps de la vitesse angulaire.

$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$: Accélération coriolis, ~~attribuable~~ attribuable à la variation de r lorsque la $\omega \neq 0$

II - 3 - passage de la vitesse à l'espace par connue,

calcul d'intégral

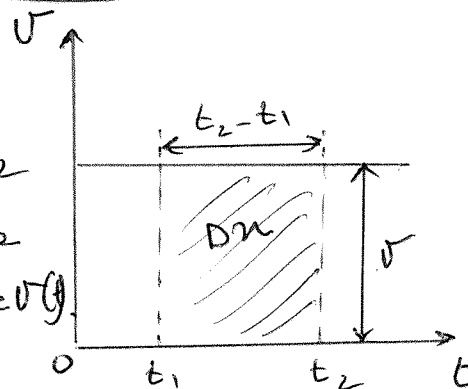
Considérons un mobile se déplaçant à une vitesse constante. Nous pourrions dire que la vitesse moyenne dans ce cas se confond avec la vitesse instantanée.

$$V_{\text{moy}} = V_i = \frac{DN}{dt} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

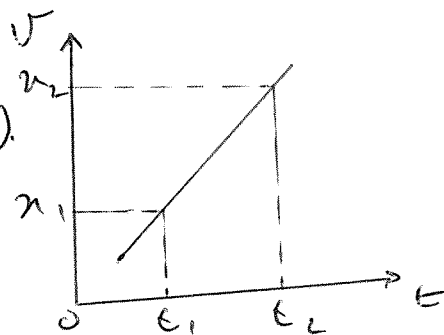
Connaissant la vitesse v et la position x_1 à l'instant t_1 , il est alors possible de calculer la position x_2 à n'importe quel instant t_2 .

Le graphique $v(t)$ étant une droite
parallèle à l'axe des temps.

La distance parcourue DN entre t_1 et t_2 est mesurée par l'aire hachurée de la figure ci-contre ou l'aire sous la courbe $v(t)$.



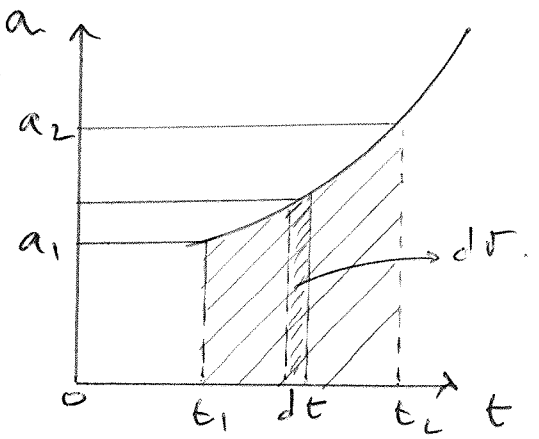
- Lorsque la vitesse n'est pas constant
on est toujours l'aire sous la courbe $v(t)$
des vitesses.



II - 4 - passage de l'accélération à la vitesse,

Si le mouvement est défini par la donnée de son accélération au cours du temps, l'accélération est la dérivée de la vitesse (la vitesse sera l'intégrale de l'accélération).

L'accroissement de la vitesse est mesurée par l'aire sous la courbe $a(t)$.



$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = a \cdot dt$$

$$dV = V_2 - V_1, \quad \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt$$

Si on connaît la vitesse V_1 à l'instant t_1 , il est possible de connaître V_2 à n'importe quel instant t_2 .

$$V_2 = V_1 + \int_{t_1}^{t_2} a \cdot dt$$

Exemple: un objet se déplace sur une droite orientée.

avec une vitesse qui obéit à la loi $a = 4 - t^2$ (m/s²).

- Trouver l'expression, en fonction du temps, de la vitesse et de la position.

on donne: $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} V = 2 \text{ m/s} \\ x = 9 \text{ m} \end{cases}$

- Représenter à $t = 1 \text{ s}$, les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{a}$.

Solution:

$$1 - V = \int a \cdot dt = \int (4 - t^2) \cdot dt = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$t = 3 \text{ s} \Rightarrow V = 2 \Rightarrow 2 = 4(3) - \frac{(3)^3}{3} + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 4t - \frac{t^3}{3} - 1}$$

$$x = \int V \cdot dt = \int \left(4t - \frac{t^3}{3} - 1\right) \cdot dt = \frac{4t^2}{2} - \frac{t^4}{12} - t + C'$$

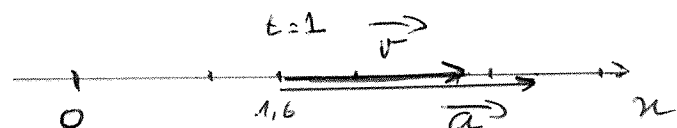
$$\text{à } t = 3 \text{ s} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow \text{on trouve } C' = 3/4$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{t^4}{12} - 2t^2 - t + 3/4}$$

$$2 - t = 1 \text{ s} \Rightarrow x = 1,6 \text{ m}, V = 2,6 \text{ m/s}, a = 3 \text{ m/s}^2$$

L'échelle: $V: 1 \text{ cm} \rightarrow 2 \text{ m/s}$

$a: 1 \text{ cm} \rightarrow 1,5 \text{ m/s}^2$



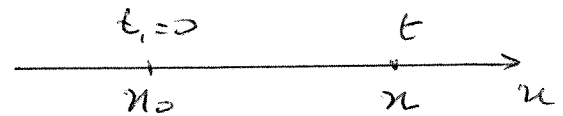
III - quelques mouvements particuliers

III-1. Mouvement rectiligne.

Dans les mouvements rectilignes, les trajectoires sont des droites et la position du mobile est décrite par une seule coordonnée $x(t)$ équivalente au chemin parcouru $S(t)$.

III-1-1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU).

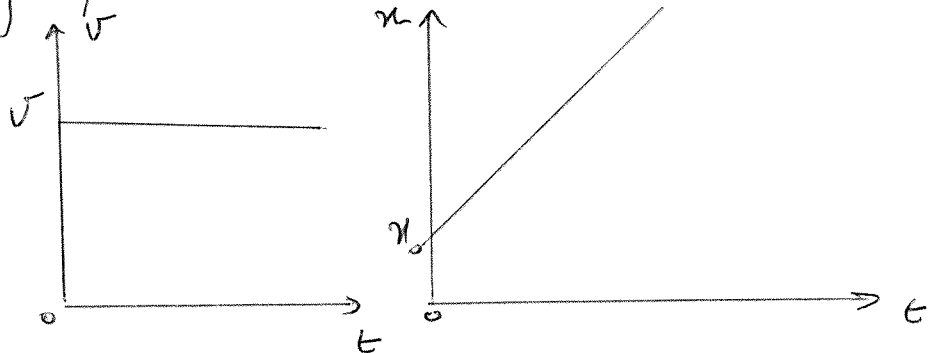
Caractérisé par $v(t) = dv = v$.



$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx(t) = v \cdot dt = \int dx(t) = \int v \cdot dt$$

$$\Rightarrow x(t) = v \cdot t + C \quad / \quad t=0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow$$

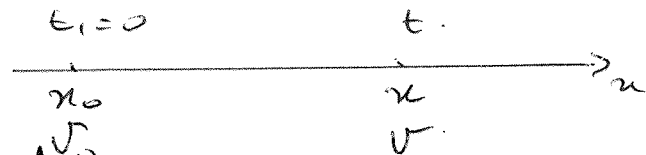
$x(t) = v \cdot t + x_0$ équation horaire du MRU.



III-1-2. Mouvement rectiligne uniformément varié, MRUV.

Caractérisé par une accélération constante $a(t) = dv = a$.

$$a = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a \cdot dt$$



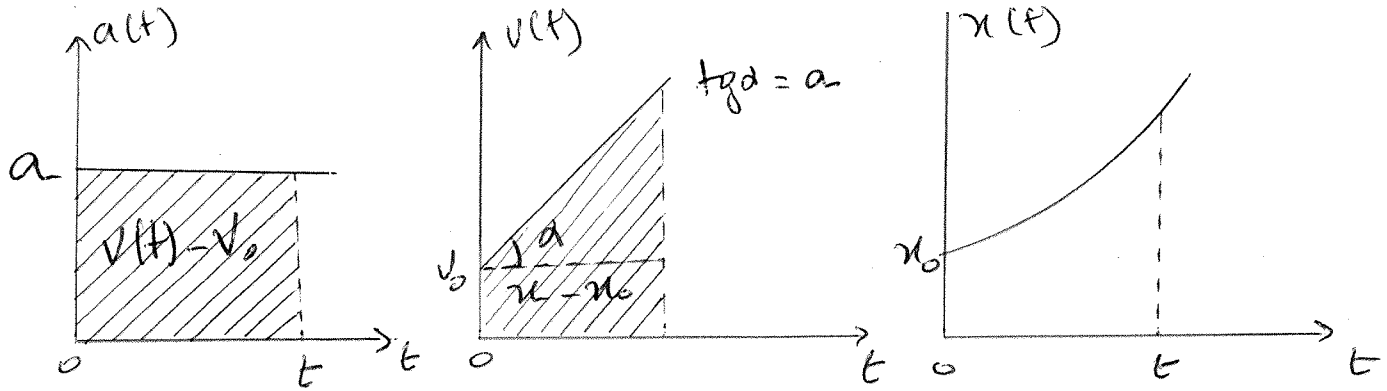
$$\int dv(t) = \int a \cdot dt \Rightarrow v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$t=0 \Rightarrow v = v_0 \Rightarrow v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$x = \int v(t) dt = \int (at + v_0) dt = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + C$$

$$t=0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

équation horaire d'un MRUV.



Remarque:

L'accélération ou la décélération d'un mouvement uniformément varié est décrite par le signe du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$.

1. $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$: * $V > 0, a > 0$: MRU accélère dans le sens positif du mouvement.

* $V < 0, a < 0$: MRU accélère dans le sens négatif (opposé).

2. $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: mouvement rectiligne uniformément décéléré

III-2-Mouvement Circulaire:

Caractérisé par une trajectoire circulaire d'un rayon constant : $r(t) = ct = \rho = R$.

en utilisant les coordonnées polaires :

$$r(t) = R \vec{u}_r \quad (R = ct)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} R \vec{u}_r = R \frac{d}{dt} \vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_\sigma}$$

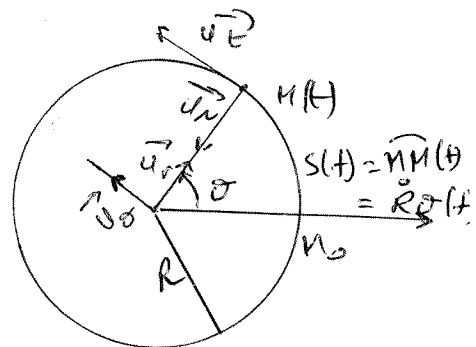
ou
$$\vec{v} = \frac{ds(t)}{dt} \vec{u}_t = R \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_t$$

$\omega = \frac{d\sigma}{dt}$: vitesse angulaire avec $[\omega] = \text{rad/s}$.

Donc :
$$\vec{v}(t) = R \omega \vec{u}_t$$

$$= R \omega \vec{u}_\sigma$$

et $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ avec
$$\begin{cases} a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = R \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} \\ a_n = \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{R} \left(R \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = R \omega^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_t + R \omega^2 \vec{u}_n}$$

en coordonnées polaires,

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \Rightarrow \begin{cases} a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -R \omega^2 \\ a_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (r = R)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R \omega^2 \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta}$$

$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$: accélération angulaire.

III-2-1 - Mouvement circulaire uniforme, M.C.U.

Caractérisé par une vitesse constante.

$$v = ct \Rightarrow R \omega(t) = ct \Rightarrow \omega(t) = ct.$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_t = R \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ a_n = R \omega^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{cases} a_r = -R \omega^2 \\ a_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\omega = ct \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \Rightarrow d\theta(t) = \int \omega dt$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \omega t + c, \quad t=0 \Rightarrow \theta = \theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \omega t + \theta_0}$$

équation horaire d'un M.C.U.

III-2-2 - Mouvement circulaire uniformément varié,

Caractérisé par une accélération tangentielle constante

$$a_t = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = ct = R \frac{d\omega}{dt}, \quad t=0, \quad \omega = \omega_0, \quad \theta = \theta_0$$

$$a = \begin{cases} a_t = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = ct \\ a_n = R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = R \omega^2 \end{cases}; \quad \vec{a} = \begin{cases} a_r = -R \omega^2 \\ a_\theta = R \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ct \Rightarrow d\omega = \alpha dt \Rightarrow \boxed{\omega = \alpha t + \omega_0}$$

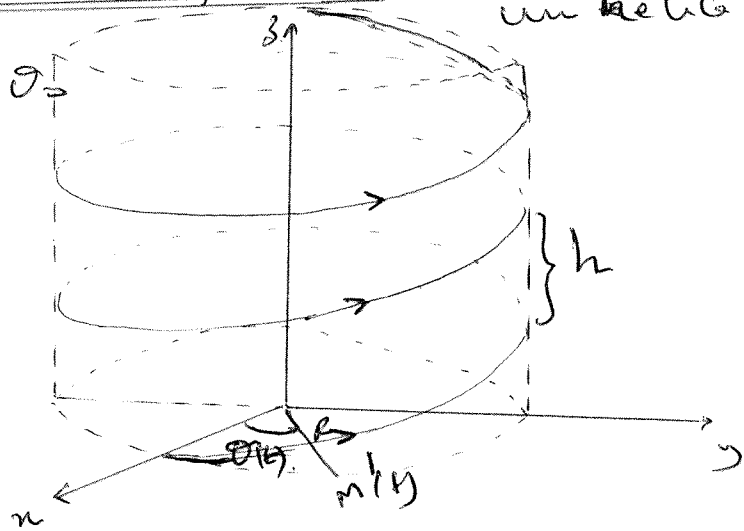
$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \omega(t) \Rightarrow \sigma(t) = \int \omega(t) dt = \int (\omega_0 + \omega_1) dt$$

$$\Rightarrow \left\{ \sigma(t) = \frac{1}{2} \omega_1 t^2 + \omega_0 t + \sigma_0 \right\}$$

III-3 - Mouvement hélicoïdal uniforme: trajectoire est un hélico

$$\begin{aligned} r(t) &= R = \text{cte} \quad , \quad \sigma(t) = \omega t + \sigma_0 \\ v(t) &= R\omega = \text{cte} \\ M(t) \begin{cases} x(t) = R \cos \sigma(t) \\ y(t) = R \sin \sigma(t) \\ z(t) = \frac{h}{2\pi} \sigma(t) \end{cases} \end{aligned}$$

$\left(\begin{matrix} h \rightarrow 2\pi \\ z(t) \rightarrow \sigma(t) \end{matrix} \right)$



$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_\sigma + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ &= 0 \cdot \vec{u}_r + R \frac{d\sigma}{dt} \vec{u}_\sigma + \frac{dz}{dt} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{v(t) = R \omega \vec{u}_\sigma + \frac{h}{2\pi} \omega \vec{k}}$$

$$\omega = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv(t)}{dt} = R \omega \frac{d\vec{u}_\sigma}{dt} = -R \omega^2 \vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{a} = -R \omega^2 \vec{u}_r}$$

III-4 - Mouvement harmonique (rectiligne sinusoïdal):

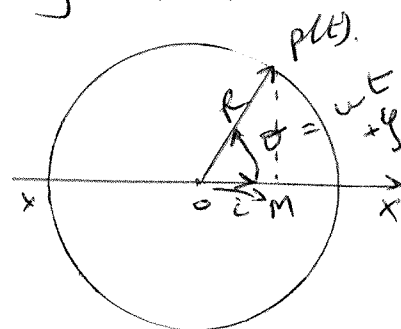
on peut le considérer comme la projection sur un diamètre du mouvement circulaire uniforme d'un pt "P" de la vitesse angulaire ω sur un cercle de rayon R.

Soit M la projection de P sur l'axe $x'Ox$.

le mouvement harmonique de M est de fréquence

donc par $\vec{OM} = x \vec{i}$

$$\text{avec } OM = x = R \cos(\omega t + \varphi)$$



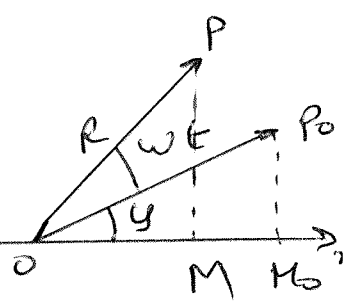
avec : $\omega t + \varphi$: la phase du mouvement
 φ : la phase initiale ou phase à l'origine du temps.

L'abscisse de M varie entre $x = -R$ et $x = R$ et est appelée amplitude du mouvement.

le mouvement se reproduit identique à lui-même chaque fois que l'angle ωt augmente de 2π :

d'où la période du mouvement : $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

ω est appelée pulsation, ou fréquence angulaire :



Fréquence f : nombre d'oscillation complets par unité de temps, liée à la période, comme pour le mouvement circulaire par, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

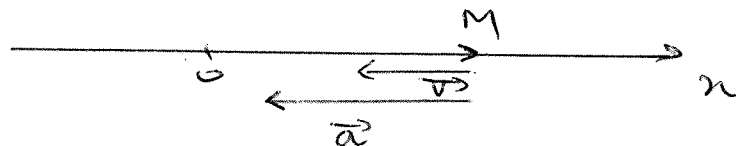
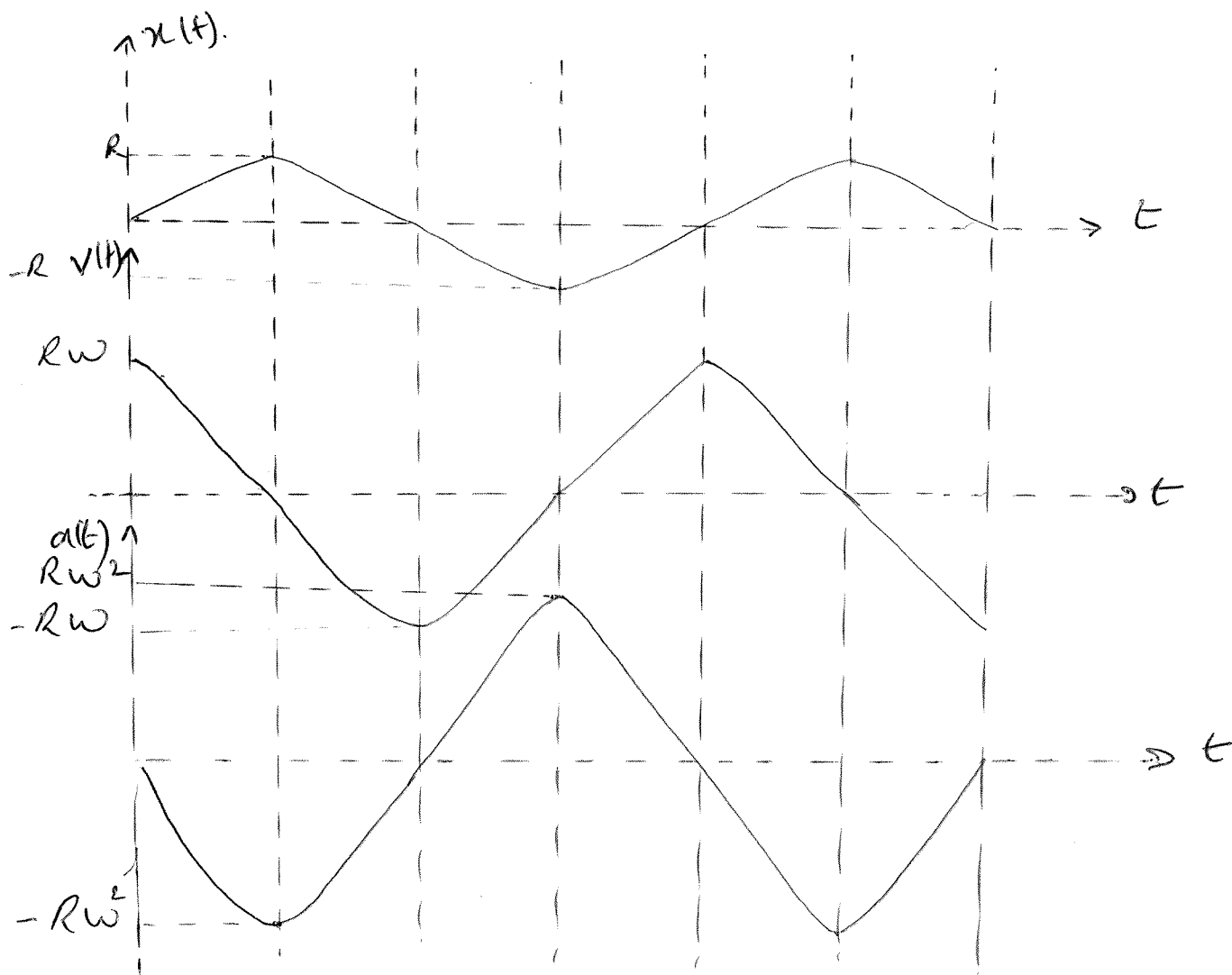
$$V = V_x \vec{i} ; V_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin(\omega t + \varphi) = R\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{à } x = 0 \Rightarrow A \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = \pm 1 \Rightarrow V = V_{\max} = \pm R\omega$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} = \frac{d}{dt} (-R\omega \sin(\omega t + \varphi)) \cdot \vec{i} \\ = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \vec{i} = -\omega^2 x \vec{i}$$

Ce qui indique que dans un mouvement sinusoïdal, le vecteur accélération est toujours proportionnel et opposé au vecteur position : $\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM} = -\omega^2 \vec{r}$.



IV-4- Mouvement relatif,

Dans la physique relative, le repos, comme le mouvement, sont des notions relatives; ils dépendent de la situation du mobile par rapport au corps qui sert de référence (repère). La position, la vitesse ou l'accélération d'un même mobile ne sont pas les mêmes par rapport à deux repères différents.

Changement de repère:
soit un point mobile "M"
et deux systèmes d'axes de coordonnées servant de repères.

$(Oxyz)$: (repère R) défini par les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère supposé fixe), appelé repère absolu

$(O'n'y'z')$: (repère R') défini par $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ des vecteurs unitaires (repère supposé mobile), appelé repère relatif.

On a: $\vec{OM}(t)/R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

$$\vec{O'M}(t)/R' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'.$$

pour un observateur lié au repère R , le mouvement de $R'(O'n'y'z')$ est connu par l'intermédiaire du mouvement de O' par rapport à O et de façon dont les axes ox' , oy' et oz' tournent autour de O' .

Relation entre les positions,

$$\text{On a } \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Relations entre les vitesses,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \frac{dx_0}{dt}\vec{i} + \frac{dy_0}{dt}\vec{j} + \frac{dz_0}{dt}\vec{k} + \frac{dx'}{dt}\vec{i} + \frac{dy'}{dt}\vec{j} + \frac{dz'}{dt}\vec{k} + x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{V}_a : \text{vitesse absolue}$$

$$\frac{dx'}{dt}\vec{i} + \frac{dy'}{dt}\vec{j} + \frac{dz'}{dt}\vec{k} = \vec{V}_r : \text{vitesse relative.}$$

$$x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{V}_e : \text{vitesse d'entraînement}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}$$

Si le repère R' est en translation par rapport à R :

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{cste} \Rightarrow \vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

Relation entre les accélérations

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{d^2x_0}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_0}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z_0}{dt^2}\vec{k} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \vec{a}_a : \text{accélération absolue.}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k} = \vec{a}_r : \text{accélération relative.}$$

$$x' \frac{d\vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d\vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d\vec{k}}{dt^2} + \frac{d\vec{00'}}{dt^2} = \vec{a}_e : \text{accélération d'en trainement.}$$

$$2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right] = \vec{a}_c : \text{accélération de Coriolis.}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

on accepte que : $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$ $\frac{d\vec{i}}{dt} \perp \vec{i}$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_e &= \frac{d\vec{00'}}{dt} + x' \vec{\omega} \wedge \vec{i} + y' \vec{\omega} \wedge \vec{j} + z' \vec{\omega} \wedge \vec{k} \\ &= \frac{d\vec{00'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) = \frac{d\vec{00'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \end{aligned}$$

et : $\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \frac{d\vec{00'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}}$ ω : vitesse angulaire.

$$\vec{a}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{k} \right]$$

$$= 2 \omega \wedge \left[\frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right]$$

$$= 2 \omega \wedge \vec{V}_r$$

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r}$$

pour $\vec{a}_e$,

$$\begin{aligned} \text{on a } \frac{d\vec{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) = \frac{d\omega}{dt} \wedge \vec{i} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) \end{aligned}$$

de même on trouve :

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{00'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{\tau}_a = \vec{\tau}_e + \vec{\tau}_c$$

$$\vec{\tau}_r \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} = -\omega^2 r_0 (\omega_{ut} + \mu_{ut}) \vec{e}$$

$$\vec{\tau}_e = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{n} = \omega \vec{e}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_e = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{p}) = -\omega^2 r_0 (\omega_{ut} + \mu_{ut}) \vec{e}$$

$$\vec{\tau}_c = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2 \omega^2 r_0 (\omega_{ut} + \mu_{ut}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_a = -2 \omega^2 r_0 \left((\omega_{ut} + \mu_{ut}) \vec{e} + (\mu_{ut} - \omega_{ut}) \vec{j} \right)$$

$$\Rightarrow \tau_a = 2 \omega^2 r_0 \sqrt{2}$$

Exercice:

Soit les points $A(1, 3, -2)$; $B(2, 2, 2)$; $C(-1, 2, 1)$.

a°- * Ecrire $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et trouver l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$

* Calculer la résultante $\vec{R} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

* Déterminer les angles $\alpha(\vec{R}, \vec{Ox})$, $\beta(\vec{R}, \vec{Oy})$, $\gamma(\vec{R}, \vec{Oz})$
puis calculer le terme $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$.

b°- Calculer la surface du triangle ABC.

c°- Déterminer un vecteur unitaire $\vec{u}$ normal au plan contenant $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Solution:

a°- * $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$
 $|\vec{AC}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-2 + 1 + 12}{\sqrt{18} \sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{252}} = \sqrt{0,48} \Rightarrow \alpha \approx 46,1^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}; \quad \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 11\vec{j} - 3\vec{k}$$
$$= \frac{\sqrt{1+121+9}}{\sqrt{18} \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{131}{252}} \approx 0,52$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 46,1^\circ$$

* $\vec{R} = \vec{AB} + \vec{AC} = (1-2)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (4+3)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$

* $\alpha(\vec{R}, \vec{Ox}) = \alpha(\vec{R}, \vec{i})$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{R} \cdot \vec{i}}{|\vec{R}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{-1}{\sqrt{1+4+49}} = \frac{-1}{\sqrt{54}} \left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{|\vec{R} \wedge \vec{i}|}{|\vec{R}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{54}} \\ \text{avec } \vec{R} \wedge \vec{i} = 7\vec{j} + 2\vec{k} \end{array} \right\} \alpha \approx 98,6^\circ$$

* $\beta(\vec{R}, \vec{Oy}) = \beta(\vec{R}, \vec{j})$

$$\cos \beta = \frac{\vec{R} \cdot \vec{j}}{|\vec{R}| |\vec{j}|} = \frac{-2}{\sqrt{54}}$$

$$\sin \beta = \frac{|\vec{R} \wedge \vec{j}|}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{54}}$$

$$\text{avec: } \vec{R} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{k}(-1) = -4\vec{i} - \vec{k}$$

$$|\vec{R} \wedge \vec{j}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$$\Rightarrow \beta = .$$

$$\star \underline{\gamma(\vec{R}, \vec{0z}) = \gamma(\vec{R}, \vec{k})} \quad \left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\vec{R} \cdot \vec{k}}{|\vec{R}| |\vec{k}|} = \frac{7}{\sqrt{54}} \\ \sin \gamma &= \frac{|\vec{R} \wedge \vec{k}|}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{54}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = .$$

$$\text{avec: } \vec{R} \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +2\vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{on a } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{1}{54} + \frac{4}{54} + \frac{49}{54} = \frac{54}{54} = 1$$

$$b/- \text{ La surface de ABC} = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{131}}{2}$$

$$c/- \vec{u} \perp (\vec{AB}, \vec{AC}) \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{AB} \wedge \vec{AC} \text{ et } |\vec{u}| = 1$$

$$\text{soit } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{on a } \begin{cases} \vec{u} \parallel \vec{AB} \wedge \vec{AC} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{i} - 11\vec{j} - 3\vec{k} = \sqrt{131} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{131} x = 1 \\ \sqrt{131} y = -11 \\ \sqrt{131} z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{131}} \\ y = -\frac{11}{\sqrt{131}} \\ z = -\frac{3}{\sqrt{131}} \end{cases}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{131} + \frac{121}{131} + \frac{9}{131}} = \sqrt{\frac{131}{131}} = 1$$

Dans un repère fixe $(Ox \ y)$, un axe (Ox') tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\omega = d\theta/dt = \text{cte}$.
 un mobile "M" ($\vec{OM} = \vec{r}$) circule sur l'axe (Ox') selon la loi $r = r_0 (\cos \omega t + \sin \omega t)$, $r_0 = \text{cte}$.

Trouver dans le repère mobile à l'instant t en fonction de r_0 et ω :

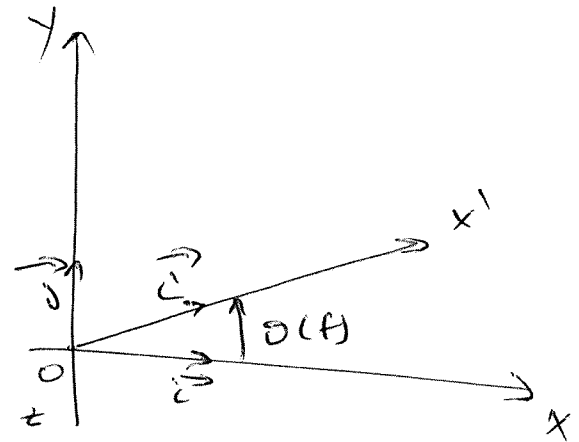
- 1°/ la vitesse absolue de "M"
- 2°/ le module et la direction de la vitesse absolue
- 3°/ l'accélération absolue et son module

Solr:

Dans le repère mobile on a:

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

O coïncide avec O'.



$$\vec{OM} = r_0 (\cos \omega t + \sin \omega t) \vec{e}'$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt} = r_0 \omega (-\sin \omega t + \cos \omega t) \vec{e}'$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{O'O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}, \quad (\vec{\omega} = \omega \vec{k})$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e}' & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0 (\cos \omega t + \sin \omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = +\omega r_0 (\cos \omega t + \sin \omega t) \vec{j}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = r_0 \omega ((-\sin \omega t + \cos \omega t) \vec{e}' + (\cos \omega t + \sin \omega t) \vec{j})$$

$$V_a = r_0 \omega \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t - 2 \sin \omega t \cos \omega t + \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t + 2 \sin \omega t \cos \omega t}$$

$$\boxed{V_a = r_0 \omega \sqrt{2}}$$