Chapitre I - Rappels Mathématiques

I.1. Généralités sur les grandeurs Physique :

- Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui rapporte une propriété physique.
- Une grandeur physique est dite mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de même espèce, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique « a »
- Le nombre qui mesure cette grandeur est le rapport de cette grandeur [A] à la grandeur de même espèce choisie comme unité $\{A\}$: $a = \frac{[A]}{\{A\}}$
- Il existe deux types de grandeurs mesurables :
  - **Grandeurs Scalaires** : Longueur, Masse, Temps, …….
  - **Grandeurs vectorielles** : Vitesse, Accélération, …………

Remarque : mesurer une grandeur ; c'est la comparer à une quantité de référence de même nature prise comme unité.

I.2. Système international d'unité : D'une manière générale, on admet un système composé des unités fondamentales suivantes (appelé système SI):

- Le Mètre ; unité de longueur (m).
- Le Kilogramme ; unité de masse (Kg).
- La Seconde ; unité de temps (s).
- L'Ampère ; unité de l'intensité de courant électrique (A).
- Le Degré Kelvin ; unité de la température (°K).
- La Candéla ; unité de l'intensité lumineuse (Cd).
- Le Mole ; unité de la quantité de matière (Mol)

Les quartes premières unités forment le système international MKSA.

I.3. Grandeurs dérivées :

Ces grandeurs s'expriment comme une combinaison des grandeurs fondamentales (multiplication, division), comme par exemple :

La surface (m^2), la vitèsse ($m.s^{-1}$), la force (Newton= $Kg.m.s^{-2}$)……

I.4. Equation aux dimensions :

On peut déterminer les unités dérivées en fonction des unités fondamentales (Longueur, Masse et temps) par une relation mathématiques, appelée « Equation aux dimensions », qui s'écrit sous forme :

$$[A] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \text{ sont des réels}$$

Cette équation consiste l'équation aux dimensions d'une grandeur quelconque A, avec :

M : Masse

L : Longueur

T : Temps

Exemple :

- La vitesse : $[V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \left(ms^{-1}\right)$
- L'accélération : $[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-1} \left(ms^{-2}\right)$
- La force : $[F] = M.V = MLT^{-2}$
- Le travail : $[W] = F.L = ML^2T^{-2}$

Remarque : les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules physique.

Exemple :

La période d'oscillation d'un pendule simple de longueur L est-il donné par :

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ ou \;\; par \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases} \quad ?$$

- $(I) \Rightarrow T = 2\pi g^{1/2} L^{-1/2}$ l'équation aux dimensions s'écrit par

  $[T] = \left(\left(LT\right)^{-2}\right)^{1/2} L^{-1/2} = T^{-1} \Rightarrow [T] = T^{-1}$ *Fausse*

- $(II) \Rightarrow T = 2\pi L^{1/2} g^{1/2}$ l'équation aux dimensions s'écrit par

  $[T] = L^{1/2}\left(\left(LT\right)^{-2}\right)^{-1/2} = T \Rightarrow [T] = T$ *Juste*

I.2. Calcul d'erreur :

Pour toute grandeur mesurable A, il est possible de définir :

1- Sa valeur mesurée « a_0 »

2- Sa valeur exacte « a » qu'on ne peut pas l'atteindre.

✓ **Erreur absolue** : se définit alors par $\delta a = a - a_0$

δa est la résultante de plusieurs erreurs (Systématiques, accidentelles,….)

✓ **Incertitude absolue** : c'est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue (δa n'étant pas connue) ; $\Delta a \leq |\delta a|$, $(\Delta a > 0)$

✓ **Incertitude relative** : définit par $\dfrac{\Delta a}{a}$

I.2.2. Méthode de calculs d'erreurs:

Soit une grandeur $g = f(x, y, z)$

Sa différentielle est donnée par : $dg = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

L'incertitude absolue sur la fonction « g » s'obtient en passant des variations différentielles aux variations moyennes des variables x, y et z $(d \to \Delta)$, soit :

$$\Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

Exemple :

Calculer l'incertitude relative de la densité volumique ρ d'un cube de coté « a ».

On a : $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{a^3} = ma^{-3}$

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial m}dm + \frac{\partial \rho}{\partial a}da = a^{-3}dm + m\left(-3a^{-4}\right)da = a^{-3}dm - 3ma^{-4}da$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = a^{-3}\Delta m + 3ma^{-4}\Delta a = \frac{1}{a^3}\Delta m + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}}$$

I.3. Rappels sur les vecteurs :

Beaucoup de quantités physique sont de nature vectorielles tel que : la vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique, le champ magnétique…. La notion vectorielle n'a été introduire qu'à la fin du 19eme siècle par Josion willard Gibbs (1839-1903).

I.3.1. Définition : Un vecteur est une entité mathématique définie par plusieurs valeurs numériques. Ces valeurs décrivent le module et l'orientation du vecteur.

Un vecteur MN est caractérisé par :

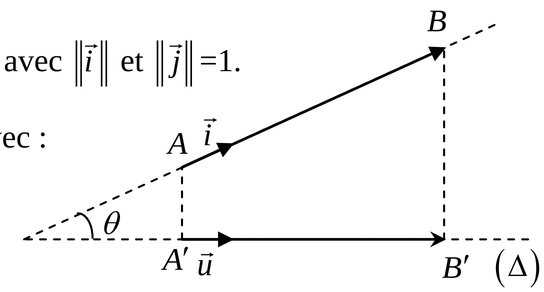
1- Son origine ou point d'application
2- Sa direction.
3- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile ayant du point M vers le point N.
4- Sa norme (son module) qui présente la longueur MN. On le note $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Elle toujours positive.

I.3.2. Projection d'un vecteur sur un axe :

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$ représentent des vecteurs unitaires avec $\left\|\vec{i}\right\|$ et $\left\|\vec{j}\right\|$=1.

On appelle $\overrightarrow{A'B'}$ la projection de $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe (Δ) avec :

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos\theta$



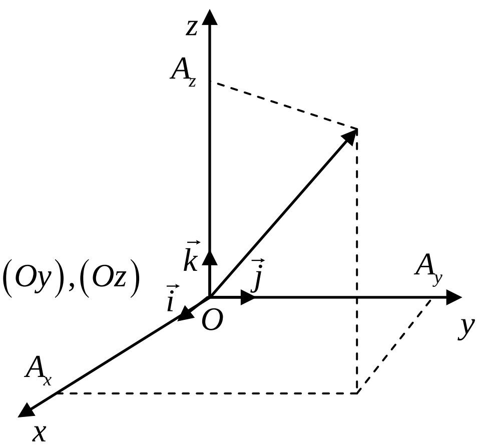
IV- les composants d'un vecteur :

Dans l'espace menu d'un repère orthonormé (Oxyz) et une base de vecteurs unitaires $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ chaque vecteur peut s'écrire en fonction de ces composants sou forme :

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ ou $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Tel que $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ présente le module de $\vec{A}$

$\overrightarrow{A_x}, \overrightarrow{A_y}, \overrightarrow{A_z}$ sont les projections de vecteur $\vec{A}$ sur les axes $(Ox),(Oy),(Oz)$

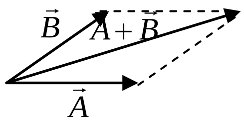


I.3.3. Opérations sur les vecteurs :

- **L'addition :**

Soients $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs de l'espace avec $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

On a : $\vec{A}\pm\vec{B}=\left(A_x \pm B_x\right)\vec{i}+\left(A_y \pm B_y\right)\vec{j}+\left(A_k \pm B_k\right)\vec{k}$



Pour « n » vecteurs :

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{A}_i=\sum_{i=1}^{n}A_{x_i}\vec{i}+\sum_{i=1}^{n}A_{y_i}\vec{j}+\sum_{i=1}^{n}A_{z_i}\vec{k}\ .$$

Propriétés :

1- $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\left(\vec{B}+\vec{A}\right)$

2- $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

3- $\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\|\neq\left\|\vec{A}\right\|+\left\|\vec{B}\right\|$

4- Soit $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\Rightarrow-\vec{A}\begin{pmatrix}-A_x\\-A_y\\-A_z\end{pmatrix}$

- **Multiplication d'un vecteur par un scalaire :**

Soit un vecteur de l'espace $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$, λ un nombre réel. Le résultat de la multiplication $\lambda.\vec{A}$ est un vecteur qu'a la même direction de $\vec{A}$ si λ >0 (de direction opposée si λ <0), de composées $\begin{pmatrix}\lambda A_x\\\lambda A_y\\\lambda A_z\end{pmatrix}$ et de module $|\lambda|\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

Propriétés :

1. $\lambda\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$
2. $\lambda\left(\mu\vec{A}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{A}$
3. $\left(\lambda+\mu\right)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$
4. $0.\vec{A}=\vec{0}$

- **Produit de deux vecteurs :**

✓ **Produit scalaire :** on définit généralement le produit scalaire entre deux vecteurs dans l'espace, no té $\vec{A}.\vec{B}$, comme étant le produit de leurs modules fois le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs :

$$\vec{A}.\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$$

Dans l'espace géométrique à trois dimensions en utilisant une base orthonormé tel que : $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

Le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

L'ongle θ entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est donnée donc par :

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

Propriétés :

1- $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2- $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

3- $\vec{A}.\left(\vec{B}.\vec{C}\right) \neq \left(\vec{A}.\vec{B}\right).\vec{C}$

4- $\vec{A}.\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

5- $\left(\lambda\vec{A}\right).\vec{B} = \vec{A}.\left(\lambda\vec{B}\right) = \lambda\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$

6- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$ ($\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dites orthogonaux).

Exercice :

Etant donné deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$\vec{B}$ est décomposé en deux parties : $\vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp}$

Montrer que :

$$\vec{B}_{//} = \frac{\vec{B}.\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}.\vec{A}$$

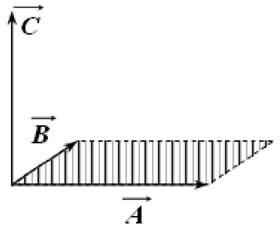
$$\vec{B}_{\perp} = \vec{B} - \frac{\vec{B}.\vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}.\vec{A}$$

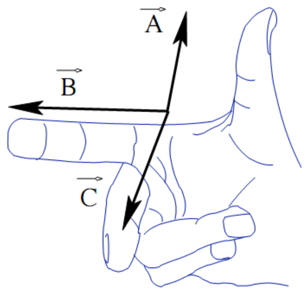
✓ **Produit vectoriel :**

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, noté $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ et dont :

- La direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- Le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (règle de la visse);
- Le module correspond à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et vaut :

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \left|\sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)\right|$$





Supposons que l'on connaisse les composantes des deux vecteurs A et B dans une base orthonormée directe

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}-\left(A_xB_z-A_zB_x\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

Propriétés :

1- $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\left(\vec{B}\wedge\vec{A}\right)$

2- $\vec{A}//\vec{B}\Rightarrow\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$

✓ **Produit mixte :**

On appelle produit mixte de trois vecteurs , B et C une quantité scalaire m dont la valeur absolue est égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs :

$$m=\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right).\vec{C}=\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right).\vec{A}=\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right).\vec{B}$$

Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors $m = 0$.

I.4. Analyse vectorielle : gradient, rotationnel divergence et Laplacien

- **Opérateur 'nabla'**

L'opérateur « nabla » ou $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et laplacien de manière simple. Il se définit comme suit :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\qquad \text{Ou }\ \vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

- **Gradient**

Le gradient d'une fonction scalaire $f\left(x,y,z\right)$ est un vecteur noté $\vec{\nabla}f$ ou $\overrightarrow{grad}\,f$ dont les composantes dans une base orthonormée sont les dérivées partielles de f par rapport à chaque variable :

$$\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$$

- **Divergence**

La divergence d'un vecteur $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$ dont les composantes sont fonctions des coordonnées $\left(x,y,z\right)$ est un scalaire noté $\vec{\nabla}.\vec{A}$ ou $div\vec{A}$ dont la valeur est : $\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

- **Rotationnel**

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$ est un vecteur noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ ou $rot\vec{A}$ tel que :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

- ## Laplacien

On appelle Laplacien d'une fonction scalaire $f\,(x, y, z)$ la divergence de son gradient, on le note $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}f\right)$ ou Δf avec $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

• **Propriétés :**

Quels que soient la fonction *f* et le vecteur $\vec{A}\,F$ on à deux propriétés qui sont toujours vérifiées:

1- $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f=\vec{0}$

2- $div\;\overrightarrow{rot\;f}=0$