Université Djilali Bounaama
Faculté des sciences et de la technologie
Département MI

2020/2021

Analyse 1

Série n3

Exercice 1 :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les assertions vraies et donner un contre-exemple pour les assertions fausses.

- Si (u_n) admet une sous-suite convergente, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) converge vers l, alors (u_{n^2}) converge vers l.
- Si (u_n) converge vers 1, alors $(u_n)^2$ converge vers 1.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq -\sqrt{n}$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.
- Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
- Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
- Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
- Si (u_n) est de Cauchy, alors (u_n) est bornée.

Exercice 2 :

1- Soit (u_n) une suite dont les suites extraites $(a_n = u_{2n})$ et $(b_n = u_{3n})$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que $\ell = \ell'$.

2- On se donne une suite réelle (u_n).
On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 :

Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, des suites numériques suivantes

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}, \quad b_n = \frac{\ln(n+e^n)}{n}, \quad c_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \ (a, b > 0), \quad d_n = \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+2)!},$$

$$e_n = \sqrt[n]{n^2}, \quad f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad g_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n, \quad h_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k}}, \quad v_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^n k, \quad w_n = \prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Exercice 4 : (Encadrement)

Calculer la limite des suites de terme générale :

1- $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$.

2- $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})$.

3- $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$.

4- $u_n = \frac{1}{n!}(1! + 2! + \cdots + n!)$.

Exercice 5 :

(a) Établir que pour tout $x \geq 0$ on a $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

(b) En déduire la limite de $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

Exercice 6 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{a}{2^k}$

Montrer que $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin(a)$ et déterminer $\lim_{n\to\infty} P_n$.

Exercice 7 : (Suites adjacentes)

1- Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
Montrer que leur limite commune est irrationnelle.

2- Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 = a > 0, v_0 = b > 0)$ et par les relations $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

3- Soient a et b deux réels strictement positifs.
On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8 :

1- Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 > 0, v_0 > 0)$ et par les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$.

2- Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

Exercice 9 :

1- Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, où $a > 0$ est donné.

2- Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

3. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

Exercice 10 :

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (série harmonique).

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} H_n$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}$.

Exercice 11 :

1-Montrer que les suites (u_n) et (v_n), données ci-dessous, sont de Cauchy

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2}, \quad v_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$$

2-Montrer que les suite (w_n) et x_n ne sont pas de Cauchy, où

$$w_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$$

3-Montrer que les suites w_n et x_n tendent vers $+\infty$.