Université Djilali Bounaama
Faculté des sciences et de la technologie
Département MI
2020/2021

Analyse 1

Série n2

Exercice 1:

Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes :

1 - $a = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$, $b = \dfrac{3+6i}{3-4i}$ et $c = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1-7i}{4+3i}$.

2- Résoudre le système $\begin{cases} iz - 2\omega = -4+3i \\ 2\bar{\omega} + \bar{z} = 3 \end{cases}$ dans $\mathbb{C}$.

3- Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$.

Exercice 2 :

1 -, Soit u une racine carrée de zz'. Montrer que $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right|$.

2- Déterminer les complexes z tels que $|z| = |z-2|$ et $\arg z = \arg(z+3+i) \pmod{2\pi}$.

3- Déterminer les complexes z tels que les modules de z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient égaux.

4- x, y, z étant trois complexes de module 1, comparer $|x+y+z|$ et $|xy+yz+zx|$.

Exercice 3 :

1 -a, b, c, d étant des réels, résoudre $z + |z| = a + ib$, puis $|z| - z = c + id$

2- On suppose que $-\pi < \varphi \leq \pi$. Module et argument des nombres complexes suivants :
$a = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $b = \sin\varphi + i(1+\cos\varphi)$, $c = \cos\varphi + i(1+\sin\varphi)$.

3- Module et argument de $a = \dfrac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ et $b = \dfrac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

4- Du calcul de $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

5- Simplifier $z = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$.

Exercice 4 :

1- Calculer les racines carrées de $Z = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$ (avec a, b réels).

2- Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

3- Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^3 - i = 6(z + i)$.

4- Soit $Z = \dfrac{-1 + i}{4}$. Calculer les racines cubiques de Z.

Montrer qu'une seule d'entre elles a une puissance quatrième réelle.

Exercice 5:

1- Résoudre $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$ dans $\mathbb{C}$.

2- Résoudre $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

3-Résoudre l'équation (E) $(z - 1)^3 + (z - 1)^2(z + 1) + (z - 1)(z + 1)^2 + (z + 1)^3 = 0$.

4-Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^8 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$.

5-Calculer les sommes $\begin{cases} S = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \cdots \\ T = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \cdots \\ U = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \cdots \\ V = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \cdots \end{cases}$

Exercice 6

1- Résoudre l'équation $(z + 1)^n = \cos 2na + i \sin 2na$.

En déduire la valeur de $P_n = \sin a \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(a + \frac{n-1}{n}\pi\right)$.

2- Soient $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité. Pour $p \in \mathbb{Z}$, calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$.

3-Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} (2 - \omega_k)$, où les ω_k sont les racines n-ièmes de l'unité.

4-Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$.

5-Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation $\left(\dfrac{1 - iz}{1 + iz}\right)^n = \dfrac{1 + ia}{1 - ia}$ $(n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R})$.

Exercice 7:

1 - Simplifier $S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos(a + kb)$.

2- Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \sum^{n} \cos(2k-1)\theta$.

3- Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 k\theta$.

4- Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \sum_{k=1}^{n} \cos^k \theta \cos k\theta$.

5- Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{\cos^k \theta}$.

6- Calculer la somme suivante, en fonction de θ et de n : $S = \sum_{k=-n}^{n} \exp(ik\theta)$.

Exercice 8:

1 - Calculer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$. En déduire l'expression de $\cos \frac{\pi}{10}$.

2- Transformer $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$ en produit.

3- Transformer $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$ en produit.

4- Simplifier l'expression $P = (2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)\cdots(2\cos(2^{n-1}x) - 1)$.

5- Simplifier l'expression $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}$.

6- Résoudre l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$.