

التكامل وبعض طرق حسابه

مفهوم التكامل نسمى التكامل من a إلى b للدالة f ، الحيز الجبري للسطح المحدد بالمنحنى الممثل لـ f ومحور الفواصل

$$\int_a^b f(x) dx \text{ والمستقيمين : } x=a \text{ و } x=b. \text{ نرسم له بالرمز}$$

تكامل دالة مستمرة f دالة مستمرة على مجال I من \mathbb{R} ، و F دالة أصلية لـ f على I و a و b من I .

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ هو العدد:}$$

• الدوال المستمرة على مجال من الشكل $[a, b]$ تقبل المكاملة.

نتيجة إذا كانت f مستمرة على I ، فإن f تقبل دالة أصلية على I .

وإذا أخذت دالة أصلية لـ f القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير من I ،

فإن هذه الدالة الأصلية تكون وحيدة.

• في معلم كيني، المساحة S المحددة بمنحنى $y = f(x)$ ومحور الفواصل

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \text{ تُعطى بالعلاقة}$$

نظرية المتوسط f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ ،

فهي تبلغ حضيضها وذروتها على هذا المجال : m و M . فيكون : $m \leq f(x) \leq M$ ،

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \text{ وبالتالي : } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ ومنه}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \text{ بحيث : } c \text{ من المجال }]a, b[\text{ فإنه توجد نقطة}$$

تسمى c بالقيمة المتوسطة لـ f على $[a, b]$.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

خواص الدوال القابلة للمكاملة

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$a < b \quad \int_a^b |f(x)| dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\frac{F(x) - F(x')}{x - x'} = \frac{1}{x - x'} \int_{x'}^x f(t) dt \text{ فإنه يكون } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ إذا كانت } f \text{ دالة مستمرة و}$$

$$f(c) = \frac{F(x) - F(x')}{x - x'} \text{ حسب نظرية المتوسط، فإنه يوجد } c \text{ يكون محصورا بين } x' \text{ و } x:$$

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ وبالمرور على النهاية عندما } x \leftarrow x' \text{ ينتج:}$$

• دراسة الدالة $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. معرفة تماما لأن الدالة $f(x) = e^{-t^2}$ معرفة ومستمرة على \mathbb{R} ،

من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$ مهما كان x من \mathbb{R} ، وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على \mathbb{R} ، ولدينا:

$$\forall x \geq 1, F(x) = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} dt$$

وبما أن $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ مهما كان $1 \leq t$. فإن $F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt \leq F(1) + \frac{1}{e}$

إذن الدالة متزايدة F ومحدودة من الأعلى، فهي تقبل نهاية (منتهية) عند $(+\infty)$

بعض طرق حساب التكامل

- الدالة الأصلية، (إذا عُلمت): نسمي دالة أصلية للدالة f المعرفة على المجال I من \mathbb{R} . كل دالة F تقبل الاشتقاق

$$\text{على } I \text{ بحيث : } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

إذا كانت F أصلية لـ f ، فإن كل الدوال من الشكل $F + \lambda$ هي أيضا دوال أصلية لـ f حيث λ ثابت حقيقي

ليكن c عدد كيني من المجال $[a, b]$. نعتبر الدالة $F(x) = \int_c^x f(t) dt$. إذا قبلت F الاشتقاق على المجال $[a, b]$ ،

فهي الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x = c$.

• في التكامل $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{1+t^2}$ ، نلاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ مستمرة على \mathbb{R} ، و F تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ،

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ولدينا أيضا} \quad \forall x \in \mathbb{R}, F''(x) = f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{1}{9-x^2} dx = \int \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \frac{1}{6} (\ln(x+3) - \ln(x-3)) + c$$

$$\int 3x \sqrt{1-2x^2} dx = -\frac{3}{4} \int (1-2x^2)^{1/2} (-4x) dx = -\frac{1}{2} (1-2x^2)^{3/2} + c$$

- بتبديل المتغير إذا كانت g رتيبة وتقبل للاشتقاق، واعتبرنا مثلا التحويل: $x = g(t); \alpha = g(\alpha); b = g(\beta)$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{يكون}$$

• لنحسب التكامل $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$. من أجل كل x من \mathbb{R} : $u(x) = (1-x^2) \Rightarrow u'(x) = -2x$

ومنه $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx$ ، وبما أن $\frac{u'}{u^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $-\frac{1}{u}$ ، نحصل على :

$$\int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx = -\frac{1}{1-x^2} + c$$

• في التكامل $\int_{-1}^0 x \sqrt{1-x} dx$. نستخدم التحويل $u = 1-x$ ، فيكون $du = -dx$

من أجل $x = -1$ نجد $u = 2$. و من أجل $x = 0$ يكون $u = 1$

$$\int_{-1}^0 x \sqrt{1-x} dx = \int_2^1 (1-u) \sqrt{u} (-du) = \int_1^2 (\sqrt{u} - u \sqrt{u}) du = \frac{-4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

• في التكامل $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$ ، نستخدم التحويل : $t = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow t^2 = x+3 \Leftrightarrow x = t^2-3, (t \geq 0)$

$$x = t^2 - 3 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = \int \frac{(t^2-3)}{3} 2t dt = 2 \int (t^2-3) t dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - 3t \right) + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = 2 \left(\frac{t^3}{3} - 3t \right) + k = 2 \left(\frac{(\sqrt{x+3})^3}{3} - \sqrt{x+3} \right) + c \quad \text{نعبّر عن النتيجة بدلالة } x$$

التكامل بالتجزئة F و G أصليتان ل f و g : $f(x) : g$

$$\int F(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int f(x) \cdot G(x) dx$$

- $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$
- $\int \ln(x-1) dx = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \ln(x-1) - x + c$
- $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$

تكاملات بعض الدوال المألوفة لتكن $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $	e^x	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a} \sin ax$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

توسيع مفهوم التكامل f و g دالة معرفتان على $[a, +\infty[$ حيث : $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

إذا وُجدت النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ متقاربا.

• مجموعة تعريف الدالة : $F(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1}$ ، وحساب $F(x)$ واستنتاج $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1}$

مجموعة تعريف $F(x)$ هي \mathbb{R}^* . بوضع $t = e^x - 1$ يكون $x = \ln(t+1)$ ، ومنه $dx = \frac{dt}{t+1}$

إذن $\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$ ، وبكتابة العبارة بالشكل $\frac{1}{t(t+1)}$ ، نجد $a=1, b=-1$

ومنه $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+1| + c = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c = F(x) = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| + c$

من جهة أخرى، لدينا بالتعريف $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{e^x - 1}$

لنحسب التكامل المحدود $\int_1^t \frac{dx}{e^x - 1} = \left[\ln \frac{e^x - 1}{e^x} \right]_1^t = \ln \frac{e^t - 1}{e^t} - \ln \frac{e - 1}{e}$

ومنه $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^t - 1}{e^t} - \ln \frac{e - 1}{e} \right)$

وأخيرا $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{e^t} \right) - \ln \frac{e - 1}{e} \right) = 1 - \ln(e - 1)$