الدوال العددية والاشتقاق

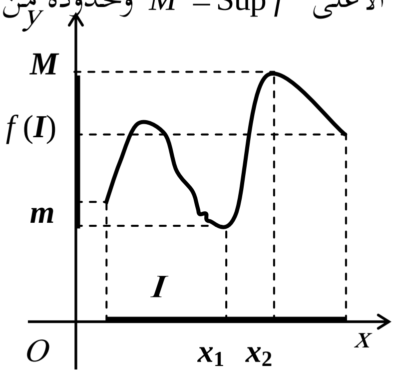
الدالة العددية لمتغير حقيقي: هي الدالة التي مجموعة بدئها $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها هي $\mathbb{R}$.

- **النهاية** ليكن x_0 من $]a,b[$ و f دالة عددية معرفة على $]a,b[$، لا تشترط أن تكون f معرفة عند x_0.
- تعني العبارة "عندما يؤول x إلى x_0، تؤول $f(x)$ إلى ℓ" أنه بإعطاء $\varepsilon > 0$، يمكن إيجاد $\eta > 0$ يرتبط بـ ε : $|x - x_0| < \eta$، الذي يضمن $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. ونكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$، مع x قد يختلف عن x_0.

الاستمرار إذا افترضنا أن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]a,b[$ تقبل، عندما $x \to x_0$، النهاية ℓ (التي قد تختلف عن $f(x_0)$). في حالة العكس $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ نقول أن f مستمرة عند x_0.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad x_0 \in D_f$

- إذا كانت دالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من مجال I من $\mathbb{R}$، نقول أن f مستمرة على المجال I.
- كل دالة f مستمرة على مجال مغلق I، تكون محدودة من الأعلى بحدها الأعلى $M = \operatorname{Sup} f$ ومحدودة من الأدنى بحدها الأدنى $m = \operatorname{Inf} f$



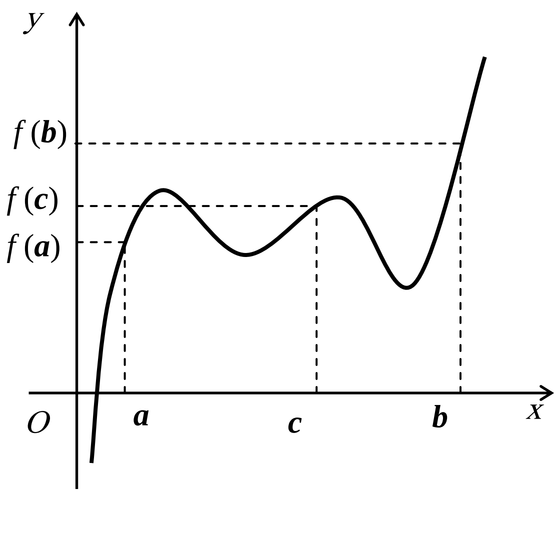
التمديد بالاستمرار الدالة f غير معرفة عند x_0 مع $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

يمكن تمديد f بالاستمرار كما يلي :
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & , \ x = x_0 \end{cases}$$

قضية ليكن $0 < k$، تكون الدالة f مستمرة على I $(D_f \supset)$.

إذا حققت دالة f على المجال I الشرط الآتي: $\forall x, y \in I , \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$

نظرية القيم المتوسطة



f دالة معرفة ومستمرة على $[a,b]$.

من أجل كل قيمة y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$،

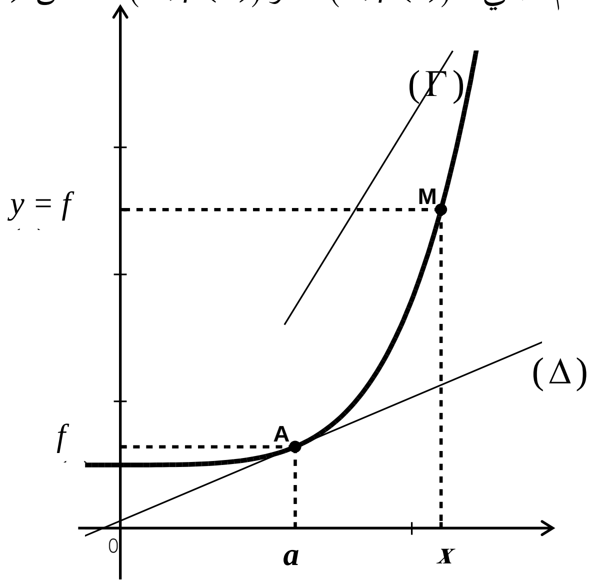
توجد قيمة c محصورة بين a و b بحيث $y = f(c)$

نتيجة إذا كانت f معرفة ومستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$، بحيث يكون $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن f تنعدم على الأقل عند قيمة c من $]a,b[$.

الاشتقاق نفرض أن $f(x)$ مستمرة عند x_0. إذا افترضنا أن الدالة $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ غير المعرفة عند $x = x_0$ تقبل نهاية عندما يؤول x إلى x_0، نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0. تُسمى هذه النهاية **العدد المشتق عند** x_0.

f تقبل الاشتقاق عن x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\Leftrightarrow$ وجد العدد المشتق $f'(x_0)$.

التفسير الهندسي (Γ) المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ في معلم كيفي. $A(a;f(a))$ و $M(x;f(x))$ من (Γ)



إذا كان $x \neq a$ فإن $A \neq M$،

ويكون معامل توجيه المستقيم AM

هو $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

- إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a

فإن AM ينتهي إلى المماس (Δ) لـ(Γ) عند a

الذي معادلته : $y-f(a)=(x-a)f'(a)$،

وغير الموازي لمحور التراتيب.

الاشتقاق عن اليمين f دالة معرفة على D. $x_0 \in D$.

f تقبل الاشتقاق عن يمين x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أي إذا وجد **العدد المشتق عن اليمين** $f'(x_0^+)$.

- **ندرس اشتقاق الدالة g حيث:** $g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} , & x \neq 0 \\ 0 , & x=0 \end{cases}$

$g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

بإمكان دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $]0,+\infty[$.

من $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(x)}{x-0} = 0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند 0. ولدينا: $g'(x)=\begin{cases} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} , & x \neq 0 \\ 0 , & x=0 \end{cases}$

قضية إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a، فإنها مستمرة عند a. العكس غير صحيح.

الدالة المشتقة f دالة عددية لمتغير حقيقي x من $D \subset \mathbb{R}$.

f تقبل الاشتقاق على D $\Leftrightarrow$ f تقبل الاشتقاق عند أية قيمة x_0 من D.

عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق إذا كانت f و g دالتين تقبلان الاشتقاق على مجال I، فإن

- $f+g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x \in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
- $f \cdot g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x \in I \quad (f \cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x).g'(x)$
- من أجل كل λ من $\mathbb{R}$، λf تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x \in I \quad (\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$

- إذا كان $g(x)$ لا ينعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا :

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

الاشتقاق والرتابة f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x) \geq 0$، فإن f تكون متزايدة على I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x) > 0$، فإن f تكون متزايدة تماما على I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x) = 0$، فإن f تكون ثابتة على I.

- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0، وتبلغ أحد حديها عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

إذا افترضنا أن $f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x)$ فسيكون لدينا $\forall x \in I \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$

وبما أن f تقبل الاشتقاق عند x_0، وبفرض $x - x_0 < 0$ فإن $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

أما إذا كان $x - x_0 > 0$ فإن $f'(x_0) \geq 0$ وينتج في الأخير $f'(x_0) = 0$.

- إذا كان $f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة x_0.
- إذا كان $f''(x_0) = 0$ و f'' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة x_0.

قضية إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I و g تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال $f(I)$ فإن $g \circ f$ تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I . ولدينا: $\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

أمثلة $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x$

- **مشتق** $f(x) = x^n$ هو $f'(x) = n x^{n-1}$ من أجل كل عدد صحيح n.
- $\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a . \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a \cdot 1 = e^a$. ومنه $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$

- **لتكن f دالة مستمرة على $[a,b]$ بحيث $a < f(a)$ و $f(b) < b$**

بفرض أن $f(a) \leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x) \leq g'(x)$

نثبت أنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f(c) = c$

من أجل ذلك نعتبر الدالة $g(x) = f(x) - x$. g مستمرة على $[a,b]$، ولدينا :

$$a < f(a) \Leftrightarrow f(a) - a > 0 \Leftrightarrow g(a) > 0$$
$$f(b) < b \Leftrightarrow f(b) - b < 0 \Leftrightarrow g(b) < 0$$

ومنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $g(c) = 0$ أي $f(c) = c$

- **لتكن الدالة $g(x)$ المعرفة بالشكل:** $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$

بين أن $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها. ادرس وجود الخطوط المقاربة.

- $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند الصفر لأن:

$$g(0)=\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)=+1$$

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=-\frac{1}{2}$$

- $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجال $\mathbb{R}^*$ ولدينا :

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{-xe^x+e^x-1}{(e^x-1)^2}, & x\neq0\\[2mm] -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-x\right)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=-1$

المنحنى (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته : $y=-x$.

الدالة العكسية إذا كانت الدالة العددية f رتيبة تماما على المجال I ومستمرة على I فإن:

$f(I)$ هو مجال، واقتصار f على I تقابل، و f تقبل دالة عكسية f^{-1} مستمرة وبنفس تغير f .

ملاحظة • إذا أعطيت f بتمثيلها البياني في معلم متجانس، فإنه تمثيل f^{-1} يكون بالتناظر الذي محوره المستقيم $y=x$

• إذا قبلت f الاشتقاق على I ، وكانت هذه المشتقة غير معدومة، فإن f^{-1} تقبل أيضا الاشتقاق على $f(I)$

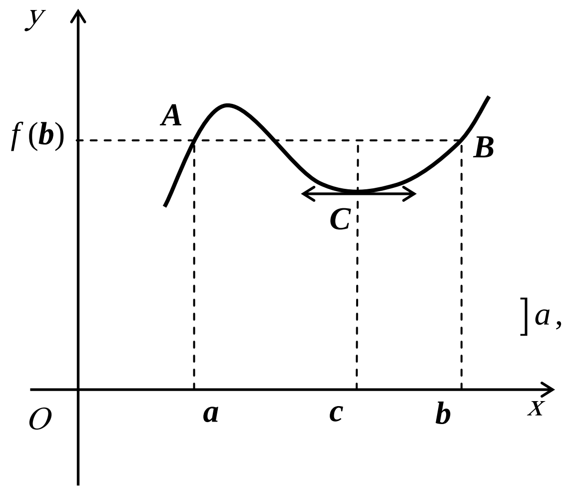
ولدينا:

$$\forall x\in I,\quad f\circ f^{-1}(x)=x$$

$$\forall x\in I,\quad f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

ومنه $f'\neq0$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$



نظرية رول إذا كانت الدالة f
- مستمرة على $[a,b]$ ،
- قابلة للاشتقاق على $]a,b[$
- بحيث $f(a)=f(b)$.

فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة واحدة c على الأقل من القوس AB (A تختلف عن B) بحيث يكون المماس عندها يوازي Ox. قد لا تكون هذه النقطة وحيدة .

نظرية لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$. بفرض أن الدالة المشتقة g' لا تنعدم على $]a,b[$، عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

قاعدة L'Hôpital لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$،

وليكن α من المجال $]a,b[$. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ، فإن النهاية $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ موجودة:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة عندما يكون $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ ، فأن $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- **شروط رول تتحقق على** $f(x)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$. لدينا $f'(x)=3x^2-4$ $f(-2)=f(0)=f(2)$

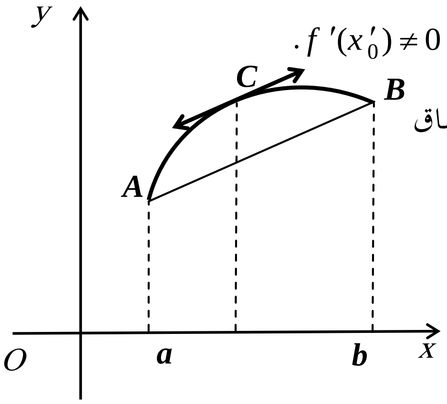
حسب رول فإن $f'(x)$ تنعدم عند $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ من $]-2,0[$ وتنعدم أيضا عند $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ من $]0,2[$.

- **المعادلة** $e^{-x}=x$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 **من المجال** $I=]0,1[$.

بوضع $f(x)=x-e^{-x}$ ، يكون لدينا: f مستمرة على I و $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$.

وحسب نتيجة سابقة، توجد قيمة x_0 من المجال المفتوح $]0,1[$ بحيث $f(x_0)=0$,

x_0 وحيد. لأنه لو كان معه x_1 من $]0,1[$ بحيث $f(x_1)=0$, لكان $f(x_0)=f(x_1)=0$ الأمر الذي يتطلب، حسب رول، وجود x'_0 من $]x_0,x_1[$ بحيث $f'(x'_0)=0$. وهذا محال لأن $f'(x'_0)\neq 0$.



صيغة التزايدات المنتهية إذا كانت دالة f مستمرة على $[a,b]$ وتقبل الاشتقاق على $]a,b[$ ، فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث :

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

أي يوجد على الأقل θ من $]0;1[$ ، بحيث

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \qquad (2)$$

- الدالة $f(x)=\ln x$ تحقق شروط تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $[0;x]$ ، $0<x$

ومنه $\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$ $\exists c\in]x;x+1[$ أو $\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{x+\theta}$ $\exists\theta\in]0;1[$

- طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^x$ ، على $[0;x]$ ، $0<x$ ، بعد التحقق من شروطها .

مجموعة التعريف f هي $D_f=[0;+\infty[$ ، و f تقبل الاشتقاق على $D=]0;+\infty[$ ،

(من أجل $0<x$: $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ و f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

التمثيل الهندسي : يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة أو أكثر من القوس AB بحيث يكون المماس للمنحنى يوازي الوتر AB. (معامل توجيه المستقيم AB هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) .

نتيجة لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين m و M بحيث يكون : $m\leq f'(x)\leq M$: $\forall x\in]a,b[$. عندئذ يكون : $m\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$

- **نثبت من أجل كل** $0<x$: $\frac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$.

نعتبر الدالة $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$. لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$. وحسب نظرية التزايدات المنتهية :

$$\exists c\in]x,x+1[,\ f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)=\frac{1}{c}$$

وبما أن $0<x<c<x+1$ فإن $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ أي $\frac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$.

الدوال اللوغاريتمية والأسية

نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير x . ورمزها هو $\ln$. ومجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}_+^*$. ولدينا بالتعريف: $\forall x>0,\quad \ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$

النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

خواص • على المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{x} \Leftarrow f(x)=\ln|ax|$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$

• $\ln x^n=n\ln x \quad n\in\mathbb{Q},\ x>0,\ \ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v,\ \ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v$

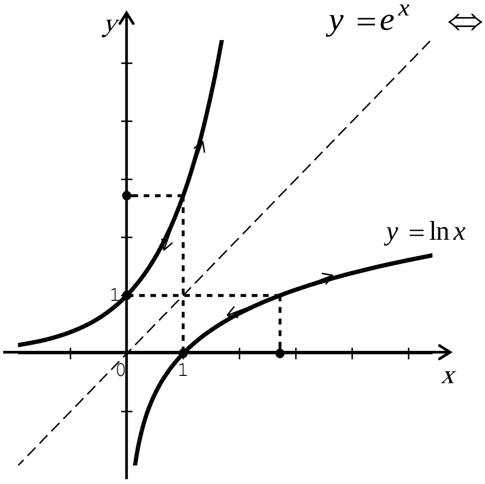
• إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق وتحافظ على إشارتها في مجال I، فإن الدالة $f: x\mapsto \ln|u(x)|$ تقبل الاشتقاق على I، بحيث : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

العدد e : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، تنعدم من أجل $x=1$، وهي مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

توجد قيمة لـ x: $\ln x=1$، وهي العدد e الذي نسميه **الأساس النيبيري**، يحقق هذه المعادلة ، $2,718...$ قيمة تقريبية له

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة الأسية النيبيرية الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري e، التي نرمز لها بـ $x\mapsto e^x$، هي الدالة العكسية للدالة $\ln$، فهي مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ في $\mathbb{R}$. ولدينا : $x>0\ ,\ x=\ln x \Leftrightarrow y=e^x$



خواص ونهايات : $(e^x)^y=e^{x\cdot y}\ ,\ e^x\cdot e^y=e^{x+y}\ ,\ \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0}x\cdot e^x=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل على مجال I، فإن الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I : $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)\cdot e^{u(x)}$

تمارين محلولة:

• $f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث : $f(x)=\begin{cases}(\ln x)^2-\ln x & ,\ 1\ge x>0\\ (\ln x)^2 & ,\ x>1\end{cases}$

1. عين الصور $f(\frac{1}{5})$ ،$f(\frac{1}{e})$ ،$f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.

2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.

3. ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$، واستنتج بأن اقتصار f على $]1, +\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق f^{-1}

4. أنشئ منحنييْ الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).

هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0.5\,;\,2]$ ؟

1. $f(\frac{1}{5}) \approx 4.20$ ، $f(\frac{1}{e}) = 2$ ،$f(\frac{1}{2}) \approx 1.17$ ،$f(1) = 0$ ، $f(5) \approx 2.60$ ،$f(e) = 1$ ،$f(2) \approx 0.48$

2. • الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln x - 1}{x}, & 1 > x > 0 \\ \dfrac{2\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

• الاشتقاق عند $x_0 = 1$. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(\ln x)^2 - \ln x - 1}{x-1} = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(\ln x)^2 - 1}{x-1} = 0$. ومنه f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$.

3. • لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ومنه منحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور الفواصل.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (منحنى f يقبل محور التراتيب كخط مقارب). كما نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = e$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0 = e$ ومغيرة إشارتها).

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-1 ‖ 0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1, +\infty[$، وتأخذ قيمها في $]0, +\infty[$ فهي تقابل. دالتها العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ في $]1, +\infty[$. منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة لـ $y = x$. بوضع : $y = f(x) = (\ln x)^2 ,\ x \geq 1$ نحصل على : $x = e^{\sqrt{y}} ,\ y \geq 0$

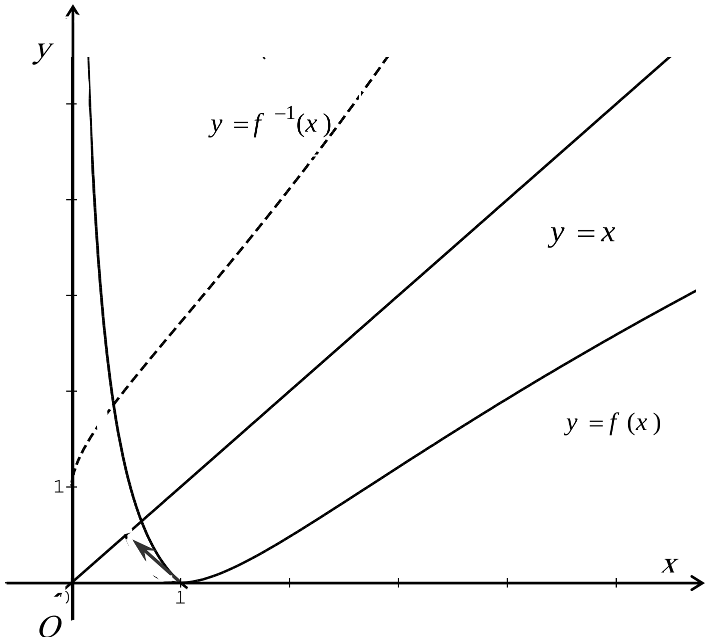
ومنه : $\boxed{(x \geq 0) \qquad f^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}}$

f مستمرة على $[0\,,\,2]$ لكنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$، وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

- **الدالة المستمرة على** $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & , \; x\geq 1 \\ x\,e^{x-1}+1 & , \; x<1 \end{cases}$$

ندرس تغيرات f على $\mathbb{R}$، ونستنتج بأن اقتصار f على $[1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي. ثم نعين التطبيق العكسي f^{-1} .



- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & , \; x>1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & , \; x<1 \end{cases}$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$ بحساب النهايتين: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\,e^{x-1}+1-2}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+1-2}{x-1}=1$

ينتج أن f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0=1$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. منحنى f يقبل أيضا خطا مقاربا (معادلته $y=1$).

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$	$\Vert$ 1	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x=-2$. (الدالة f'' تنعدم عند $x_0=1$ مغيرة إشارتها).

- الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $[1,+\infty[$ فهي تقابل. دالتها العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$ في $[1,+\infty[$.

- بوضع : $y=f(x)=e^{x-1}+1,\; x\geq 1$ نحصل على $x=\ln(y-1)+1,\; y\geq 2$

ومنه $\boxed{(x\geq 2) \qquad f^{-1}(x)=\ln(x-1)+1}$