المتتاليات العددية

نسمي متتالية منتهية بـ p حد، كل دالة عددية معرفة على الأعداد الطبيعية الأولى $n=1,2,...,p$ ، وإذا كانت هذه الدالة معرفة على كل الأعداد الطبيعية، نقول عن المتتالية المرفقة بأنها غير منتهية. نستخدم $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لتمثيل المتتالية (غير المنتهية) $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ أو (u_n)، حيث u_n: قيمة الحد من الرتبة n.

متتاليات رتيبة - (u_n) متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}\geq u_n$ - (u_n) متزايدة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}>u_n$

- (u_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}=u_n$ - (u_n) رتيبة $\Leftrightarrow$ (u_n) متناقصة أو متزايدة.

متتاليات حسابية وهندسية : **متتالية حسابية:** (u_n) متتالية حسابية إذا تحقق $u_{n+1}=u_n+r$ $\forall n\in\mathbb{N},$.

الحد العام: $u_n=u_0+r\cdot n$ مجموع الحدود الأولى: $S_n=(n+1)\cdot\dfrac{u_0+u_n}{2}$

متتالية هندسية: (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=q\cdot u_n$

الحد العام: $u_n=u_0\times q^n$. إذا كان $q=0$ ، فإن u_n يكون معدوما؛ ربما ليس كذلك من أجل $n=0$.

وإذا كان $q=1$. تكون كل الحدود متساوية. مجموع الحدود الأولى: $S_n=u_0\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **حيث:** $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n-1}, & n\geq 2\end{cases}$ **بوضع** $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

- **بين أن** (v_n) **متتالية هندسية؛ جد أساسها واكتب حدها العام.**
- **أكتب** u_n **بدلالة** n **، ثم احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$
- **ادرس** u_n **في الحالتين** $u_1=0$ ، $u_1=-1$.

▪ لدينا $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=1-\dfrac{3}{u_{n+1}}=1-\dfrac{3}{\dfrac{2u_n}{u_n-1}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2u_n}=-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{u_n}\right)=-\dfrac{1}{2}v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية؛ أساسها $-\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\dfrac{u_1-3}{u_1}=-2$.

▪ عبارة v_n بدلالة n: $v_n=(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. ومنه عبارة u_n: $u_n=\dfrac{3}{1-v_n}$ $\Leftrightarrow$ $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

$$u_n=\frac{3}{1-v_n}=\frac{3}{1-4(-1/2)^n}\quad \text{ومنه}\quad \lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{1-4(-1/2)^n}=3$$

▪ الحالة $u_1=0$: المتتالية (v_n) ليس لها معنى. لكن (u_n) ثابتة، ومساوية للصفر $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=0$.

▪ الحالة $u_1=-1$: المتتالية (v_n) هندسية، حدها الأول 4 وأساسها $-\dfrac{1}{2}$؛ وحدها العام:

مهما يكن n: $v_n=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $u_n=\dfrac{3}{1-8(-1/2)^n}$ ، و (u_n) متقاربة نحو 3.

الحواد : A جزء من $\mathbb{R}$. نقول عن $M\in\mathbb{R}$ أنه **حاد من الأعلى لـ** A ، إذا تحقق $\forall x\in A\ ,\ x\leq M$

وإذا كان M حاد من الأعلى لـ A بحيث $M \ni A$ فإن M يُسمى **العنصر الأعظمي** لـ A. ونرمز له بالرمز $\max(A)$

ملاحظة : العنصر الأعظمي إن وُجد فهو وحيد. مثلا المجموعة $A =]1,2[\cup \{3\}$ محدودة.

الحد الأعلى لتكن A جزء من $\mathbb{R}$. نقول عن μ أنه حد أعلى لـ A، ونكتب $\mu = \sup(A)$، إذا تحقق:

$$\forall x \in A\,,\quad x \le \mu\,,\ \forall \varepsilon > 0\,, \exists a \in A\,,\ \mu - \varepsilon < a$$

بمعنى أن μ هو حاد من الأعلى لـ A، ومن أجل كل عدد حقيقي أصغر تماما من μ ومكتوب بالشكل $\mu - \varepsilon$، مع $\varepsilon > 0$ سوف لن يكون حادا من الأعلى لـ A.

ملاحظة: إذا وُجد $\max(A)$، فإن $\sup(A) = \max(A)$.

وإذا كان $\sup(A) \ni A$، فإن $\max(A)$ موجود: $\sup(A) = \max(A)$

تعاريف مشابهة للحد الأدنى $\inf(A)$ والعنصر الأصغري $\min(A)$ لمجموعة A.

متتاليات محدودة : يكون العدد M **حاد من الأعلى** للمتتالية (u_n)، **عندما يتحقق** $u_n \le M$ من أجل كل u_n،
ويسمى **أصغر** الحواد العليا **بالحد الأعلى** للمتتالية. وعندئذ نقول عن المتتالية (u_n) بأنها محدودة من الأعلى.

وإذا وجدت أكبر قيمة لـ u_n تساوي a (الحد الأعلى)، فإن هذه القيمة هي ذروة المتتالية. تعريف يخص المحدودية من الأدنى.

وتكون المتتالية (u_n) **محدودة**، إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى. أي إذا وجد عدد C : $\forall n\,,\ |u_n| \le C$

المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)$: محدودة بـ 0 و 1 . و $u_n = 2 - n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: حدها الأعلى 1، لكنها ليست محدودة من الأدنى.

نهاية متتالية : يكون العدد ℓ نهاية للمتتالية (u_n)، ونكتب $\lim u_n = \ell$ أو $u_n \to \ell$؛ عندما يكون، من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد n، بحيث يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة: $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

أو بعبارة أخرى إذا كان من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، تكون كل حدود المتتالية (u_n) باستثناء عدد منته منها تحقق المتراجحتين $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$، أو تحقق $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

- عندما تقبل متتالية نهاية نقول عنها بأنها **متقاربة**، وتكون **متباعدة** بخلاف ذلك.
- مثلا في المتتالية $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \to 0$، إذا رمزنا بـ n للمرتبة الأولى الأكبر من $\frac{1}{\varepsilon^2}$، فإنه يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$ وبالتالي $-\varepsilon < u_n < +\varepsilon$ والمتتالية (u_n) متقاربة نحو الصفر.

متتاليات متقاربة – كل متتالية تقبل نهاية واحدة على الأكثر.

- كل متتالية متقاربة تكون محدودة.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، وكان $v_n < u_n$ من أجل كل n، فإن $\lim v_n < \lim u_n$.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، فإن $\lim(u_n - v_n) = 0 \iff \lim u_n = \lim v_n$
- إذا حققت (u_n): $|u_p - u_q| < h \Rightarrow \forall h > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ p > k \wedge q > k$ تكون متقاربة.

- تؤول المتتالية (u_n) نحو النهاية $+\infty$ إذا تحقق: $\forall h>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ n>k \Rightarrow u_n>h$
- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تكون متباعدة نحو $+\infty$.

عمليات على المتتاليات المتقاربة إذا تقاربت (u_n) و (u'_n) نحو ℓ و ℓ' على الترتيب، فإنه يكون:

$$\ell\pm\ell'\leftarrow u_n\pm v_n \quad ، \quad \ell.\ell'\leftarrow u_n\cdot v_n \quad ، \quad \frac{\ell}{\ell'}\leftarrow\frac{u_n}{v_n}\quad(\ell'\neq 0)$$

نعتبر المتتالية التدريجية (u_n)، المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ ,\quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

برهن بأن هذه المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2. وبين أنها متزايدة، واستنتج تقاربها.

بالتراجع. من أجل $n=0$، يكون لدينا $u_0=\sqrt{2}<2$.

بفرض أن $u_n<2$، يكون $u_n<2 \Rightarrow u_n+2<2+2=4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2}<\sqrt{4}=2$

ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2.

- و (u_n) متزايدة لأن $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}>0$

إذن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2؛ فهي متقاربة. لتكن ℓ نهايتها.

بما أن (u_n) و (u_{n+1}) لهما نفس النهاية ℓ، فإن ℓ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}$ ومنه $\ell=2$.

نعتبر المتتالية ذات الحد العام: $v_n=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$.

1. **أحسب** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ **وأثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة مهما كان** $n\in\mathbb{N}$.
2. **أثبت أنه من أجل كل** $n\geq 1$ **يكون** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leq\dfrac{1}{2}$.
3. **استنتج أن** $v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall n\geq 1$. **ماذا نقول عن المتتالية (v_n) ؟**

1. لدينا : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1}{n+1}\leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة (v_n)، متناقصة .
2. إذا كان $n\geq 1$ فإن $n+1\geq 2$ ، وبما أن $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{1}{n+1}$، فإن $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leq\dfrac{1}{2}$ مهما كان $n\geq 1$.
3. لنثبت صحة الخاصية P_n : $0\leq v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n\geq 1$.

لدينا P_1 صحيحة. إذا انتقلنا إلى القيمة $n\geq 1$ ، فسيكون لدينا $0\leq v_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$، أي أن P_n مهما كان $n\geq 1$.

إذن لدينا $\forall n\geq 1,\ 0\leq v_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$، وبالمرور على النهاية لما $n\to\infty$، نستنتج أن $\lim\limits_{n\nearrow+\infty} v_n=0$

متتاليات مستخرجة : نعتبر المتتالية $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$. لنستخرج الحد الأول u_{n_1} ذي الرتبة n_1، ثم الحد الثاني u_{n_2} الذي مرتبته $n_1 < n_2$، وهكذا مع بقية الحدود؛ وبذلك نحصل على المتتالية المستخرجة (غير المنتهية): $v_1 = u_{n_1},\ v_2 = u_{n_2}, \ldots,\ v_n = u_{n_n}, \ldots$. **مثلا:** المتتالية $1, 3, 5, \ldots$ مستخرجة من المتتالية $1, 2, 3, \ldots$

- في كل متتالية محدودة، يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.
- في كل متتالية عددية، توجد متتالية مستخرجة تكون إما متزايدة، وإما متناقصة، وإما ثابتة.
- إذا آلت متتالية إلى نهاية معلومة، فإن أية متتالية مستخرجة منها ستؤول إلى نفس النهاية.

مثلا: تؤول المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{2n}\right)$ و $\left(\frac{1}{3n}\right)$ إلى نفس النهاية، وهي الصفر.

متتاليات متجاورة تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا تحقق ما يلي:

- (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة؛ أو بالعكس،
- $\forall n \quad u_n \le v_n \;\Rightarrow\; u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n$،
- $\lim (u_n - v_n) = 0$.

وعندئذ تتقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n) نحو نفس النهاية.

متتاليات تدريجية : f دالة عددية، نُعرف المتتالية (u_n) بإعطاء حدها الأول u_0 وعلاقة التدريج $u_n = f(u_{n-1})$

لدراسة هذا النمط من المتتاليات، ندرس تغيرات f، ونحدد المجال I الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n).

- إذا كانت (u_n) متقاربة وتقبل النهاية ℓ، فإن المتتالية $f(u_n)$ تكون متقاربة وتقبل النهاية $f(\ell)$ ، حيث f دالة عددية مستمرة.
- لتكن f دالة عددية مستمرة. إذا كانت المتتالية التدريجية $u_n = f(u_{n-1})$ متقاربة، فإن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x$. وهذا ما يدفع للاستعانة بمنحنى $y = f(x)$ و $y = x$.
- إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال I، فإن المتتالية (u_n) تكون رتيبة. مقارنة بين قيمتي الحدين الأولين منها تدلنا على تناقص أو تزايد المتتالية (u_n).

بالفعل، إذا ما اعتبرنا $I = [a; b]$، وكانت $u_0 \le u_1$، فإن $f(u_0) \le f(u_1)$. بالتراجع يمكن إثبات أن (u_n) المحدودة من الأعلى بـ b، تكون متزايدة. فهي إذن متقاربة.

وكذلك إذا كانت $u_0 \ge u_1$، فإن $f(u_0) \ge f(u_1)$. ونثبت أيضا بالتراجع إثبات أن (u_n) المحدودة من الأدنى بـ a، تكون متناقصة. إذن فهي متقاربة.

إذا كانت ℓ هي نهاية (u_n)، ولكون f مستمرة على I ، فإن $(f(u_n))$ ستتقارب نحو $f(\ell)$.

إذن لدينا $u_n \longrightarrow \ell$، ومن العلاقة $u_n = f(u_{n-1})$ والمرور على النهاية، نحصل على المساواة $\ell = f(\ell)$.

- إذا كانت f متناقصة على I، فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) تكونان رتيبتين، وبجهتين متعاكستين.

بالفعل، إذا كانت f متناقصة، فإن $f \circ f$ تكون متزايدة. ومنه يكون لدينا:

$$\forall x, y \in I : x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \le f \circ f(y)$$

بتطبيق النظرية السابقة على الدالة $f\circ f$، تكون المتتالية $\left(u_0;u_2=f\circ f\,(u_0);u_4=f\circ f\,(u_2);\ldots\right)$ رتيبة ومتقاربة،
وكذلك المتتالية $\left(u_1;u_3=f\circ f\,(u_1);u_5=f\circ f\,(u_3);\ldots\right)$، تكون رتيبة ومتقاربة.

دراسة المتتالية: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n} \ , \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

كل حدود u_n موجبة وتنتمي إلى المجال $[0,1]$:

الدالة f مستمرة على المجال $[0,1]$: و $\forall x\in[0,1],\ \ f'(x)<0$ ، ومنه f متناقصة على المجال $[0,1]$.

حسب النظرية فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و(u_{2n+1}) رتيبتان وفي اتجاه معاكس:

نلاحظ بأن $u_0=0$ ، $u_1=1$، $u_2=\frac{1}{2}$، ومنه (u_{2n}) متزايدة و (u_{2n+1}) متناقصة.

ولكون (u_n) متقاربة ولتكن ℓ نهايتها، فإن (u_{2n}) و(u_{2n+1}) متقاربتان أيضا نحو نفس النهاية ℓ :
$\ell=(f\circ f)(\ell)$ (لأن $u_{2(n+1)}=(f\circ f)(u_{2n})$ و $f\circ f$ مستمرة).

لدينا إذن $\ell=\dfrac{1+\ell}{2+\ell}$ التي تعطي القيمة $1.618\approx\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل: $\begin{cases} u_0\in\mathbb{R}_+ \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2} \quad ,n\geq 0 \end{cases}$

1. **ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟**
2. **بين أن المتتالية (u_n) متزايدة مهما كان $n\in\mathbb{N}$** .
3. **من أجل $u_0\in[0,+1[$، أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون لدينا $0\leq u_n<1$** .
   واستنتج أن (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟
4. **من أجل $1<u_0$، أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $1<u_n$، استنتج أن** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

---

1. إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ يحقق: $\ell=\dfrac{1+\ell^2}{2}$، ومنه $\ell^2-2\ell+1=0$. أي $\ell=1$.
2. **تزايد المتتالية** (u_n) : إذا وضعنا $u_n=x$ و $u_{n+1}=f(x)$ ، سيكون $f(x)=\dfrac{1+x^2}{2}$.

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{1+x^2}{2}-x=\frac{1}{2}(x-1)^2$ ، ومنه $f(x)-x\geq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) تحقق: $\forall n\in\mathbb{N};\ \ u_{n+1}-u_n\geq 0$. أي (u_n) متزايدة مهما كان $n\in\mathbb{N}$.

3. الدالة $f(x)=\dfrac{1+x^2}{2}$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث: $f'(x)=x$

إذن $\forall x\geq 0\ \ ,\ f'(x)\geq 0$ ولدينا: $\inf_{[0,+1]}f=\frac{1}{2}$ و $\sup_{[0,+1]}f=1$

ومنه $f\left([0,+1]\right)\subseteq\left[\frac{1}{2},+1\right]\subseteq[0,+1]$ ، وأخيرا $\forall n\in\mathbb{N};\ \ 0\leq u_n<1$

نتيجة: بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو النهاية $\ell = 1$.

4. بوضع: $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، وبما أن $f(x)$ متزايدة ، فإنه إذا كان $1 < u_0$، يكون: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n > 1$

وتكون المتتالية (u_n) أيضا متزايدة، لكنها لن تكون متقاربة في هذه الحالة، لأننا لو فرضنا أن (u_n) محدودة،

فستصبح (u_n) متقاربة نحو ℓ. $(\ell = 1)$، وعندئذ : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n > u_0$

بالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، يكون : $\ell > u_0$. لكن $1 < u_0$ ، ومنه $1 < \ell$.

وهذا يناقض الفرض. إذن المتتالية المتزايدة (u_n) فهي ليست متقاربة. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$