Cours : Hydraulique I
Cycle : M_1 : AHA

Chapitre I : Rappels de la mécanique des fluides incompressibles.

1.1 / Hydrostatique

Propriétés physiques des fluides

1/ Définition

Les fluides sont des corps sans forme propre, peuvent s'écouler ; c'est à dire subir de grandes variations sous l'action de forces. Les liquides et les gaz sont des fluides.

2/ Masse spécifique ou volumique (ρ)

C'est la masse contenue dans l'unité de volume. Elle a les dimensions ML^{-3} ou $FL^{-4}T^{2}$

3/ Poids spécifique ($\bar{w}$)

C'est le produit de la masse volumique à la pesanteur

$$\bar{w} = \rho . g$$

Systèmes d'unité

Le tableau suivant résume la correspondance des différentes unités de pression pour la valeur de la pesanteur ($g = 9,81\ m/s^2$)

Système	CGS	MTS		MKS	SI	Unités usuelles en Hydrostatique	
unités	Barye dyne/cm²	pieze Sn/m²	Hectopieze ou Bar	kgf/m²	pascal N/m²	kgf/cm²	m d'eau (à 4°C)
Barye (dyne/cm²)	1	10^{-4}	10^{-6}	0,0102	0,1	$1,02\times10^{-6}$	$1,02\times10^{-5}$
pieze (Sn/m²)	10^{4}	1	10^{-2}	102	10^{3}	$1,02\times10^{-2}$	0,102
Hectopieze ou bar	10^{6}	10^{2}	1	$1,02\times10^{4}$	10^{5}	1,02	10,2
kgf/m²	98,1	$9,81\times10^{-3}$	$9,81\times10^{-5}$	1	9,81	10^{-4}	10^{-3}
pascal (N/m²)	10	10^{-3}	10^{-5}	0,102	1	$1,02\times10^{-5}$	$1,02\times10^{-4}$
unités usuelles kgf/cm²	$9,81\times10^{5}$	98,1	0,98	10^{4}	$9,81\times10^{4}$	1	10
unités usuelles m d'eau (à 4°c)	$9,81\times10^{4}$	9,81	$9,81\times10^{-2}$	10^{3}	$9,81\times10^{3}$	0,1	1

exemple de lecture : 1 Barye = 10^{-4} pieze = 0,0102 kgf/m²

Exemple d'équivalence d'unité

- La pression atmosphérique au niveau de la mer 1 ATM (atmosphère) à 4°C.

$$1\,ATM \simeq 1,033\ kgf/cm^2 = 1033\ m\ \text{de hauteur d'eau}$$
$$= 1,033\ hpz = 1013\ \text{millibars} = 1,013\times10^{5}\ \text{pascals}$$

4) Coefficient de viscosité dynamique (N)

C'est le paramètre qui traduit l'effort tangentiel existant dans les liquides en mouvement. Si l'on considère deux plaques de surfaces S qui, écartées de dz, se meuvent avec la vitesse relative dv : la force pour produire le mouvement est :

$$F = N S \frac{dv}{dz}$$

N = Coefficient de viscosité dynamique de dimension $FL^{-2}t$

- Son unité en C G S est le poise et en MKS est le GIORI

1 GIORI = 10 poises

5) Coefficient de viscosité Cinematique (V)

$$V = \frac{N}{\rho}$$, son unité est le Stokes (cm^2/s)

ρ = masse volumique

6) Tension Superficielle

La disposition schematisée des molecules d'un liquide ci-dessus montre qu'une molecule à la surface de separation de deux milieux (liquides differents, liquide-gaz, liquide-solide) n'est plus soumise à l'action de forces symétriques. La résultante des forces moléculaire provoque la tension superficielle dont la direction est perpendiculaire (normale) à la surface de séparation.

$$df = \sigma . dl$$

σ = tension superficielle (dyne/cm)

La tension superficielle varie avec la température et la nature du liquide

Tensions superficielle de quelques liquides en présence de leur vapeur

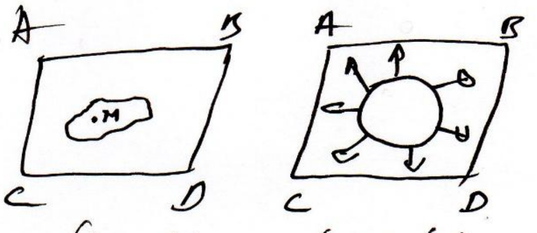
Corps	CCl_4	CS_2	$CHCl_3$	H_2O	C_8H_{18}
σ à 20°c ($dyne.cm^{-1}$)	26,7	32,2	27,3	72,7	21,7

Tension superficielle de l'eau et sa vapeur en fonction de la température

Température	20 °c	25 °c	50 °c	60 °c	80 °c
σ ($dyne.cm^{-1}$)	72,7	71,9	67,6	66,2	62,4

Expérience de la lame liquide

Si on pose une petite boucle de fil sur une lame liquide ABCD (figure ci-dessous), puis on pique la lame au point M à l'intérieur de la boucle, la boucle prendra la forme d'un cercle suite à la présence de force de tension agissants sur le fil.

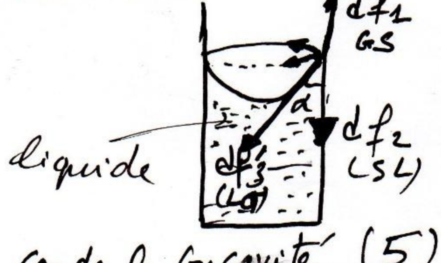


(Avant) (Après)

Formes des liquides en surface à l'intérieur des cappilaires

A l'intérieur des tubes cappilaires, les liquides prennent trois types de forme : plane, concave ou convexe. Ces formes dépendent de la tension superficielle (nature du liquide et parois).

- l'angle de raccordement (liquide-Solide) depend donc de la tension superficiel



Cas de la concavité

on constate la présence de trois types de surface de séparation de deux milieux de natures différentes en surface à savoir :

- surface 1 : gaz – solide (paroi du tube) (GS)
- surface 2 : solide – liquide (SL)
- surface 3 : liquide – gaz (LG)

Au niveau de l'élément dl commun, on y trouve trois composantes de forces engendrées par la tension superficielle

$$df_1 = \sigma_{GS} \cdot dl$$

$$df_2 = \sigma_{SL} \cdot dl$$

$$df_3' = \sigma_{LG} \, dl \cos\alpha$$

La résultante des forces est :

$$df_1 = df_2 + df_3'$$

$$\sigma_{GS} \cdot dl = \sigma_{SL} \, dl + \sigma_{LG} \, dl \cos\alpha$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\sigma_{GS} - \sigma_{SL}}{\sigma_{GL}}}$$

on voit donc que l'angle α dépend directement de la tension superficielle

7) Cappilarité

Le phenomene de la cappilarité se traduit par la remontée des liquides sous effet physique dans des tubes cappilaire. L'intensité de ce phenomène depend de la tension superficielle traitée précédement, de la masse volumique du liquide (plus précis de son poids spécifique) et du rayon du cappilaire.

La loi de Jurin ci-dessous permet le Calcul exact de la remontée cappilaire :
à savoir ;

$$h = \frac{2\,\sigma \cos\alpha}{r\,\varpi}$$

α = Angle de raccordement

σ = tension superficielle

r = rayon du cappilaire

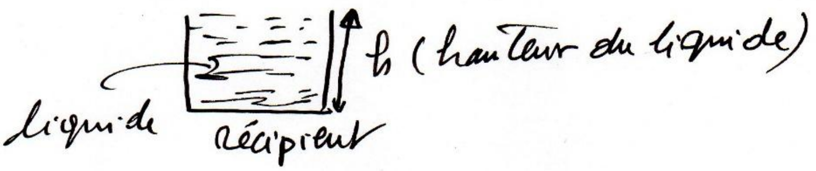
ϖ = poids spécifique du liquide.

8) Notion de pression

<u>Définition</u> : La préssion est une force par unité de surface

8) pression relative

Soit un récipient contenant un liquide quelconque.



$F = mg$

m = masse du liquide

g = pesanteur

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \frac{\rho \cancel{S} h g}{\cancel{S}}$$

S = surface de base du récipient

$$\boxed{P = \rho g h}$$

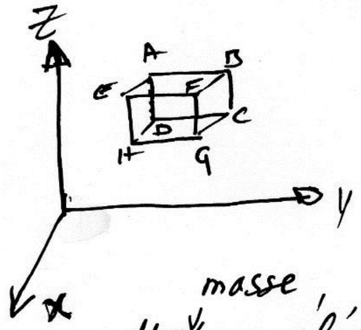
P : étant la pression hydrostatique appelée pression relative ou pression tout court.

La pression totale rencontrée dans un récipient contenant un liquide est égale à la somme de la pression relative à la pression atmosphérique.

Pression totale ou absolue = Pression atmosphérique + pression relative

9) <u>Equation fondamentale de la statique des fluides</u>

Soit une masse liquide, rapportée aux axes Ox, OY, OZ



Considérons dans cette masse, un élément infiniment petit parallepipède rectangle dont les arêtes dx, dy, dz sont parallèles aux axes.

Si ρ est la masse volumique du fluide, donc la masse du parallepipède est

$$\rho\, dx . dy . dz$$

<u>Conditions d'equilibre de cet élement:</u>

Les forces agissantes sur cet élément sont:

① Les forces exterieurs

② Les forces de pressions sur les faces

① les Forces exterieures

Soit F_x, F_y, F_z les Sommes des Composantes des forces suivant les axes OX, OY, OZ agissantes et rapportées à l'unité de masse.

F_x, F_y, F_z ont les dimensions d'une accélération Lt^{-2}.

pour le parallépipède $\begin{cases} \rho F_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ \rho F_y \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ \rho F_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{cases}$

ρ = masse volumique

② pression sur les six faces

$P_A = P$ et $P_E = P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$

La somme algébrique des deux pression P_A et P_E suivant l'axe Ox est donc :

$$P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx$$

on **déduit** que la somme des pression sur les deux faces (ABCD) et (EFGH) est égale à :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Suivant les trois axes, la somme est comme suit.

suivant Ox, elle egal à $-\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dy\, dz$

" Oy, " " " $-\frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \cdot dz \cdot dx$

Oz " " " $-\frac{\partial P}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy$

Condition d'equilibre

- La somme des forces est nulle

c'est à dire suivant Ox

$$\rho F_x \, dx.dy.dz - \frac{\partial P}{\partial x} . dx.dy.dz = 0$$

donnant donc

$$\rho F_x = \frac{\partial P}{\partial x}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F_x$$

En projetant de même sur les autres axes, on aura :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F_x \; , \; \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = F_y \; , \; \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = F_z$$

Il s'agit d'un système qui s'écrit en notation vectoriel comme suit :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{\rho} \, \overrightarrow{grad} P}$$

Ce système peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} . dx = F_x \, dx$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} . dy = F_y . dy$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} . dz = F_z . dz$$

En additionnant les premiers membres, on remarque que la somme est le produit de $\frac{1}{\rho}$ par la différentielle totale de la pression (dp) qui ne dépend ici que de x, y et z, le temps n'intervient pas en statique.

L'équation fondamentale de la statique des fluides est notée donc comme suit :

$$\frac{1}{\rho} \cdot dp = F_x . dx + F_y\, dy + F_z . dz$$

<u>Fonction de forces, surfaces équipotentielles</u>

Ce sont donc des surfaces d'égale pression qu'on appelle également, les surfaces de niveau, leur équation différentielle s'écrit :

$$dp = 0$$

c'est à dire

$$F_x . dx + F_y . dy + F_z\, dz = 0$$

Equilibre d'un liquide soumis uniquement à l'action de la pesanteur

Soit l'axe Oz vertical est positif vers le haut, dans ce cas

$$F_x = 0 , \quad F_y = 0 , \quad F_z = -g$$

Donc, l'équation fondamentale devient

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz$$

ou bien

$$dp + \rho g dz = 0$$

qu'on peut également écrire

$$\frac{p - p_0}{\bar{w}} = -(z - z_0)$$

La surface libre quand elle existe correspond à l'isobare de pression $\frac{p_0}{\bar{w}} = 0$

En prenant la surface libre comme plan horizontal, on obtient $z_0 = 0$ et $p = -\bar{w} z$

A la distance h au dessous de la surface libre $\boxed{p = \bar{w} h}$.

$\bar{w}$ étant le poids spécifique (ρg).

Donc, l'équation fondamentale devient

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz$$

ou bien

$$dp + \rho g dz = 0$$

qu'on peut également écrire

$$\frac{p - p_0}{\bar{w}} = -(z - z_0)$$

La surface libre quand elle existe correspond à l'isobare de pression $\frac{p_0}{\bar{w}} = 0$

En prenant la surface libre comme plan horizontal, on obtient $z_0 = 0$ et $p = -\bar{w} z$

A la distance h au dessous de la surface libre $\boxed{p = \bar{w} h}$.

$\bar{w}$ étant le poids spécifique (ρg).

10/ Résultante des pressions sur des surfaces planes

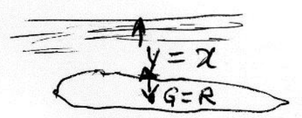
Dans le cas d'une surface plane, quelconque, horizontale, verticale ou inclinée dont une de faces est dans un liquide, l'autre face étant à la pression atmosphérique, il existe une résultante des pressions elémentaires que l'on désigne par poussée totale, elle est normale à la surface et possède la valeur (F) suivante:

$$F = \varpi y S$$

S = surface de la paroi

y = distance du centre de gravité à la surface libre.

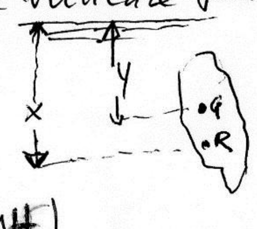
a) Cas d'une surface horizontale plane



G = centre de gravité, confondu avec le point d'application (R)
(y = x)

$F = \varpi y S$, x = distance du point d'application à la surface libre

b) Cas d'une surface verticale plane



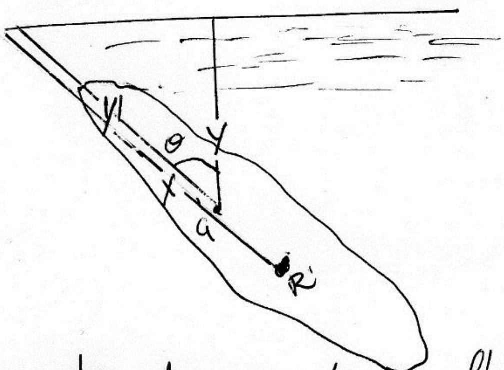
$$F = \bar{w}\, y\, S$$

point d'application

$$x = y + \frac{K^2}{y}$$

K est le rayon de giration de la surface par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité. (voir table ci-joint des rayons de giration des différentes formes géométriques).

c) cas d'une surface inclinée plane



$$F = \bar{w}\, y\, S$$
$$= \bar{w}\, y' S \cos\theta$$

y' = distance du centre de gravité à l'intersection du plan incliné avec la surface libre

θ = Angle du plan de la paroi avec la verticale

y = distance du centre de gravité à la surface libre

x = distance à la surface libre du point d'application R, est égal à

$$x = y + \frac{K^2 \cos^2\theta}{y}$$

On constate toujours que le point d'application coïncide avec le centre de gravité ou se trouve au dessous.

1.2/ Théorème des quantités de mouvement

Enoncé du théorème

C'est la résultante des dérivées des quantités de mouvement par rapport au temps des particules fluides intérieures à une surface S fermée dans un référentiel galiléen est égale à la résultante des forces extérieures qui leur seront appliquées.

$$\Sigma Fe = \Sigma m\gamma$$

Les forces internes exercées sur les particules s'annulent.

donc, on peut on peut écrire par rapport aux forces exterieur agissantes :

$$m\gamma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

L'équation s'écrit donc

$$\Sigma Fe = \frac{\Sigma d(mv)}{dt}$$

on peut donc, finalement définir que la quantité de mouvement d'une particule de masse m animée d'une vitesse v est le produit mv de dimension MLt^{-1} ou Ft.

1.3/ Théoreme de Bernouli

Introduction

On doit rappeler qu'en mécanique l'energie ou le travail est défini comme étant le produit d'une force par une longueur. L'énergie s'exprime donc par le kilogramme mètre (kgm) ou le kilowatt heure (k.w.h). Cependant en hydraulique, l'energie d'une certaine quantité de liquide en mouvement est rapportée en général à l'unité de poids c'est à dire force du lique qui s'ecoule. Elle représente la charge (E).

Soit une particule liquide en mouvement possedant une vitesse v, soumise à une pression P et située à la côte Z par rapport à un plan horizontal; elle possède par unité de poids les différents types d'energie spécifiques ou charges, appellés aussi hauteur à savoir;

a) Energie potentielle de pression

L'energie potentielle de pression (Wp) est egale à mgh. Sachant que :

$$mgh = \rho v g h$$

ρ = masse volumique de la particule liquide

Cette énergie, une fois rapportée à l'unité de poids, devient comme suit :

$$E_p = \frac{PV}{\varrho g V} = \frac{P}{\bar{\omega}}$$

$\bar{\omega} = \varrho g$ = poids spécifique

b) Energie potentielle de position (E_z)

La particule liquide, située à une hauteur (z) au dessus du plan horizontal, possède une énergie potentielle de position égale à ($\rho g v z$), une fois rapportée à l'unité de poids, devient comme suit :

$$E_z = \frac{\rho g v z}{\rho g v} = z$$

c) **Energie cinétique**

La particule en mouvement possédant une vitesse (v), possède une énergie cinétique égale à ($\frac{1}{2} m v^2$), une fois rapportée à l'unité de poids devient comme suit :

$$E_c = \frac{1/2\, m v^2}{\varrho g V} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

Si, on admet qu'il n'y a pas de forces de frottements l'équation de Bernouli s'écrit

$$E = z + \frac{P}{\bar{w}} + \alpha \frac{v^2}{2g} \qquad (18)$$

, α = coefficient de vitesse.

E = charge totale

Perte de charge entre deux sections droites (1 et 2) où l'écoulement est rectiligne

La perte de charge $\Delta E_{1.2}$ s'écrit

$$\Delta E_{1.2} = E_1 - E_2 = \left(z_1 + \frac{P_1}{\varpi} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\varpi} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right)$$

La puissance perdue par l'écoulement entre les deux sections 1 et 2 est égale à

$$P_{1.2} = \varpi \varphi \Delta E_{1.2}$$

φ = débit écoulé

ϖ = poids spécifique

Cette puissance peut être perdue par suite des frottements internes du fluide et des frottement sur les parois.

Elle peut être cédée par le fluide à une machine (cas d'une turbine) puis transformée en énergie mécanique.

Comme, elle peut être négative si elle est fournie par une machine (cas d'une pompe) à un fluide.

La charge gagnée est alors égale au rapport de la puissance fournie au débit en poids du fluide $(\varpi \varphi)$.