مقياس الإحصاء: الفوج 10 جذع مشترك علوم اجتماعية   الأستاذة زرقي

مقاييس التشتت (التباين): Measure of Variation

درسنا مقاييس النزعة المركزية ، ولكن غالباً ما تكون هذه المقاييس غير كافية لتمثل الواقع بشكل كامل أو لمقارنة مجموعتين من المشاهدات أو أكثر . إذا اعتبرنا المجموعتين التاليتين من القيم :

المجموعة الأولى : 5 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 15

المجموعة الثانية : 1 , 2 , 5 , 10 , 15 , 18 , 19

لوجدنا أن الوسط الحسابي لكل مجموعة هو 10 كما أن الوسيط هو نفسه للمجموعتين ويساوي 10 أيضاً ومع ذلك فهناك فرق بين المجموعتين حيث تختلف مفردات المجموعة الأولى عن مفردات المجموعة الثانية ، كما أن قيم المجموعة الثانية موزعة على مدى أوسع من المجموعة الأولى ويمكن أن نقول إن تشتت المجموعة الثانية أكبر منه في المجموعة الأولى . و يمكن قياس درجة التشتت بعدة مقاييس منها : المدى ، الانحراف عن المتوسط، التباين، والانحراف المعياري .

6-3 المدى : Range

المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة ما، فمدى المجموعة الأولى 15 - 5 = 10 .

بينما مدى المجموعة الثانية 18 = 19-1 لاحظ أن المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى .أما المدى لقيم معطاة في جدول توزيع تكراري فيحسب من الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا . ففي الجدول (3-5) المدى هو = 5 - 75 70 .

7-3 الانحراف المتوسط: Mean deviation

يعتبر الانحراف عن المتوسط أو (الانحراف المتوسط) أحد مقاييس التشتت .

ويعرف الانحراف المتوسط بأنه متوسط الفروق للبيانات عن وسطها الحسابي بقيمها المطلقة فإذا كانت لدينا مجموعة البيانات

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

وسطها الحسابي $\bar{x}$ فإنه يمكن حساب الانحراف المتوسط بالعلاقة التالية :

$$M_D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

المثال الانحراف المتوسط لمجموعة البيانات التالية :

5 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 15

إن المتوسط لهذه القيم $\bar{x} = 10$ فيكون الانحراف المتوسط

$$M_D = \frac{1}{7}[|5-10| + |6-10| + |8-10| + |10-10| + |12-10| + |14-10| + |15-10|] = 22/7$$

وبنفس الطريقة نجد أن الانحراف المتوسط للمجموعة الأخرى

1,2,5,10,15,18,19 هو 44/7

لاحظ من هذين المثالين أنه كلما كان الانحراف المتوسط كبيراً كلما كان التباعد بين القيم كبيـــــــــراً وكلمـــــــــا كـــــــــان صـــــــــغيراً كانـــــــــت القـــــــيم متقاربـــــــــة

أما في حالة البيانات المبوبة :

لحساب متوسط الانحرافات المطلقة لبيانات مبوبة نضيف على العلاقة السابقة تكرارات الفئات كما تعوض القيم بمراكز الفئات أي :
$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum n_i |X_i - \bar{X}|}{N}$$

و لحساب ذلك نتبع الخطوات التالية:

1- يحسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري أي $|X_i - \bar{X}|$

2- تحسب الفروق المطلقة بين مراكز كل فئة و الوسط الحسابي أ ي:

3- يضرب كل فرق في التكرار الخاص به ثم يجمع و نحصل : $\sum n_i |X_i - \bar{X}|$

4- و بقسمة ذلك المجموع على مجموع التكرارات نحصل على متوسط الانحرافات المطلقة للتوزيع .

مثال: التوزيع التكراري التالي يبن إنتاج **60** مزرعة من الفواكه بالطن .

الفئات	n_i	X_i	$n_i\ X_I$	$X_I - X$	$n_i \|X_i - X\|$
20 – 10	04	15	60	27	108
30– 20	09	25	225	17	153
40 – 30	16	35	560	07	112
50 – 40	13	45	585	03	39
60 – 50	10	55	550	13	130
70 – 60	06	65	390	23	138
80 – 70	02	76	150	33	66
المجموع	60	/	2520	/	746

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{N} = \frac{2520}{60} = \mathbf{42}$$

$$E_{\bar{X}} = \frac{\sum n_i |X_i - \bar{X}|}{N} = \frac{746}{60} = \mathbf{12.43}$$

.

8-3 التباين (التشتت): Variance

يعرف التباين بأنه الوسط الحسابي لمربعات فروقات البيانات عن وسطها الحسابي . ففي مجتمع ما إذا كان هذا المجتمع يتألف من n عنصر وكان وسطه الحسابي معطى وهو يساوي $\bar{x}$ فإن التباين (التشتت) σ^2 (ويقرأ σ^2 سكما مربع) للمجتمع يعطى بالشكل التالي :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (7-3)$$

إذا كانت القيم معطاة بشكل مفرد (غير مجدول) . أما إذا كانت القيم مبوّبة وسطها الحسابي $\bar{x}$ أي معطاة في جدول توزيع تكراري ذو k فئة ولدينا $\bar{x}$ معلومة فإن σ^2 يعطى بالشكل :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i \qquad ($$

حيث رمزنا بـ x_i ، f_i لمركز وتكرار الفئة i على الترتيب وكذلك $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

أما **تباين العينة** فإنه يعطى وبصورة مشابهة تماماً للطريقة أعلاه بالشكل التالي :

إذا كانت لدينا عينة حجمها n مسحوبة من مجتمع ما بحيث أن متوسط العينة $\bar{x}$ معطى فإن تباين العينة الذي يرمز له بالرمز s^2 يعطى بالشكل :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

إذا كانت القيم x_i معطاة بشكل غير مجدول (مفرد) . أما إذا كانت القيم معطاة بشكل مجدول فإنها تعطى بشكل مشابه لـ (3-8) بعد التقسيم على n-1 عوضاً عن n أي :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

حيث x_i ، f_i هما مركز الفئة وتكرارها على الترتيب .

مثال :

أوجد تباين العينة الممثلة بالبيانات 5,8,4,7,4,2

الحل : إن الوسط الحسابي لهذه البيانات هو $\bar{x} = 5$ ويكون التباين :

$$s^2 = \frac{1}{5}[(5-5)^2 + (8-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2] = \frac{24}{5} = 4.8$$

مثال 2: إليك توزيع علامات **15** طالب من ذوي الاحتياجات، أحسب التباين ؟

N_iX_i	NX_i^2		X_i	N_i	الفئات
12	144	144	12	01	14 – 10
48	768	256	16	03	18 – 14
100	1000	400	20	05	22 – 18
96	2304	576	24	04	26 – 22
56	1568	784	28	02	30 – 26
312	6784	/	/	15	المجموع

$$\bar{X} = \frac{\sum N_i X_i}{N} = \frac{312}{15} = 20,8$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum N_i X_i}{N} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{5784}{15} - 432,64$$

$$= 452,26 - 432,64 = 19,62$$

9-3 الإنحراف المعياري: Standard Deviation

نعرف الانحراف المعياري لعينة حجمها n مسحوبة من مجتمع ما بأنه الجذر التربيعي لتباين هذه البيانات وبالتالي فإن الانحراف المعياري للبيانات x_1 , x_2 , ... x_n والتي وسطها الحسابي $\bar{x}$ هو :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

أما في حال القيم المبوبة في جدول توزيع تكراري ذو k فئة فإن الإنحراف المعياري s يعطى بالشكل:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

)

وبشكل عام فإن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين إن كان للعينة أو المجتمع .
وعلى سبيل المثال فالإنحراف المعياري للبيانات المعطاة في المثال السابق 5,8,2,4,7,4, هو

$s = \sqrt{4.8} = 1.67$

الفئات	54–50	58–54	62–58	66–62	70–66	74–70	78–74
التكرارات	5	8	11	12	7	4	3

المطلوب:أحسب الانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

الـحـل:

الفئات	n_i	x_i	$n_i x_i$	X_i^2	$n_i x_i^2$
54 – 50	5	52	260	2704	13520
58 – 54	8	56	448	3136	25088
62 –58	11	60	660	3600	39600
66 –62	12	64	768	4096	49152
70 –66	7	68	476	4624	32368
74 – 70	4	72	288	5184	20736
78 – 74	3	76	228	5776	17328
المجموع	50	/	3128	29120	197792

– حساب المتوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum n_i X_i}{N} = \frac{3128}{50} = 62.56$

– **حساب الانحراف المعياري**: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i X_i^2}{N} - \bar{X}^2}$

$$\sigma = \sqrt{3955,84 - 3919,38}$$

$$\sigma = 6,03$$

ويجب أن نذكر هنا أن الانحراف المعياري للمجتمع يرمز له بالرمز σ وتقرأ (سكما . segma) أما الإنحراف المعياري للعينة فهو .

-عندما تكون البيانات كبيرة وغالباً ما تكون كذلك, يمكن استخدام علاقة بديلة عن علاقتي التباين (3-9) , (3-10) وتسمى العلاقتان البديلتان بالعلاقتين الحسابيتين حيث يمكن حساب التباين (التشتت) منهما بسهولة .

$$s^2 = \frac{1}{n-1}[\sum_{i-1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{x}^2] = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n(n-1)}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}[\ \sum_{1}^{k}\ x_i^2 f_i - n\bar{x}^2] = \frac{n\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - (\sum_{i=1}^{k} x_i f_i)^2}{n(n-1)}$$

وبالطبع العلاقة الأولى للقيم المفردة أما العلاقة الثانية فهي للبيانات المبوبة في جداول توزيع تكرارية ذو k فئة .

أمثلة عامة:

a) لتكن لدينا المجموعة التالية من القراءات والتي تمثل درجات عينة من 48 عامل على مقياس الضغط النفسي:

231	234	214	216	210	221	223	215
210	209	207	206	204	205	203	216
218	219	217	212	216	221	226	222
210	206	203	209	230	225	215	235
230	240	190	208	195	201	211	313
213	210	205	190	270	220	250	210

1- رتب هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

2- احسب متوسط طول السمكة الواحدة ثم احسب التشتت والانحراف المعياري

) أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات التالية :

19.1	22.5	19.9	21.9	22.8	22.0	23.0	23.2	20.5	4.6
21.4	21.1	20.9	20.8	19.8	22.2	22.6	21.7	19.4	21.3

معامل الاختلاف:

يستخدم لمقارنة التشتت بين مجموعتين (المتغيرات النفسية) وذلك للاختلاف الواضح في الوسط الحسابي لمجموعتين من حيث القيمة فصغر الوسط الحسابي في المجموعة الأولى في مقابل كبره في المجموعة الثانية وهو النسبة المئوية بين الانحراف المعياري والوسط الحسابي وبالتالي لا يعتمد على وحدات المتغير الأصلي وبالتالي يمكن استخدامه لمجموعتين مختلفتين في الوحدات، ويحسب من الصيغة الرياضية الآتية: معامل الاختلاف = 100(الانحراف المعياري ÷ الوسط الحسابي)

طرق حساب الانحراف المعياري:

أولاً: بيانات غير مبوبة

مثال:

احسب كلاً من التباين والانحراف المعياري للقيم i 12 ، 15 ، 11 ، 17 ، 18 ، 20 ، 19

الحل:

نكون جدول المعلومات التالي:

(Xi –`X)2	(Xi –`X)	Xi
16	12 – 16 = –4	12
1	15 – 16 = – 1	15
25	11 – 16 = – 5	11
1	17 – 16 = 1	17
4	18 – 16 = 2	18
16	20 – 16 = 4	20
9	19 – 16 = 3	19
∑ (Xi –`X)2 = 72	`X = 112/7 = 16	∑ Xi = 112

نحسب التباين من القانون أعلاه:

$$S^2 = [\sum (x_i - \bar{X})^2] / (n - 1)$$
$$= 72 / 6$$
$$= 12$$

الانحراف المعياري يساوي الجذر ألتربيعي للتباين أي:

$$S.D = 3.46$$

حل آخر باستخدام القيم دون الوسط الحسابي بعد وضع القانون أعلاه في صورة جديدة كما يأتي:

$$S^2 = [\sum (x_i - \bar{X})^2] / (n - 1)$$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum (X_i^2 - 2 X_i\bar{X} + (\bar{X})^2)$$

$2\bar{X}$ constant (in sample) Then $\sum 2 X_i\bar{X} = 2\bar{X} \sum X_i$

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum (X_i^2) - 2\bar{X} \sum(X_i) + \sum(\bar{X})^2$$

$\bar{X} = \sum(X_i) / n$ Then $\sum(X_i) = n\bar{X}$, $\sum(X_i)^2 = n^2(\bar{X})^2 \rightarrow (\sum X_i)^2 / n = n^2(\bar{X})^2 / n = n\bar{X}^2$

$$= \sum (X_i^2) - 2n(\bar{X})^2 + n(\bar{X})^2$$

$$= \sum (X_i^2) - n(\bar{X})^2$$

$,\bar{X} = \sum(X_i) / n \rightarrow \bar{X}^2 = \sum(X_i)^2 / n^2 \rightarrow$ (بالضرب في n) $\rightarrow n\bar{X}^2 = (\sum X_i)^2 / n$

$$= \sum (X_i^2) - (\sum X_i)^2 / n$$

$$S^2 = [\sum (X_i^2) - (\sum X_i)^2 / n] / (n - 1) \ldots (1)$$

Or

$$S^2 = [(\sum X_i^2) - n\bar{X}^2] / (n - 1) \ldots (2)$$

الجدول الآتي هو تعديل للجدول أعلاه:

X_i^2	X_i
144	12
225	15
121	11
289	17

324	18
400	20
361	19
$\sum Xi2 =$ 1864	$\sum Xi = 112$

بتطبيق هذه الصيغة رقم :(1)

$S2 = [\sum (Xi2) - (\sum Xi)2 / n] / (n - 1)$

$S2 = [1864 - (112)2 / 7] / (7 - 1)$

$S^2 = [1864 - 1792] / 6$

$S^2 = 72 / 6$

$S^2 = 12$

التباين

الانحراف المعياري هو الجذر ألتربيعي للتباين أي:

S.D = 3.46