Chapitre 4

Mesure produit et théorème du changement de variable

.1 Notion de mesure produit

On suppose ici que tous les ensembles mesurés sont σ-finis. On rappelle la définition

Définition 24. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit qu'il est* σ-**fini** *s'il existe une suite* (E_n) *croissante d'éléments de* $\mathcal{T}$ *telle que* $\bigcup E_n = X$ *et* $\mu(E_n) < +\infty$.

Exemple 26. Par exemple $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ est σ-fini car les $E_n := [-n, n]$ forment une suite croissante de boréliens de mesure $2n < +\infty$ dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$.

L'objectif ici est de définir à partir de $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ un produit d'espaces mesurés sur $X \times Y$. Nous aurons besoin d'une hypothèse technique dans la suite (qui est toujours vérifiée en pratique) c'est que les espaces mesurés soient σ-finis.

Avant de définir la mesure produit, on définit la tribu produit.

Définition 25. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *et* $(Y, \mathcal{S})$ *deux espaces mesurables. Alors on définit*

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{S} := \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{T} \text{ et } B \in \mathcal{S}\})$$

la tribu sur $X \times Y$.

Proposition 49. *Soit* $(Z, \mathcal{R})$ *un espace mesurable. Alors* $f : Z \to X \times Y$ *qui envoie* z *sur* $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$ *alors* f *est mesurable pour la tribu produit sur* $X \times Y$ *si et seulement si* f_X *et* f_Y *sont mesurables.*

Démonstration. Si f est mesurable et $T \in \mathcal{T}$, $f_X^{-1}(T) = f^{-1}(T \times Y) \in \mathcal{R}$ et donc f_X est mesurable. De même f_Y est mesurable.

Réciproquement, si f_X et f_Y sont mesurables et $(T, S) \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}$ alors $f^{-1}(T \times S) = f_X^{-1}(T) \cap f_Y^{-1}(S)$ or f_X et f_Y sont mesurables donc $f_X^{-1}(T)$ et $f_Y^{-1}(S)$ sont dans $\mathcal{R}$ et donc $f^{-1}(T \times S) \in \mathcal{R}$. D'où f est mesurable. □

On peut étendre cette notion de produit de tribus $(X_1, \mathcal{T}_1)$, ..., $(X_d, \mathcal{T}_d)$ à un nombre fini quelconque.

$$\mathcal{T}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_d = \sigma(\{T_1 \times \cdots \times T_d \mid T_i \in \mathcal{T}_i\})$$

Le lemme qui suit permet de justifier que le produit de d tribus s'identifie au produit successif de deux tribus.

Lemme 10. *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ et $(X_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables alors*

$$(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes (\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3) = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3.$$

Démonstration. On se contente de montrer que $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3$.

Si $(T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_3$ alors $(T_1 \times T_2) \times T_3 \in (\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3$. Ainsi la tribu engendrée par les $T_1 \times T_2 \times T_3$ est contenue dans $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3$ d'où

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3 \subseteq (\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3.$$

Réciproquement, on fixe $T_3 \in \mathcal{T}_3$. Soit

$$\mathcal{R} := \{T \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \mid T \times T_3 \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3\}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une tribu. Puisque pour tout $T_1 \in \mathcal{T}_1$, $T_2 \in \mathcal{T}_2$, $T_1 \times T_2 \in \mathcal{R}$, on en déduit que $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{R}$. Puisque l'inclusion réciproque est évidente, on a égalité et donc

$$\mathcal{R} \otimes \mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3.$$

D'où l'égalité. □

Un cas particulièrement important est celui des tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 10. *Soit $d \geq 1$, alors*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{d \text{ fois}}.$$

Démonstration. D'une part, il est clair que tout produit de boréliens sera un borélien de telle sorte que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est clairement contenu dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Réciproquement, on a vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ était engendré par les ouverts du type $U_1 \times \cdots \times U_d$ avec les U_i ouverts de $\mathbb{R}$. Puisque ces ouverts sont contenus dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a l'inclusion de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'où l'égalité. □

Dans la suite, nous allons définir une mesure sur le produit de deux espaces mesurés $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$. Pour cela, on commence par démontrer un lemme sur les sections.

Soit $R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ et $(a, b) \in X \times Y$ alors on définit

$$R_a = \{y \in Y \mid (a, y) \in R\} \text{ et } R^b = \{x \in X \mid (x, b) \in R\}.$$

Lemme 11. *Pour tout $R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ et $(a, b) \in X \times Y$, $R_a \in \mathcal{S}$ et $R^b \in \mathcal{T}$.*

De plus, $a \mapsto \nu(R_a)$ et $b \mapsto \mu(R^b)$ sont mesurables.

Démonstration. Soit $a \in X$, notons $\mathcal{R} := \{R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \mid R_x \in \mathcal{S}\}$ alors on vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une tribu. De plus, si $R = T \times S$ avec $T \in \mathcal{T}$ et $S \in \mathcal{S}$ alors on vérifie facilement que $R_a = \emptyset$ si $a \notin T$ et $R_a = S$ si $a \in T$. Ainsi, $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ est contenu dans $\mathcal{R}$ d'où l'égalité entre les deux. Ainsi tout $R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, $R_a \in \mathcal{S}$.

On reprend la notion de λ-système abordée dans la feuille de TD4. Notons

$$\Lambda := \{R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \mid a \mapsto \nu(R_a) \text{ est mesurable}\}$$

— Montrons que Λ est un λ-système. Clairement, $\emptyset \in \Lambda$ de plus si (R_n) est une suite croissante d'éléments de Λ alors pour tout $a \in X$,

$$\nu\left(\left(\bigcup_n R_n\right)_a\right) = \nu\left(\bigcup_n R_{n,a}\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(R_{n,a})$$

on a donc exprimé $a \mapsto \nu\left(\left(\bigcup_n R_n\right)_a\right)$ comme limite de suites de fonctions mesurables. Finalement si $R, S \in \Lambda$ avec $R \subseteq S$ alors pour tout $a \in X$, $\nu((R \setminus S)_a) = \nu(R_a \setminus S_a) = \nu(R_a) - \nu(S_a)$ et donc $a \mapsto \nu((R \setminus S)_a)$ est mesurable.

— De plus Λ contient le π-système $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$, en effet si $R = T \times S$ et $a \in X$ alors $R_a = S$ si $a \in T$ et $R_a = \emptyset$ si $a \notin T$, autrement dit $\nu(R_a) = 1_T(a)\nu(S)$ qui est donc mesurable.

— D'après le dernier exercice de la feuille 4, puisque $\sigma(\mathcal{T} \times \mathcal{S}) = \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, on en déduit que $\Lambda = \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$. D'où pour tout $R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, $a \mapsto \nu(R_a)$ est mesurable.

□

On en vient au théorème sur les mesures produits.

Théorème 11. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*

1. *il existe une unique mesure m sur $(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$ telle que $m(T \times S) = \mu(T)\nu(S)$ pour tout $T \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{S}$,*
2. *de plus pour tout $C \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$,*

$$m(C) = \int_X \nu(C_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)d\mu(y).$$

Démonstration. Par le théorème de caractérisation des mesures à la fin du Chapitre 4, l'unicité est immédiate car deux mesures m et m' vérifiant $m(T \times S) = \mu(T)\nu(S) = m'(T \times S)$ coincident sur le π-système $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$. L'unicité est donc claire.

Pour l'existence on passe au deuxième point. Pour tout $R \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, on définit

$$m(R) := \int_X \nu(R_x)d\mu(x)$$

Il est clair que $m(\emptyset)$. Si (R_n) est une suite d'éléments deux-à-deux disjoints de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup R_n\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup R_{n,x}\right) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_n \nu(R_{n,x})d\mu(x) \text{ par } \sigma\text{-additivité de } \nu \\ &= \sum_n \int_X \nu(R_{n,x})d\mu(x) \text{ par Beppo-Levi} \\ &= \sum_n m(R_n) \end{aligned}$$

D'où m est une mesure.

Finalement, on vérifie facilement que $m(T \times S) = \mu(T)\nu(S)$. De même si l'on définit $m'(R) := \int_Y \mu(R^y)d\mu(y)$, on montre que $m'(T \times S) = \mu(T)\nu(S)$. D'où la conclusion par unicité démontrée au premier point de ce théorème. □

Définition 26. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. L'unique mesure caractérisée dans le théorème précédent est appelée la* **mesure produit** *de μ et ν, on la notera $\mu \otimes \nu$.*

On vérifie facilement que $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$. On peut donc parler de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ sur 3 espaces mesurés.

Corollaire 15. *Soit $d \geq 1$. La mesure de Lebesgue $\lambda_d = (\lambda_1)^{\otimes d}$.*

Démonstration. Au vue de la définition précédente, on voit facilement que pour tout hyperpavé $[a_1, b_1] \times \cdots [a_d, b_d]$, on a

$$(\lambda_1)^{\otimes d}([a_1, b_1] \times \cdots [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \times \cdots (b_d - a_d).$$

Il est alors clair, par unicité de la mesure de Lebesgue, $\lambda_d = (\lambda_1)^{\otimes d}$. □

Une intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ pour la mesure de Lebesgue est appelée **intégrale multiple**.

On commence avec un théorème de calcul pour les intégrales produits de fonctions positives. Ce théorème est le **théorème Fubini-Tonelli**. Ce théorème permet d'intervertir le sens d'intégration de fonctions sur un produit.

Théorème 12. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}_+}$.*

a) Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables.

b) $\displaystyle\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\nu(x) \right) d\mu(y)$

Démonstration. a) Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable. Ensuite on approche f par une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives. La mesurabilité de $x \mapsto \int_Y f_n(x, y) d\mu(y)$ quand f_n est étagée s'obtient alors avec le lemme précédent le théorème. Ensuite la limite quand n tend vers $+\infty$ est $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ par Beppo-Levi. Elle est donc mesurable comme limite de fonctions mesurables.

b) Avec le point a) les intégrales sont bien définies. Si $f = 1_C$ l'égalité du point b) est donnée par le théorème, on en déduit facilement l'égalité pour toutes les fonctions étagées positives. Ensuite, on en déduit l'égalité par approximation de fonctions mesurables positives par une suite croissante (f_n) de fonctions étagées et en utilisant Beppo-Levi.

□

Quand la fonction n'est pas positive, on peut également intervertir les intégrales sous hypothèse d'intégrabilité, il s'agit du **théorème de Fubini-Lebesgue**.

Théorème 13. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ dans $\mathbb{C}$. Alors*

a) $\mu(x)$-presque partout, $y \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ et $\nu(y)$-presque partout, $x \mapsto f(x, y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

b) les fonctions respectivement définies $\mu(x)$-presque partout et $\nu(y)$-presque partout

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ et } y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\nu)$ respectivement et de plus

c) $\displaystyle\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\nu(x) \right) d\mu(y).$

Démonstration. Le cas complexe se gère facilement en considérant $f = Re(f) + Im(f)$. On se ramène donc au cas réel.

a) Par le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $f^{\pm}$, on a

$$\int_X \left(\int_Y f^{\pm} d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) \leq \int_{X\times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty$$

On en déduit que, $\mu(x)$-presque partout, $\int_Y f^{\pm}(x,y)d\nu(y)$ est finie (car $\{g = +\infty\}$ est négligeable si g est positive d'intégrale finie). De même $\int_X f f^{\pm}(x,y)d\mu(x)$ est finie $\nu(y)$-presque partout. D'où le point a).

b) Pour le point b), on remarque que :

$$\left| \int_Y f(x,y)d\nu(y) \right| \leq \int_Y f^+(x,y)d\nu(y) + \int_Y f^-(x,y)d\nu(y)$$

ces deux dernières fonctions étant intégrables sur X en vertu de l'inégalité établie au point a), on en déduit que $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. De même pour $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$.

c) L'égalité annoncée se déduit immédiatement des égalités correspondantes obtenues pour f^+ et f^- à partir du théorème de Fubini-Tonelli.

$\square$

L'hypothèse d'intégrabilité est importante, comme le montre le contre-exemple suivant.

Contre-exemple 5. Soit $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}e^{-2xy} - e^{-xy}$ une fonction définie sur $[0,+\infty[\times[0,1]$. Alors f est continue donc clairement borélienne sur $\mathcal{B}([0,+\infty[) \otimes \mathcal{B}([0,1])$. Pour tout $y > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \left[\frac{-1}{ye^{2xy}} + \frac{1}{ye^{xy}} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{-1+1}{y} = 0.$$

D'où $\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy = \int_0^1 0dy = 0$. Par contre, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^1 f(x,y)dy = \left[\frac{-1}{xe^{2xy}} + \frac{1}{xe^{xy}} \right]_0^1 = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} - \frac{-1+1}{x} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

On vérifie facilement que cette fonction de x est intégrable sur $0, +\infty$ (équivalente à 1 en 0 et à $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$ qui est intégrable). Cette fonction est strictement positive et continue donc son intégrable est strictement positive. En particulier,

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy.$$

7.2 Le théorème de changement de variable

Dans cette section nous allons présenter un théorème très utile pour calculer des intégrales multiples sur $\mathbb{R}^d$ ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. On admettra tous les résultats de cette section car ils reposent sur des notions de calcul différentiel à voir au prochain semestre. À cette fin, on présente un outil qui a déjà été vu pour étudier les fonctions à plusieurs variables : la notion de dérivée partielle.

Définition 27. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$. Soit $1 \leq j \leq d$, la j-**ème dérivée partielle** en $u = (u_1, \dots, u_d) \in U$ est la dérivée, si elle existe, de la fonction $t \mapsto f(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + t, u_{j+1}, \dots, u_d)$ en $t = 0$. On la note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u).$$

Exemple 27. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envoyant (r, θ) sur $p(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r, \theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ et } \frac{\partial p}{\partial r}(r, \theta) = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta)).$$

Si f est une fonction d'un ensemble X vers $\mathbb{R}^d$ alors pour $1 \leq i \leq d$, on note f^i la i-ème coordonnée de f.

Définition 28. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$, on dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si toutes les dérivées partielles de f sont définies sur U et que ces fonctions dérivées partielles sont continues.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application

$$J_f : \left| \begin{array}{ccc} U & \to & M_{d,d}(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_d}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^d}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial f^d}{\partial x_d}(u) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est appelée **application jacobienne** *de f. Pour tout $u \in U$, $J_f(u)$ est appelée* **jacobienne** *de f en u.*

Exemple 28. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envoyant (r, θ) sur $p(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors

$$J_p(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On remarquera que $\det(J_p(r, \theta)) = r$.

L'application jacobienne est la généralisation de la notion de dérivée aux fonctions de plusieurs variables.

Avant de passer au théorème du changement on présente la notion essentielle en calcul différentiel de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Définition 29. *Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Une application $\phi : U \to V$ est appelé* **$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme** *si ϕ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et admet une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.*

Il est souvent pénible de montrer qu'une application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme à partir de la définition. Le théorème qui suit permet de caractériser les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes à partir de la jacobienne.

Théorème 14. *Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Une application $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si et seulement si ϕ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout $u \in U$, $\det(J_f(u)) \neq 0$.*

Admis. □

Exemple 29. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envoyant (r, θ) sur $p(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors p est un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$.

On peut maintenant énoncer le théorème du changement de variable :

Théorème 15. *Soit $d \geq 1$. U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $f : U \to V$ un difféomorphisme et $\psi : V \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(V, \mathcal{B}(V), \lambda_d)$ alors $u \mapsto \psi \circ f(u)|\det(J_f(u))|$ est intégrable sur U pour la mesure λ_d de plus*

$$\int_V \psi(v)dv = \int_U \psi \circ f(u)|\det(J_f(u))|du.$$

Admis. □

Dans la pratique, l'intégrale de ψ n'est pas calculée sur un ouvert V mais sur un fermé F. Pour appliquer le théorème, il faut absolument se ramener à un ouvert. Le plus souvent, il suffit d'enlever une partie λ_d-négligeable à F pour se ramener à un ouvert V. L'intégrale reste alors inchangée (car on enlève seulement un ensemble négligeable).

Le théorème du changement de variable permet notamment de calculer l'intégrale d'une gaussienne.

Corollaire 16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Démonstration. Remarquons que

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_{]0,+\infty[^2} e^{-x^2}e^{-y^2}d\lambda_2(x,y)$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini-Tonelli. Ensuite, on effectue un changement de variable $p :]0,+\infty[\times]0,\pi/2[\to]0,+\infty[^2$ envoyant (r,θ) sur $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Comme remarqué précédemment, $\det(J_p(r,\theta)) = r$. Le théorème de changement de variable nous permet de remarquer que

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[^2} e^{-x^2}e^{-y^2}d\lambda_2(x,y) &= \int_{]0,+\infty[\times]0,\pi/2[} re^{-r^2}d\lambda_2(r,\theta)\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr\right)d\theta\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

On en déduit que

Corollaire 17. *La fonction qui envoie un borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_B e^{-x^2}dx$ est une mesure de probabilité.*

Démonstration. On a déjà vu dans l'exercice 10 de la feuille 5 que ceci définit une mesure. La seule chose à montrer est donc que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = 1$. Or

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

D'où la conclusion. □