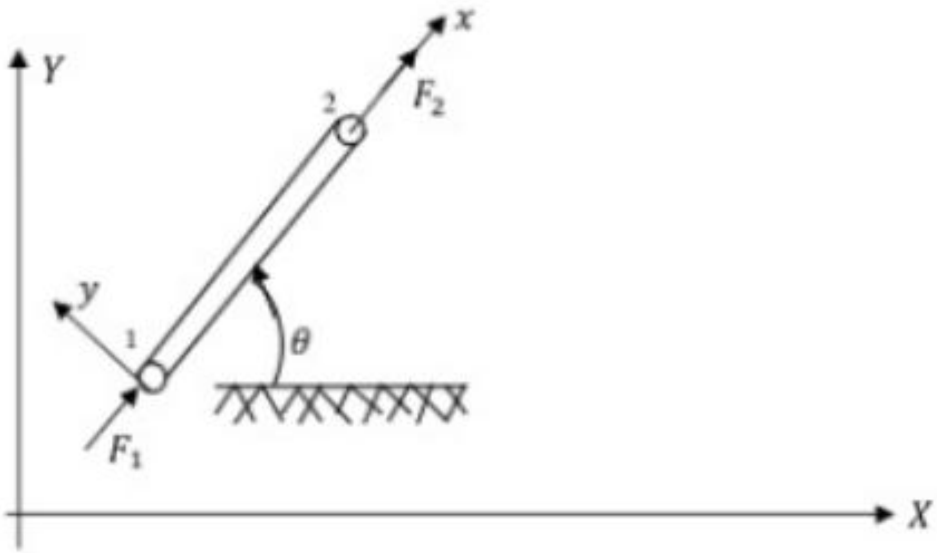
Chapitre 4

Analyse d'un élément bidimensionnel

4.1 Introduction

Considérons l'élément de membrure à deux forces positionnées arbitrairement dans le plan global (X, Y) :



XY : axe de coordonnée globales

xy : axe de coordonnées locales

Soient :

F_{1X} la composante de F_1 au nœud 1 dans la direction globale X

F_{1x} la composante de F_1 au nœud 1 dans la direction locale x

F_{1Y} la composante de F_1 au nœud 1 dans la direction globale Y

F_{1y} la composante de F_1 au nœud 1 dans la direction locale y

Les déplacements nodaux sont représentés par :

u_{iX} : déplacement du nœud i dans la direction globale X

u_{ix} : déplacement du nœud i dans la direction locale x

v_{iY} : déplacement du nœud i dans la direction globale Y

v_{iy} : déplacement du nœud i dans la direction locale y

Pour l'élément considéré :

$$F_{1y} = 0 \text{ et } F_{2y} = 0 \tag{1}$$

On peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Transformons l'équation à deux déplacements en équation à quatre déplacements :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ v_{1y} \\ u_{2x} \\ v_{2y} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Ou ;

$$\{Q\}_{xy} = [k]_{xy} \cdot \{q\}_{xy} \tag{4}$$

où

$\{Q\}_{xy}$: vecteur colonne des forces au nœud de l'élément agissant dans les directions locales x et y.

$[k]_{xy}$: matrice de rigidité de l'élément dans le système de coordonnées locales au plan local

$\{q\}_{xy}$: vecteur colonne des coordonnées du déplacement dans les directions locales x et y.

4.2 Transformation des coordonnées

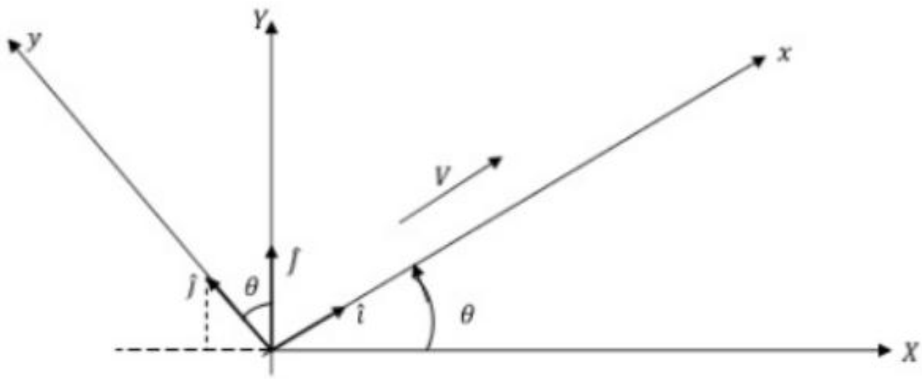
Dans une structure générale, beaucoup d 'éléments sont donnés et devraient être orientés à différentes valeurs de l'angle θ.

Soit V un vecteur qui s'écrit dans le système des coordonnées globales :

$$V = [\hat{I} \quad \hat{J}] \cdot \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \end{Bmatrix} = V_X \hat{I} + V_Y \hat{J} \tag{5}$$

Le vecteur V s'écrit dans le système des coordonnées locales comme suit :

$$V = [\hat{\imath} \quad \hat{\jmath}] \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = V_x \hat{\imath} + V_y \hat{\jmath} \tag{6}$$



Dans la rotation d'angle θ on a :

$$[\hat{\imath} \quad \hat{\jmath}] = [\mathrm{I} \quad J] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [\mathrm{I} \quad J] \cdot [A] \tag{7}$$

où θ est mesuré positivement dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe X.

Donc ;

$$V = [\mathrm{I} \quad J] \cdot \begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \end{Bmatrix} = V = [\mathrm{I} \quad J] \cdot [A] \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \tag{8}$$

D'où ;

$$\begin{Bmatrix} V_X \\ V_Y \end{Bmatrix} = [A] \cdot \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} \tag{9}$$

C'est la relation de transformation de tout vecteur V dans un système d'axe en rotation.

Les éléments de la matrice carrée [A] sont les directions cosinus des angles entre les vecteurs unitaires des deux systèmes de coordonnées.

$$[\mathrm{I} \quad J] = [\hat{\imath} \quad \hat{\jmath}] \cdot {}^{t}A \tag{10}$$

où la matrice ${}^{t}A$ est la transposée de la matrice $[A]$

Dans le cas général d'une rotation d'un système de coordonnées orthogonales

$$[A]^T = [A]^{-1} \tag{11}$$

- Considérons la transformation du vecteur force de l'équation (8) du système de coordonnées locales (x,y) en système de coordonnées globales (X,Y):

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} \qquad \textit{Force nodale 1}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2X} \\ F_{2Y} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} \qquad \textit{Force nodale 2}$$

- En combinant ces deux relations on obtient le vecteur force nodale de l'élément entier :

$$\{Q\}_{XY} = [A_2]\{Q\}_{xy} \tag{12}$$

Ou bien ;

$$\begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} [A] & [0] \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ [0] & [A] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Avec ;

$$[A_2] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

En rappelant l'équation :

$$\{Q\}_{xy} = [k]_{xy} \cdot \{q\}_{xy}$$

Et en la substituant dans (12), on obtient :

$$\{Q\}_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot \{q\}_{xy} \tag{13}$$

La matrice de transformation [A2] peut être aussi appliquée au vecteur déplacement :

$$\begin{Bmatrix} u_{1X} \\ v_{1Y} \\ u_{2X} \\ v_{2Y} \end{Bmatrix} = [A_2] \cdot \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ v_{1y} \\ u_{2x} \\ v_{2y} \end{Bmatrix}$$

Ou bien ;

$$\{q\}_{XY} = [A_2] \cdot \{q\}_{xy} \quad \Rightarrow \{q\}_{xy} = [A_2]^{-1}\{q\}_{XY}$$

D'où l'équation (13) devient :

$$\{Q\}_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot [A_2]^T \cdot \{q\}_{xy} \tag{14}$$

De la forme :

$$\{Q\}_{XY} = \{k\}_{XY} \cdot \{q\}_{XY}$$

$$\Longrightarrow [k]_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot [A_2]^T$$

La relation (14) transforme la matrice de rigidité de l'élément local (écrit originellement en système de coordonnées locales) en système de coordonnées globales.

Ou d'une autre façon :

$$[K]_{system\ coord.} = EA/L \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

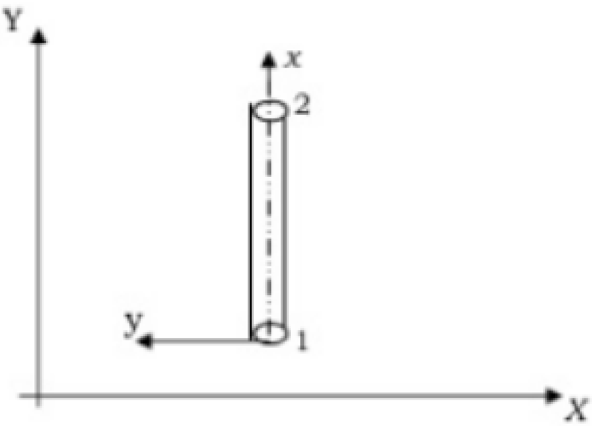
$$= EA/L \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

3.3 Applications

- ***Exemple 1***

On considère l'élément de la figure suivante :

Construire la matrice de rigidité de la structure relativement au système de coordonnées globales $(X\,Y)$



- ***Solution***

- Matrice de rigidité par rapport au système global (XY) :

Le système local $(x\,y)$ est appliqué à l'origine au nœud 1. La matrice de rigidité locale de cet élément relativement au système local $(x\,y)$ est donné par :

$$[k]_{xy} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité relativement au système global XY es obtenue en utilisant l'équation (14) suivante :

$$[k]_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot [A_2]^T$$

Où pour θ=90° on obtient :

- *La matrice de transformation*

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [A_2]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *La matrice de rigidité globale*

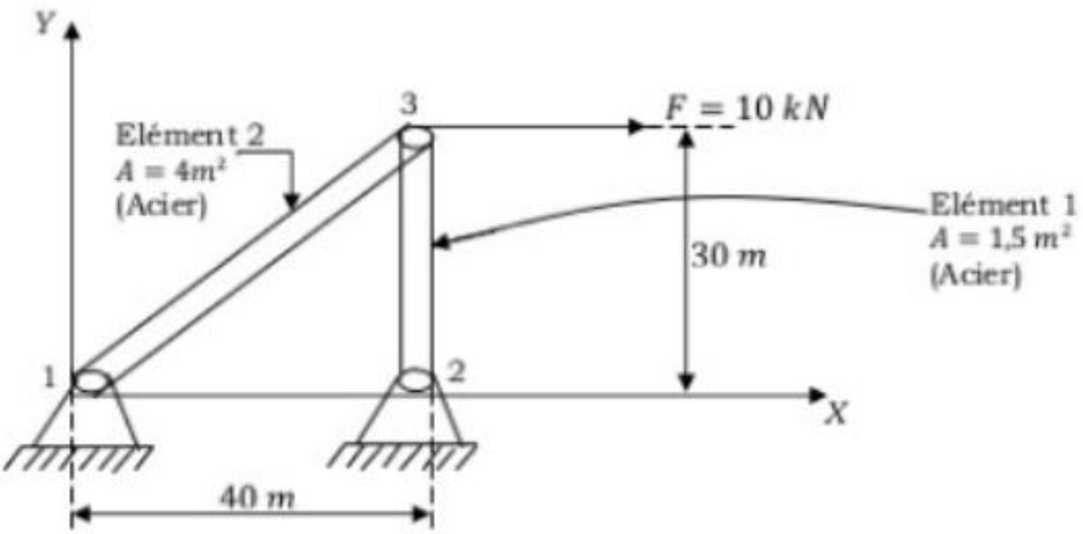
$$[k]_{XY} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où ;

$$[k]_{XY} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

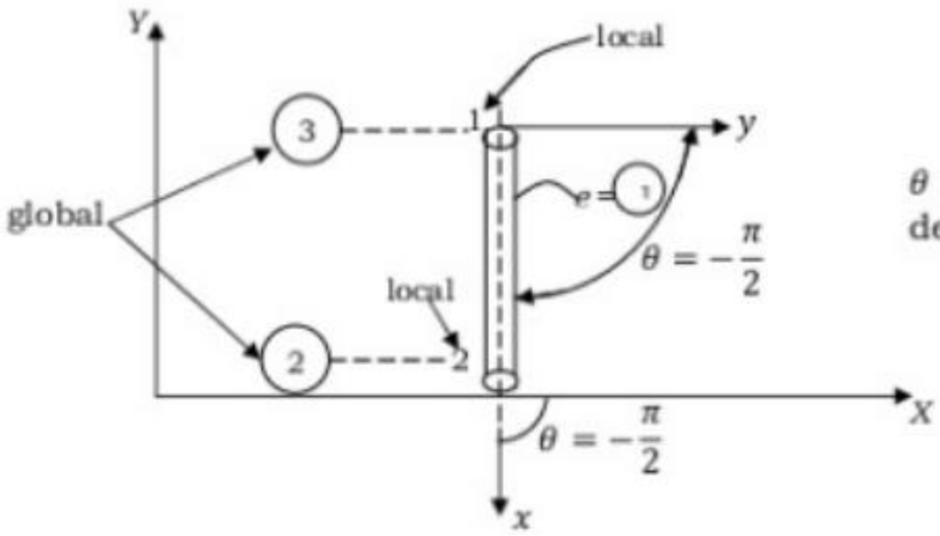
- ***Exemple 2***

Trouver la matrice de rigidité de chaque élément relativement au système de coordonnées global XY pour la structure de la figure suivante :



- **Solution**

- Considérons l'élément 1 de la figure.
- Définissons arbitrairement le nœud global 3 comme nœud local 1 de cet élément.



θ est compté à partir de X

- La matrice de rigidité relativement au système local xy est définie par l'équation suivante :

$$[k]_{xy} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ où } k_1 = \left(\frac{AE}{L}\right)_1$$

- La matrice de rotation [A2] s'écrit :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, l'équation (14) donne :

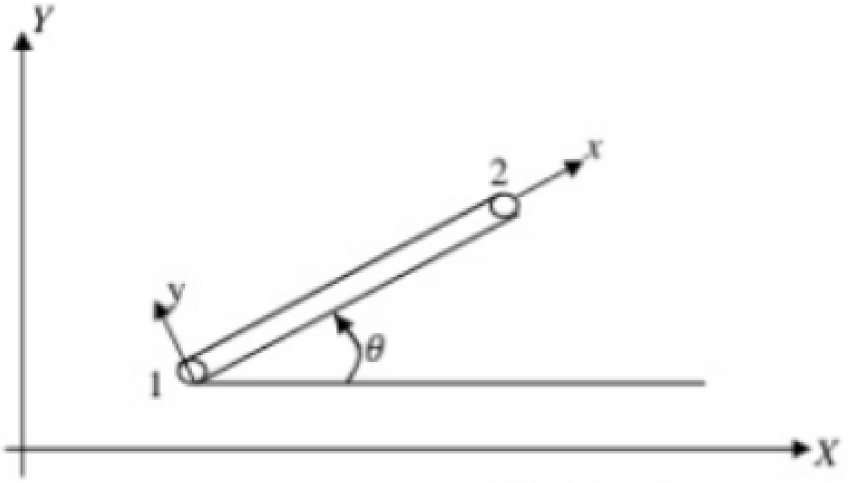
$$[k]_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot [A_2]^T$$

$$[k]_{XY} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où la matrice de rigidité de l'élément 1 dans le système global XY est :

$$[k]_{XY} = k_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pour l'élément } 1$$

- Considérons l'élément (2) de la figure et définissons le nœud global 1 comme nœud local 1. En suivant la même procédure précédente on a :



$$[k]_{xy} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad k_2 = \left(\frac{AE}{L}\right)_2$$

La matrice de rotation [A2] s'écrit :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Ainsi l'équation 14 donne :

$$[k]_{XY} = [A_2] \cdot [k]_{xy} \cdot [A_2]^T$$

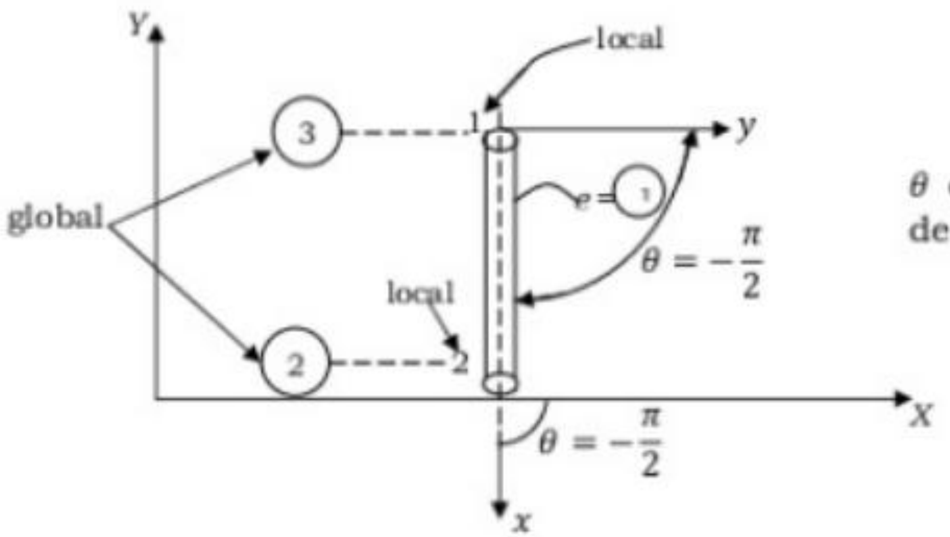
$$[k]_{xy} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

D'où la matrice de rigidité de l'élément 2 dans le système global XY est :

$$k_{xy} = k_2 \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \text{ pour l'élément } 2$$

- ***Assemblage des éléments***

Considérons l'élément à deux barres de l'exemple 2. Assembler les matrices de rigidité des éléments de la structure pour obtenir la matrice de rigidité du système global.



θ est compté à partir de X

1. La première étape dans la procédure d'assemblage des matrices est d'attribuer des numéros à chaque variable de déplacement. Sur la base de référence locale en dimension 1 les 4 déplacements (2 déplacements par nœud pour chaque nœud par élément) seront numérotées consécutivement de 1 à 4.

- Numéro nodal local :	1	1	2	2
- Déplacement local :	u_1	v_1	u_2	v_2
- Numéro de déplacement local :	1	2	3	4

2. La deuxième étape consiste à attribuer à chaque déplacement global des numéros. Puisqu'il y a 3 nœuds dans ce problème, il y a 6 déplacements avant l'application des contraintes aux limites :

- Numéro nodal global :	1	1	2	2	3	3
- Déplacement global :	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3

Node	System displacements
1	u_1, u_2
2	u_3, u_4
3	u_5, u_6

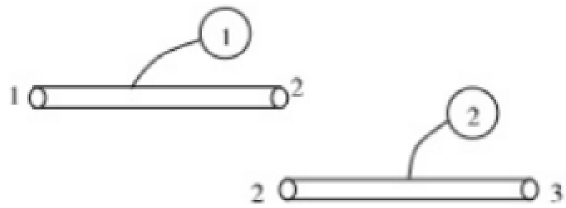
Remarquons que le numéro de déplacement global est lié au numéro nodal global par la relation :

Numéro de déplacement global dans la direction $X = 2(\textit{Numéro nodal global}) - 1$

Numéro de déplacement global dans la direction $Y = 2(\textit{Numéro nodal global})$

3. La 3[e] étape consiste à établir la numérotation nodale le long des lignes de la table suivante :

Numéro d'élément	Numéro nodal global	
	Nœud local 1	Nœud local 2
1	1	2
2	2	3



Pour ce problème à deux éléments on doit avoir :

I (Numéro de l'élément)

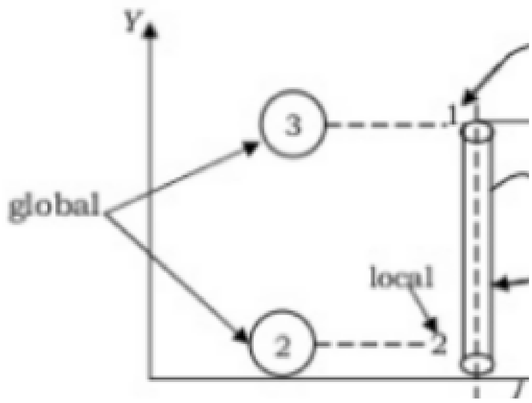
I \ J	1	2	
1	3	2	← Elément 1
2	1	3	← Elément 2
	↑ Nœud local 1	↑ Nœud local 2	

J Nœud

Les attributions locales et globales de l'élément (1) se présentent comme suit :

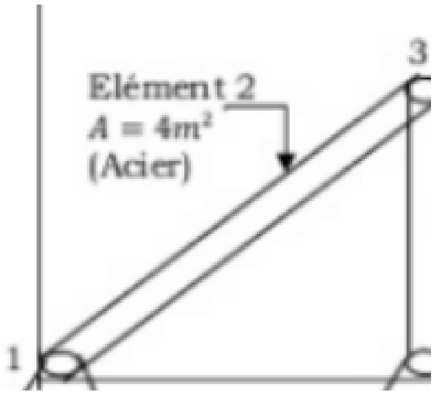
$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad k_1 = [k]_1
$$

Numéro de déplacement



Les attributions locales et globales de l'élément (2) se présentent comme suit :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{array} &
\begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix}
\end{array}
k_2 = [k]_2
$$



- La procédure à cette dernière étape consiste maintenant à ajouter des éléments de chaque matrice de rigidité ayant une attribution globale commune.

Ceci crée la matrice de rigidité globale qui dans le cadre de l'exercice 2 s'écrit :

$$
[K] = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0,64k_2 & 0,48k_2 & 0 & 0 & -0,64k_2 & -0,48k_2 \\
0,48k_2 & 0,36k_2 & 0 & 0 & -0,48k_2 & -0,36k_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\
-0,64k_2 & -0,48k_2 & 0 & 0 & 0,64k_2 + 0 & 0,48k_2 + 0 \\
-0,48k_2 & -0,36k_2 & 0 & -k_1 & 0,48k_2 + 0 & k_1 + 0,36
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Exercice

- Déterminer la matrice de rigidité global de la structure ci-dessous, sachant que AE=cste.