

## Chapitre 3

### Analyse d'un élément unidimensionnel

#### 3.1 Introduction

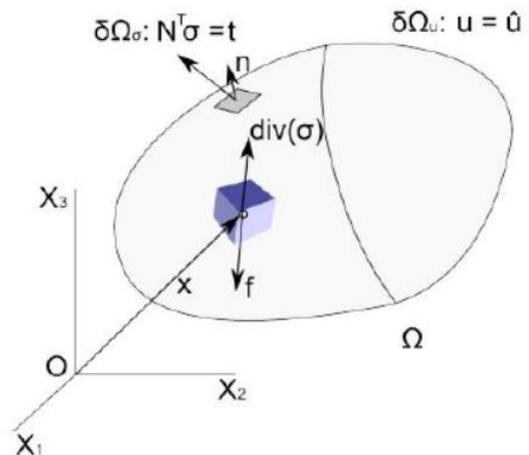
Problème : trouver le champ de déplacement  $u(x)$  qui satisfait les équations suivantes en tout point  $x$  :

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \\ \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{x}) \\ \epsilon(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Avec les conditions de bords

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega_u \Rightarrow \text{déplacements imposés}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega_\sigma \Rightarrow \text{forces externes}$$



Difficile voir impossible à résoudre...

Si on multiplie l'équation différentielle par une fonction test quelconque  $\delta u$  et que l'on intègre sur le domaine, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}}_{\text{Travail des forces internes / contraintes}} d\Omega = \int_{\delta\Omega_\sigma} \underbrace{\delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}}_{\text{Travail des forces externes}} d(\delta\Omega) + \int_{\Omega} \underbrace{\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}}_{\text{Travail des forces de gravité}} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

"Conservation de l'énergie"

La solution  $u$  minimise l'énergie interne du système.

Mieux... mais encore trop difficile à résoudre...

La méthode des éléments fini permet de trouver une solution numérique approchée en suivant la démarche suivante :

- 1) **Discrétisation** de la géométrie 3D (CAO) en petits éléments simples : **générati**on d'un maillage (éléments  $\Omega^e$  et nœuds  $X_i$ ) (**Fig.3.1**)

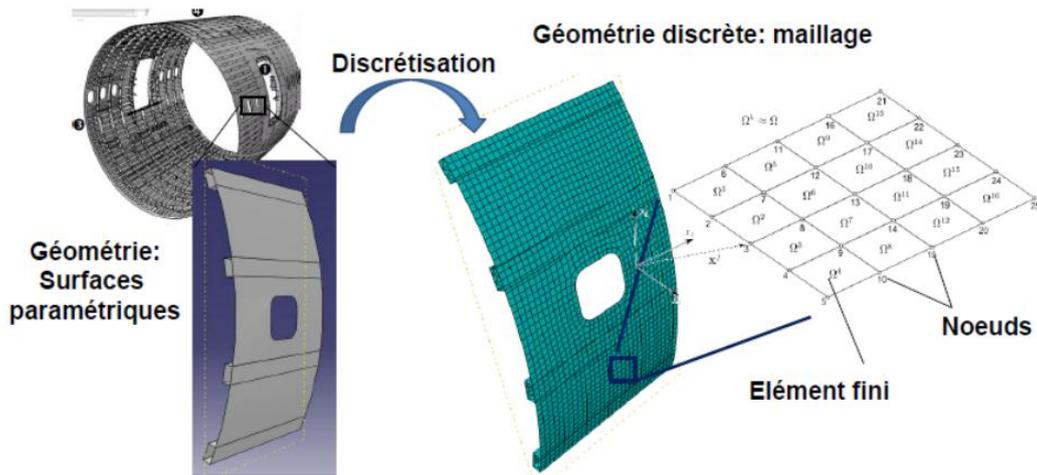


Fig. 3.1- discrétisation de la géométrie 3D en petits éléments

- 2) Définir des **fonctions d’approximation** polynomiales pour chaque nœud sur chacun des éléments. Les inconnues sont les déplacements aux nœuds  $u$  (Fig.3.2).

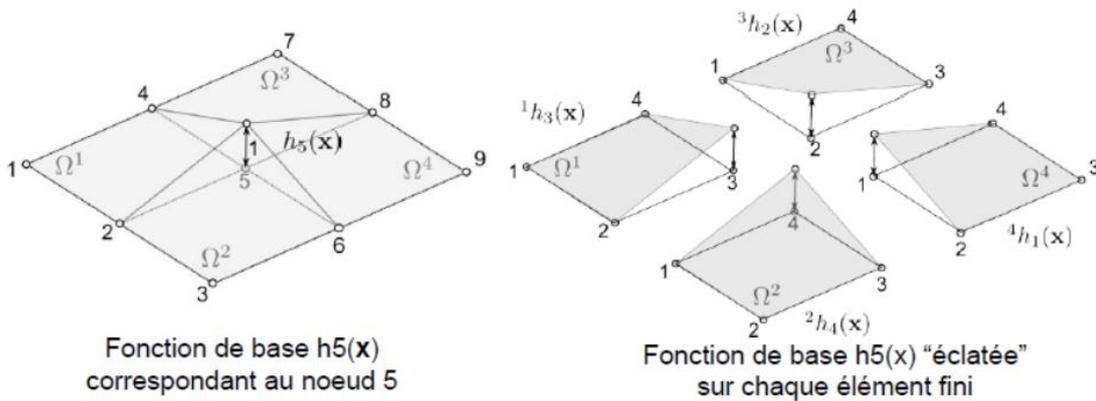
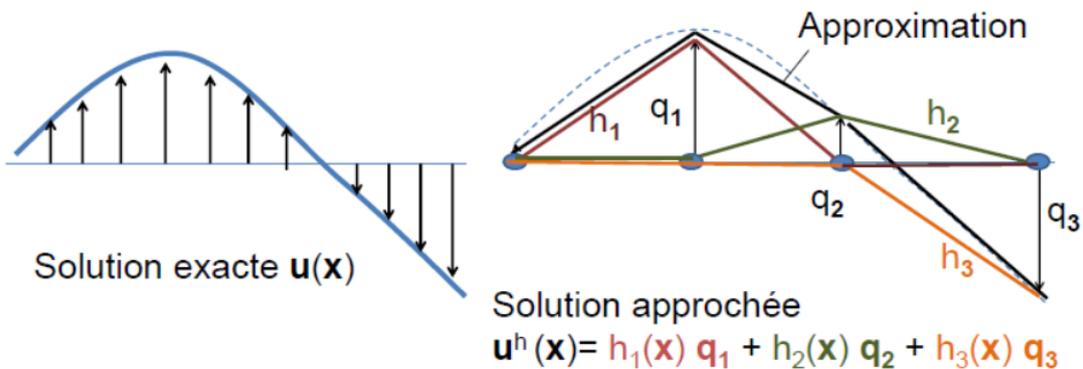


Fig. 3.2- fonctions d’approximation

- 3) Faire l’approximation que le champ de déplacement  $u(x)$  peut être écrit comme combinaisons linéaires de fonctions de base  $H(x)$  connues :

$$u^h(x) = H(x) q$$



On veut trouver les coefficients  $q_i$  !

4) Le système à résoudre se réduit alors à un système linéaire :

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{r}$$

Où : K est la matrice de rigidité du système :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{H} dV$$

q représente le vecteur des déplacements inconnus.

r représente le vecteur des forces externes (gravité + surface)

La méthode des éléments finis permet donc de convertir un système d'équation différentiel difficile à résoudre en un système d'équation linéaire simple

### 3.2 Nœuds et degrés de liberté

Une pièce libre dans tous ses déplacements est une pièce qui n'a aucune liaison avec une autre pièce.

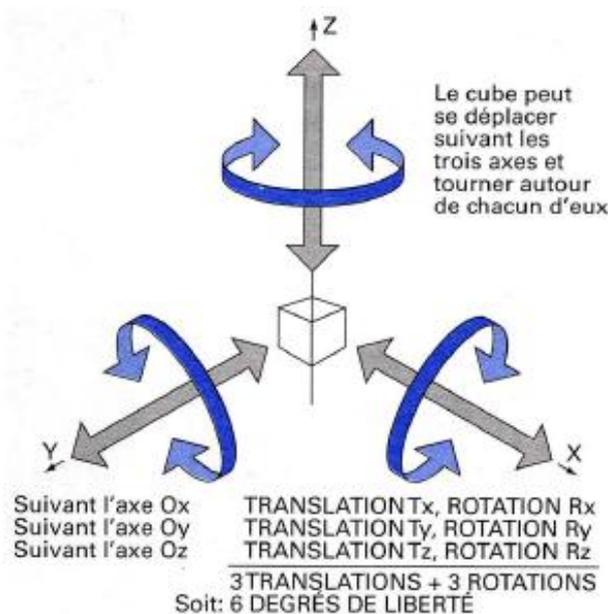
Dans ce cas, elle peut se déplacer suivant trois axes :

- Par translation suivant ces trois axes ;
- Par rotation suivant ces trois axes.

Et chacun de ses déplacements se fait dans les deux sens.

Cette pièce possède **six degrés de liberté** (Fig.3.3)

**Nbre de degrés de liberté + Nbre degrés de liaison = 6**



*Fig. 3.3- degrés de liberté*

- ❑ La méthode des déplacements (de rigidité) met les déplacements comme inconnus. Ces déplacements sont ceux des nœuds de la structure (translation ou rotation).
- ❑ Élément à 3 nœuds 1, 2 et 3, chaque nœud à des degrés de liberté dans le repère de référence. Il est à noter que le nbre de degrés de liberté dans un nœud est le nombre de déplacements possibles dans ce nœud.
- ❑ Chaque nœud de la barre unidimensionnelle a un seul degré de liberté selon l'axe de la barre (Fig.3.4).

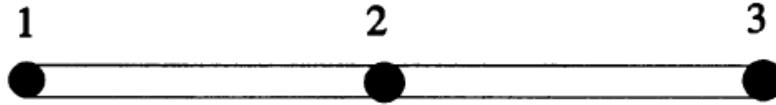


Fig. 3.4 – Élément unidimensionnel

### 3.3 Définition de la rigidité

On considère une barre de section constante  $S$ , faite dans un matériau parfaitement uniforme et isotrope. La barre est attachée à un bout ; on applique au bout libre une force  $\vec{F}$  (Fig. 1.4a)

$$\text{Contrainte : } \sigma = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}$$

- Dimension :  $[\sigma] = [force] / [surface] = [Pression]$
- Unité : Pa.

Contrainte normale : lorsque  $\vec{F} // \vec{n}$ .

$\vec{n}$  : normale à la surface. 2 possibilités (Fig. 1.4b) :

- extension (traction, tension) uniaxiale :  $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$ ,
- compression uniaxiale :  $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$ .

On parle ici de contrainte uniaxiale car toutes les forces sont sur un même axe : le côtés ne sont pas contraints.

- Ressort :  $F_{ext} = k(x - x_0) = k\Delta x$ .

$x - x_0 = \Delta x$  = allongement du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre,

$k$  = constante de raideur du ressort. La constante de raideur dépend du matériau dont est fait le ressort. Matériau "dur"  $\rightarrow k$  élevé  $\rightarrow$  il faut une force plus grande pour obtenir le même allongement.

$k$  dépend aussi des paramètres géométriques du ressort : longueur à vide  $x_0$  et section  $S$  :  $k \propto x_0^{-1}$  et  $k \propto S$  (on peut démontrer la première relation en plaçant plusieurs ressorts identiques en série, et la seconde en plaçant de ressorts identiques en parallèle).

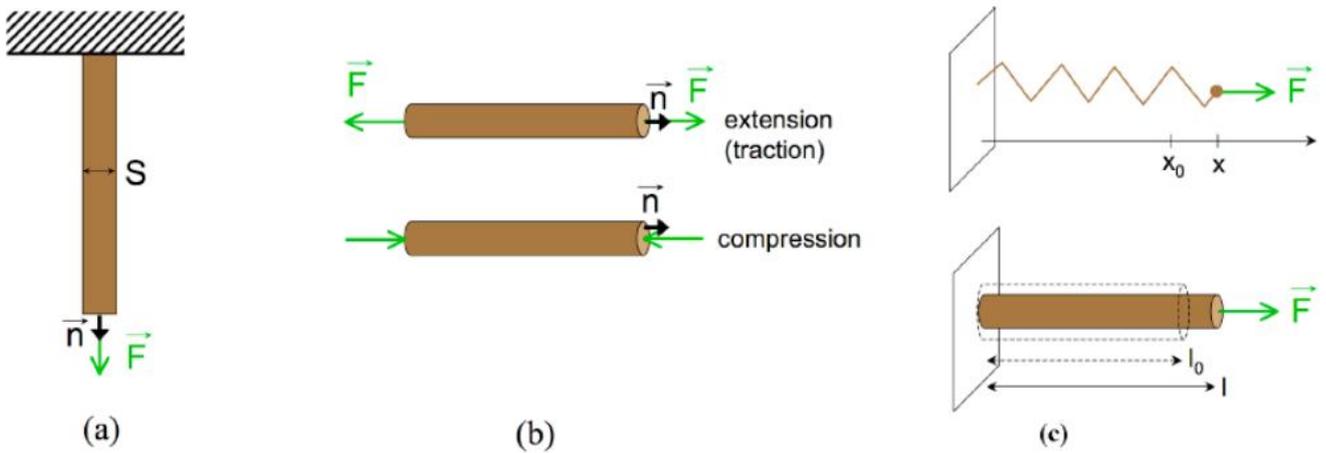


Fig. 3.5 – Rigidité d'un matériau élastique

- Par analogie : barre sous traction :  $\sigma = E \varepsilon$ .

$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}$  allongement relatif de la barre.  $[\varepsilon]$  = sans dimension.

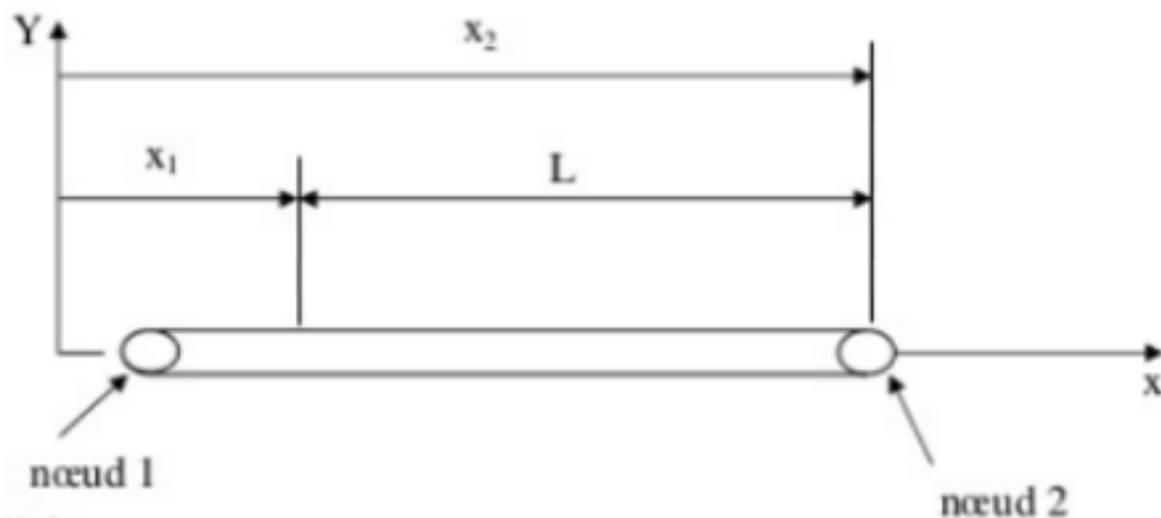
$E$  = module d'Young.  $[E] = [\sigma] = \frac{[force]}{[surface]}$ .  $E$  en Pa. Le module d'Young dépend du matériau dont est fait la barre.

Note 1 : on passe de  $F = k\Delta l$  (ressort) à  $\sigma = E \varepsilon$  en posant  $k = ES/l_0$ .

Note 2 : force externe / force interne. En élasticité : on parlera toujours des forces *externes* qui s'exercent sur un élément de volume bien défini.

### 3.5 Matrice de rigidité d'un élément individuel

Considérons une barre prismatique de longueur  $L$  de section  $A$  et de module d'élasticité  $E$ .



Les **extrémités** de la barre sont identifiées à des **nœuds**. Ces nœuds sont des points d'attache (ou de liaison) d'autres éléments et les points dans un ensemble d'éléments pour lesquels les déplacements sont faits.

Les **forces**, dans un élément de membrure à deux forces, sont appliquées seulement aux nœuds et les déplacements de tous les nœuds sont dans la direction  $x$ .

Sur la figure 1 les déplacements des nœuds 1 et 2 sont respectivement représentés par les symboles  $u_1$  et  $u_2$ .



On établit les conventions suivantes :

- ✓ Les forces et les déplacements sont comptés **positivement** quand ils agissent dans la direction positive des coordonnées. Sur la figure 1, toutes les forces et les déplacements sont comptés positivement. Par contre pour l'équilibre d'un élément de membrure à deux forces, la convention de signe requiert que la force à une extrémité (nœud) soit positive et la force à l'autre extrémité soit négative.
- ✓ La position d'un nœud dans une structure non déformée est prise égale à la position de référence pour ce nœud. Donc le déplacement d'un nœud est le changement de position du nœud comme la structure se déforme pendant l'application de la charge.

De la mécanique classique, on retient que la variation de déplacement élémentaire d'un élément de membrure de longueur  $L$ , de section  $A$  et de module d'élasticité  $E$  (voir figure 1) est donnée par la relation :

$$u_2 - u_1 = \delta = \frac{FL}{AE} \quad (1)$$

On décrit la rigidité  $k$  de la membrure par l'expression suivante :

$$k = \frac{F}{\delta}$$

De la relation (1) on tire :

$$k = \frac{AE}{L} \quad (2)$$

Appliquons cette définition à la membrure à deux forces de la figure 1. On peut exprimer la force à chaque nœud de la membrure en fonction des déplacements nodaux  $u_1$  et  $u_2$  et de la rigidité  $k$ . On a :

$$\begin{cases} F_1 = k(u_1 - u_2) \\ F_2 = k(u_2 - u_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = k(u_1 - u_2) \\ F_2 = k(-u_1 + u_2) \end{cases}$$

On écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Ou ;

$$\{Q\} = [k] \cdot \{q\} \quad (4)$$

Avec ;

$\{Q\} = [F_1 \quad F_2]^T$  : vecteur chargement aux nœuds de l'élément.

$[k]$  : matrice de rigidité de l'élément.

$\{q\} = [u_1 \quad u_2]^T$  : vecteur déplacement nodal de l'élément.

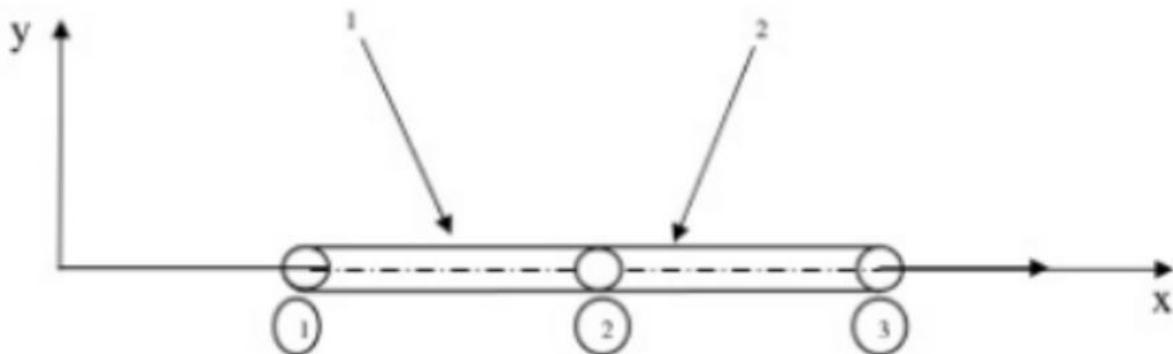
L'équation (4) est la relation générale force-déplacement pour l'élément de membrure à deux forces et est applicable à tout élément de membrure dans un assemblage d'éléments.

Pour plus de clarté, on appliquera un numéro d'identification à l'élément. Ainsi l'équation (3) devient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_e = k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} F_{1e} \\ F_{2e} \end{Bmatrix} = k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{1e} \\ u_{2e} \end{Bmatrix}$$

### 3.6 Assemblage de deux éléments

La figure 2 est un assemblage de deux éléments à deux forces dans un déplacement uniaxial.



| Numéro de l'élément | Numéro de nœud global dans l'assemblage |              |
|---------------------|---|--------------|
|                     | Nœud local 1                            | Nœud local 2 |
| 1                   | 1                                       | 2            |
| 2                   | 2                                       | 3            |

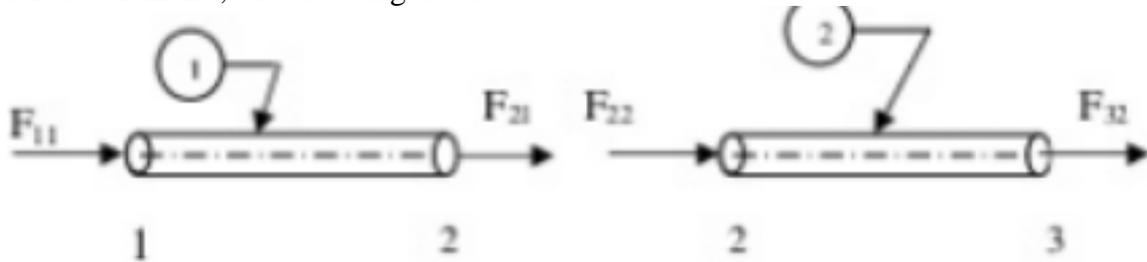
Pour l'élément 1, on a :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1$$

Pour l'élément 2, on a :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_2$$

En dissociant les éléments, on aura la figure ci-dessous :



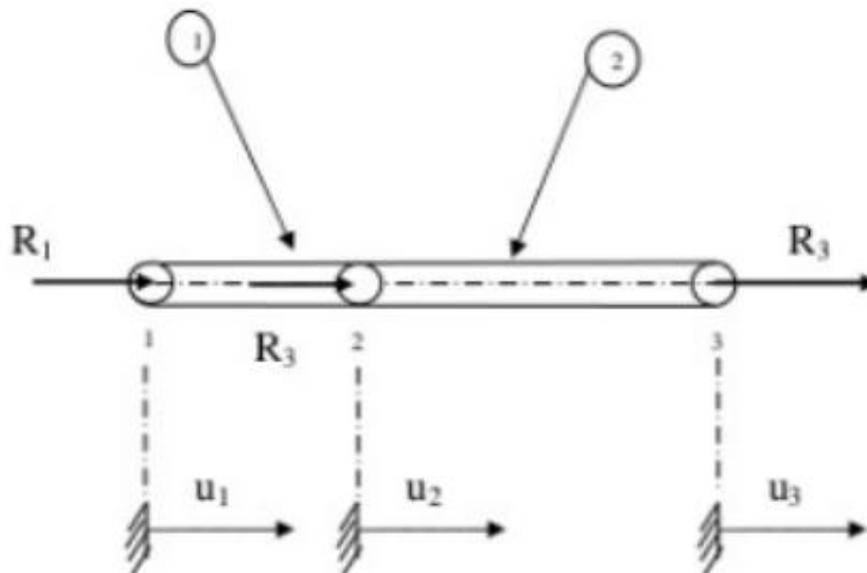
On a :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_{32} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

où  $F_{ij}$  est la force agissant sur le nœud global  $i$  de l'élément  $j$ .

### ✚ Exemple

Considérons la figure suivante :



L'assemblage de deux éléments montré à la figure 4 possède 3 nœuds et 3 déplacements (3 degrés de liberté). Désignons par  $R_i$  la force résultante agissant sur le nœud global  $i$ . Notons que le diagramme de corps libre de la région entourant le nœud 2 tel que montré sur la figure 4 illustre la charge externe appliquée  $R_2$  et les forces exercées par les éléments adjacents. Ainsi l'équilibre de la région entourant le nœud 2 donne :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22}$$

De même au nœud 1 on a :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{11}$$

Au nœud 3 on a :

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{F}_{32}$$

L'objectif est de combiner les deux équations (5) pour obtenir une équation qui exprime les forces nodales  $R_i$  aux déplacements globaux  $u_i$  de l'assemblage.

#### Procédures de la méthode

1. Elargir les équations (5) pour inclure tous les déplacements nodaux ; ceci donne

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

2. Faire la somme des équations obtenues

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

### 3. Faire sortir le facteur du vecteur déplacement :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} + F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\{R\} = [K] \cdot \{r\} \tag{6}$$

$\{R\}$  est le vecteur de l'assemblage des forces nodales globales

$\{r\}$  est le vecteur de l'assemblage des déplacements nodaux globaux

$[K]$  est la matrice de rigidité du système global assemblé.

L'application de cette méthode permet de développer des équations matricielles pour des systèmes contenant plus de deux éléments. Bien que cette technique soit pratique pour des fins manuelles, elle n'est pas pratique pour des incréments numériques sur ordinateur.

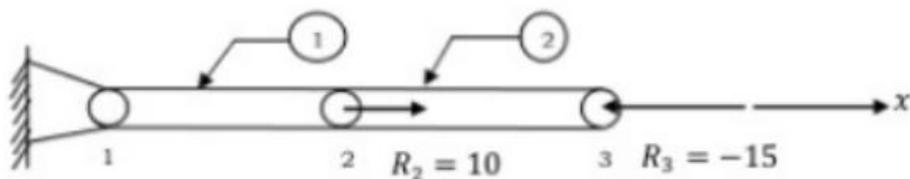
Une fois que les équations matricielles sont développées pour la structure, l'étape suivante est de substituer les conditions aux limites et de résoudre le système

obtenu pour trouver les déplacements inconnus. A chaque nœud dans la structure, les charges externes appliquées sont données ou bien le déplacement nodal est spécifié.

#### 🔧 Applications

##### Exercice 1 :

- Soit la structure suivante :



1. Trouver les déplacements  $u_2$  et  $u_3$  des nœuds 2 et 3.
2. Trouver la force résultante  $R_1$  au nœud 1.

**Résolution**

Pour l'élément ① on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Pour l'élément ② on a :

$$\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On a :

$$k_1 = k_2 = k = \frac{AE}{L}$$

En élargissant chacune de ces équations on a :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

En les sommant on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} + 0 \\ F_{21} + F_{22} \\ 0 + F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Avec l'encastrement en (1) on a  $u_1 = 0$  et on a :

$$(1) \begin{Bmatrix} R_1 \\ 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On peut y extraire :

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \cdot \begin{Bmatrix} -5 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

D'où

$$u_2 = \frac{-5 \cdot L}{AE} \text{ et } u_3 = \frac{-20 \cdot L}{AE}$$

De (1) on a :

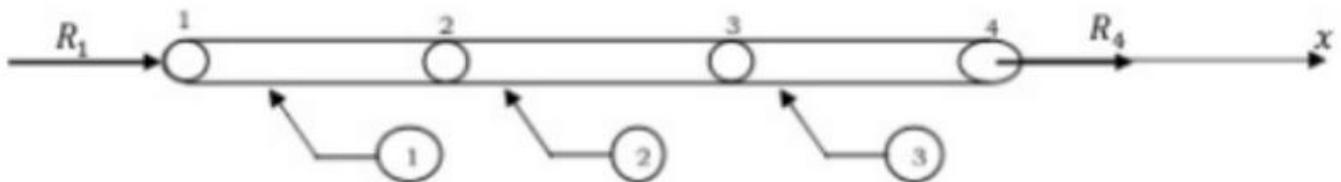
$$R_1 = \frac{AE}{L} (0) - \frac{AE}{L} (u_2) + \frac{AE}{L} (0) \cdot u_3 = -\frac{AE}{L} \left( \frac{-5L}{AE} \right) = 5$$

D'où

$$R_1 = 5$$

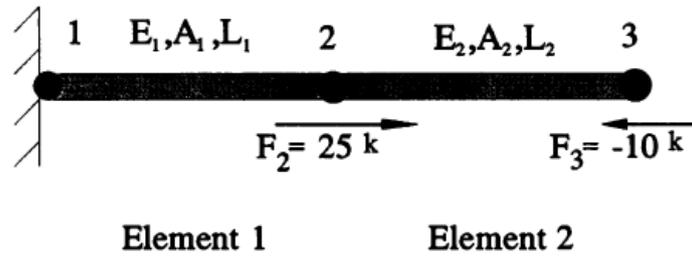
### Exercice 2 :

Déterminer la matrice de rigidité de l'assemblage de 3 éléments de la structure ci-dessous :



**Exercice 3 :**

Soit la console ci-dessous :



- 1- Trouver les déplacements des nœuds 2 et 3;
- 2- Trouver la réaction d'appui au nœud 1.

A.N:  $E_1 = E_2 = 15000 \text{ MPa}$ ;  $A_1 = 2A_2 = 50 \text{ cm}^2$ ;  $L_1 = 0.8L_2 = 5 \text{ m}$ ,

$$F_2 = 25 \text{ KN}; \quad F_3 = -10 \text{ KN}$$