<u>Solution de la série d'exercices n°03</u>

<u>Dynamique des fluides parfaits</u>

<u>Exercice n°01</u>

a) -Détermination de la vitesse dans la grande conduite :

D'après l'équation de conservation du débit : $v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$ on obtient :

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = v_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

AN : $v_2 = 6 \cdot \frac{(2.5)^2}{10^2} = 0.375 \frac{m}{s}$

-Détermination de la pression dans la grande conduite :

Pour cela, appliquons la relation de Bernoulli entre le point 1 de la petite conduite et le point 2 de la grande conduite :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Or, $z_1 = z_2$ (car les conduites sont horizontales) alors l'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$

D'oú : $$p_2 = p_1 + \frac{\rho \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2}$$

AN : $$p_2 = 25 \cdot 10^4 + \frac{1.03 \cdot 10^3 \cdot \left(6^2 - 0.375^2\right)}{2} = 26.846 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

b)-Détermination du débit de la conduite :

Le débit de la conduite est donné par la relation suivante :

$$D_v = v_1 \cdot S_1 = v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = 6 \cdot 3.14 \cdot \left(2.5 \cdot 10^{-2}\right)^2$$

$$D_v = 0.01178 \frac{m^3}{s}$$

Exercice n°02

Détermination da la vitesse au point 1 :

Puisque $S = \pi \cdot r^2$ et $D_v = v_1 \cdot S_1$, on tire que $v_1 = \frac{D_v}{S_1} = \frac{D_v}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{0.1}{3.14 \cdot \left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 1.415 \frac{m}{s}$

Détermination da la vitesse au point 2 :

De $v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$ on tire que $v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = v_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = 1.415 \cdot \frac{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2}{\left(7.5 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 5.66 \frac{m}{s}$

Détermination da la pression au point 2 :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 1et 2 :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Or $z_1 = 0$ et $z_2 = 1.8m$ donc l'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2$$

D'oú $p_2 = p_1 + \frac{\rho \cdot \left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2} - \rho \cdot g \cdot z_2$

AN : $p_2 = 30 \cdot 10^4 + \frac{10^3 \cdot \left(1.415^2 - 5.66^2\right)}{2} - 10^3 \cdot 9.81 \cdot 1.8$

$$p_2 = 26.73 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$$

Exercice n°03

Calcul de la surpression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique :

Appliquons le théorème de Bernoulli entre un point A au niveau du robinet et un point B à la sortie du tuyau :

$$p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_A = p_B + \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_B$$

Or $z_A = z_B$ (tuyau horizontal) ce qui donne : $p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} = p_B + \frac{\rho \cdot v_B^2}{2}$

D'oú l'on tire : $p_A = p_B + \dfrac{\rho \cdot \left(v_B^2 - v_A^2\right)}{2} = p_0 + \dfrac{\rho \cdot \left(v_B^2 - v_A^2\right)}{2}$ car ($p_B = p_0$)

La surpression Δp de l'eau entre le point A et le point B a pour expression :

$$\Delta p = p_A - p_B = p_A - p_0 = \frac{\rho \cdot \left(v_B^2 - v_A^2\right)}{2}$$

D'après la conservation du débit volumique : $D_v = v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B$

D'oú on tire les valeurs des vitesses :

$$v_A = \frac{D_v}{S_A} = \frac{D_v}{\pi \cdot r^2} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3.14 \cdot \left(\dfrac{15 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2} = 2.83 \frac{m}{s}$$

$$v_B = \frac{D_v}{S_B} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{0.5 \cdot 10^{-4}} = 10 \frac{m}{s}$$

AN : $\Delta p = p_A - p_B = p_A - p_0 = \dfrac{\rho \cdot \left(v_B^2 - v_A^2\right)}{2} = \dfrac{10^3 \cdot \left(10^2 - 2.83^2\right)}{2} = 46 \cdot 10^3\, Pa$

$$\Delta p = 46 \cdot 10^3\, Pa$$

Exercice n°04

Détermination de la pression manométrique en S en fonction de h_1 et h_2 :

L'application de la relation de Bernoulli entre le point A de la surface libre du liquide dans le Réservoir et le sommet S du siphon donne :

$$p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_S + \frac{\rho \cdot v_S^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_S \qquad \textbf{(1)}$$

L'application de la relation de Bernoulli entre le point A de la surface libre du liquide dans le Réservoir et le point B de l'extrémité inferieure du siphon donne :

$$p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_B + \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_B \qquad \textbf{(2)}$$

En raison de la conservation du débit et du rapport important des sections du réservoir et du siphon $\left(v_A \prec\prec v_S\right)$ (la vitesse en A est très inférieure à la vitesse au point S) et en introduisant la pression manométrique $p_m = p_S - p_0$ et les différences de hauteurs

$h_1 = h_S - h_A$ et $h_2 = h_A - h_B$ l' équation **(1)** se réduit à :

$p_0 + \dfrac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_m + p_0 + \dfrac{\rho \cdot v_S^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_S$ avec ($p_A = p_0$) et ($p_S = p_m + p_0$) et

D'oú $\quad \rho \cdot g \cdot h_A = p_m + \dfrac{\rho \cdot v_S^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_S$

$$p_m = \rho \cdot g \cdot (h_A - h_S) - \frac{\rho \cdot v_S^2}{2} = -\rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{\rho \cdot v_S^2}{2} \qquad \textbf{(3)}$$

D'autre part, l'équation **(2)** se réduit à :

$P_0 + \dfrac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_0 + \dfrac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_B$ Avec ($p_B = p_0$) et ($p_S = p_m + p_0$)

D'oú $\quad \rho \cdot g \cdot h_A = \dfrac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_B$

$v_B = v_S$ (Même section)

$$\rho \cdot g \cdot (h_A - h_B) = \rho \cdot g \cdot h_2 = \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} = \frac{\rho \cdot v_S^2}{2}$$

Par suite, l'équation **(3)** devient :

$$p_m = \rho \cdot g \cdot (h_A - h_S) - \frac{\rho \cdot v_S^2}{2} = -\rho \cdot g \cdot h_1 - \rho \cdot g \cdot h_2 = -\rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2)$$

AN : $p_m = -\rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2) = -10^3 \cdot 9.81 \cdot (5 + 20) = -2.45 \cdot 10^3$ Pa

Exercice n°05

Détermination du débit d'eau dans l'appareil (le débitmètre) :

$D_v = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$

Appliquons la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 de l'appareil :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2$$

Comme $z_1 = z_2$, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$

Ou encore $$p_1 - p_2 = \frac{\rho \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Les points A et B se trouvent sur la même ligne horizontale, donc ils ont la même pression :

$p_A = p_1 + (0.25 + y) \cdot \rho \cdot g$ et $p_B = p_2 + \rho \cdot g \cdot y + \rho_{Hg} \cdot g \cdot 0.25$

On en déduit que : $p_1 - p_2 = 0.25 \cdot g \cdot \cdot (\rho_{Hg} - \rho)$

Soit $p_1 - p_2 = 0.25 \cdot 9.81 \cdot 10^3 \cdot (13.6 - 1) = 2.84 \cdot 10^4 \,\text{Pa}$

On sait en outre que $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = v_1 \cdot \frac{30}{15} \cdot = 2 \cdot v_1$

Portons ces résultats dans l'équation **(1)**,on arrive à :

$$2.84 \cdot 10^4 = \frac{10^3 \cdot \left(4 \cdot v_1^2 - v_1^2\right)}{2} = \frac{10^3}{2} \cdot 3 \cdot v_1^2 \Rightarrow v_1^2 =$$
$$\frac{1}{3} \cdot \left(2.84 \cdot 10^4 \cdot 2\right) \cdot 10^{-3} = 18.93 \, m/s \Rightarrow v_1 = \sqrt{18.93} = 4.35 \, m/s$$

Le débit d'eau dans l'appareil vaut donc :

$$D_v = S_1 \cdot v_1 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot 4.35 = 3.14 \cdot \frac{30 \cdot 10^{-2}}{4} \cdot 4.35 = 1.024 \, m^3/s$$

<u>Exercice n°06</u>

1)-a)- Calcul de la pression au point B :

Considérons un point A au niveau de la surface libre, le point B étant situé au niveau de l'orifice.

Le fluide étant au repos, appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$p_A + \rho \cdot g \cdot h_A = p_B + \rho \cdot g \cdot h_B$

Sachant que : $h_B = 0$, $h_A = h_0$, $p_A = p_0$

Nous tirons la pression au point B :
$p_B = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 2 = 1.2 \cdot 10^5 \, Pa = 1.2 atm$

b)- Calcul de la force exercée par l'eau sur le bouchon :

La force exercée par l'eau sur le bouchon est donnée par :

$F = p_B \cdot s = 1.2 \cdot 10^5 \cdot \left(1 \cdot 10^{-4}\right) = 12 N$

2)- Montrons que la vitesse de descente du niveau de l'eau est très inférieure à celle du jet ($v_A \prec\prec v_B$)

Sachant v_A et v_B les vitesses uniformes du fluide au niveau des sections (S) et (s). Comme le débit est conservé le long d'une ligne de courant, on a donc : $D_{v'A)} = D_{v(B)} \Rightarrow v_A \cdot S = v_B \cdot s$

$$\Rightarrow v_A = \frac{s}{S} \cdot v_B$$

De plus, comme : $s \prec\prec S$ on a : $\frac{s}{S} \prec\prec 1$

Il en résulte que : $\frac{v_A}{v_B} = \frac{s}{S} \prec\prec 1 \Rightarrow v_A \prec\prec v_B$

Cette dernière inégalité montre bien que la vitesse v_A en tout point A de la section (S) est très inférieure à la vitesse v_B du jet en B.

3)-Calcul de la vitesse du jet à la sortie de l'orifice :

Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points A et B :

$$\frac{\rho \cdot v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A + p_A = \frac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_B + p_B$$

Sachant que : $h_A = h_0$, $p_A = p_0$

Et comme $\frac{v_A}{v_B} \prec\prec 1$, il vient : $v_B = \sqrt{2 \cdot h_0 \cdot g} = 6.3 \frac{m}{s}$

- Calcul du débit volumique du jet :

La détermination du débit volumique du jet est alors immédiate :

$$D_v = s \cdot v_B = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 6.3 = 6.3 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s} = 0.63 \frac{litres}{s}$$

4)-Calcul de la vitesse du jet après une chute de 2m :

Soit C le point d'altitude $h_C = -2m$ où la vitesse du jet en ce point est v_C .

Appliquons le théorème de Bernoulli entre B et C :

$$\frac{\rho \cdot v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_B + p_B = \frac{\rho \cdot v_C^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_C + p_C$$

Sachant que : $p_B = p_C = p_0$, $h_B = 0$ et $h_C = -2m$

La vitesse du jet après la chute vaut donc :

$$v_C^2 = v_B^2 - 2 \cdot g \cdot h_C \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2 \cdot g \cdot h_C} = 9\frac{m}{s}$$