المحـور الثالث

نظريـــة إختبار الفرضيات

Hypothesis Testing Theory

تمهيد:

إن إختبار الفروض طريقة عامة وشاملة لاتخاذ قرار بقبول أورفض فرضية ما حول توزيع المجتمع، ويتم ذلك عن طريق سحب عينة من المجتمع والحصول منها على تقدير الثابت الإحصائي المفترض، وفي غالب الأحوال سيكون هناك فرق بين القيمة المفروضة للثابت الإحصائي وبين قيمته المقدرة من العينة ويشكل هذا الفرق محور الدراسة عند نظرية الإختبار .

مفاهيم أساسية في نظرية الإختبار

الفرضية الإحصائية .

الفرضية الإحصائية بمفهومها العام تعني إدعاء أوإفتراض حول توزيع متغير عشوائي أومتغيرات عشوائية، وفي الغالب فإن الفرضية الإحصائية تكون حول معالم التوزيع وتساعدنا هذه الفرضية في اتخاذ القرارات الرشيدة .

أنواع الفروض الإحصائية .

يمكن التمييز بين أنواع مختلفة من الفروض من زوايا مختلفة: فالفرض قد يكون بسيط وقد يكون مركب .

-الفرض البسيط

الفرض البسيط هوالذي يحدد قيمة واحدة فقط لمعلمة المجتمع المجهولة، مثلا الفرضيتين

$H_0 : \mu_X = 100$ ، $H_1 : \mu_X = 95$

-الفرض المركب

الفرض الموكب هوالذي يحدد أية قيمة لمعلمة المجتمع في مجموعة من القيم المعلمة المجتمع المجهولة، مثلا الفرضيتين $H_0 : \mu_X \leq 100$ ، $H_1 : \mu_X \succ 65$

أما إذا نظرنا إلى الفرض الذي يجري إختباره فإننا نقسم الفروض إلى صنفين فرضية العدم والفرضية البديلة.

فرضية العدم : تسمى الفرضية التي يجري إختبارها بفرضية العدم ويرمز لها ب H_0 وهي فرضية تعكس عدم الإختلاف وبالتالي تظهر فيها عبارة التساوي $H_0 : \theta = \theta_0$.

الفرضية البديلة

إن الفرضية التي تمثل البديل لفرضية العدم في حالة رفضها تسمى الفرضية البديلة ويرمز لها ب H_1

إن الفرضية البديلة H_1 يمكن أن تأخذ أحد الأشكال الثلاثة التالية وذلك حسب طبيعة المسألة المطروحة والتي تؤدي إلى نتائج مختلفة .

أ –الشكل الأول : $H_1 : \theta \succ \theta_0$

ومن هنا نجد أن منطقة الرفض تقع بكاملها على يمين منطقة القبول .

ب – الشكل الثاني : $H_1 : \theta \prec \theta_0$

هنا نجد أن منطقة الرفض تقع بكاملها على يسار منطقة القبول .

–يعرف هذا النوعين من الفرضية البديلة بالفرض أحادي الطرف

ج – الشكل الثالث : $H_1 : \theta \neq \theta_0$

هنا نجد أن منطقة الرفض تقع على يمين ويسار منطقة القبول بشكل متناظر ويعرف هذا النوع من الفرضية البديلة بالفرض ثنائي الطرف.

إختبار الفرضية .

إختبار الفرضية هوقاعدة أوإجراء يؤدي إلى رفض أوعدم رفض فرضية العدم ويتم إختبار الفرضية بتقسيم فضاء العينة لكل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية لجزئين غير متداخلين أحدهما للنتائج التي إذا حدثت لا نرفض فرضية العدم والأخرى للنتائج إذا حدثت نرفضه . ويسمى هذان القسمان منطقة القبول ومنطقة الرفض بالترتيب .

ويطلق على القيمة التي تفصل بين منطقة الرفض ومنطقة القبول القيمة الحرجة

منطقة القبول نوعان :

القيمة الحرجة

أ –قد تكون متواجدة على جانب واحد ويسمى إختبار أحادي الجانب

ب –قد تكون متواجدة على الجانبين ويسمى إختبار ثنائي الجانب .

وفقا لارتفاع وانخفاض مستوى الدولة تتغير كل من منطقة الرفض والقبول .

أنواع الأخطاء .

هناك نوعان من الأخطأء : خطأ من النوع الأول وخطأ من النوع الثاني .

–خطأ من النوع الأول

إذا رفضنا فرضية العدم بينما هي فرضية صحيحة فإننا هنا نكون قد إرتكبنا خطأ نسميه خطأ من النوع الأول .ونرمز إلى إحتمال الخطأ من النوع الأول ب : α وهومستوى الدلالة : α إحتمال رفض فرض العدم بالرغم من أنه في الواقع صحيح .

–خطأ من النوع الثاني

قد يحدث ألا نرفض فرضية العدم بينما هي في الحقيقة خطأ هنا فإننا نكون قد إرتكبنا

خطأ نسميه خطأ من النوع الثاني. ونرمز إلى إحتمال الخطأ من النوع الثاني ب β

β هوإحتمال قبول فرض العدم بالرغم من أنه في الواقع غير صحيح .

ونلخص ما سبق إلى إبراز علاقة القرار الإحصائي بالفرضية بالجدول الموالي :

حقيقة الفرضية / القرار	قبول الفرضية	رفض الفرضية
صحيحة	قرار صحيح واحتماله $1-\alpha$	خطأ من النوع الأول واحتماله α
غير صحيحة	خطأ من النوع الثاني واحتماله β	قرار صحيح واحتماله $1-\beta$

وهذا ما يمكن أن نعبر عنه بما يلي : النتيجة القرارات الممكنة

النتيجة	القرارات الممكنة	نوع الفرضية	
		الفرضية البديلة	فرضية العدم
القرار صائب	قبول فرضية العدم	غير صحيح	صحيح
القرار خاطئ	رفض فرضية العدم	غير صحيح	صحيح
القرار خاطئ	قبول فرضية العدم	صحيح	غير صحيح
القرار صائب	رفض فرضية العدم	صحيح	غير صحيح

تطبيقات إختبار الفرضيات

يقال عن اختبار أنه يتعلق بمعالم المجتمع الإحصائي عندما تكون الفرضيات المطروحة متعلقة بأحد معالم المجتمع كالمتوسط، إنحراف معياري، نسبة...، والذي عرف قانون توزيعه طبيعي، ثائي . بواسوني

إختبارات تتعلق بأحد معالم المجتمع الإحصائي

إن عملية المقارنة لكمية ما تم تقديرها باعتماد المعلومات التي تقدمها العينة بقيمة ثابتة محددة مسبقا وتم إستيقائها من المجتمع ومن الأمور الشائعة جدا في الحياة العملية وخاصة في المصانع التي تعمل على مراقبة الإنتاج من وقت لأخر من خلال إعتماد العينات .

فالمسألة تتمثل إذا في مقارنة قيمة صفة ما من الصفات محل الدراسة ولتكن θ والتي يمكن إستخلاص قيمتها من عينة يتم سحبها من المجتمع المعني بالدراسة مع قيمة ثابتة تعتبر معيارية ولتكن θ_0 وذلك من خلال إفتراض فرضية العدم H_0 . وفريضة بديلة لها H_1 ضمن مستوى دلالة محدد سلفا

إختبار يتعلق بالمتوسط الحسابي لمجتمع طبيعي إحصائيا .

يتم إجراء إختبارات الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع في حالتين مختلفتين :

-أننا نعرف قيمة الإنحراف المعياري .

-أننا لا نعرف الإنحراف المعياري للمجتمع وعندها نعمل على تقديره باستخدام الإنحراف المعياري للعينة

حالة : 1- التباين معلوم .

سحبنا عينة عشوائية من مجتمع إحصائي بالحجم n ثم قمنا بحساب المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينة وذلك بهدف تقدير متوسط المجتمع μ_X ، ومن الممكن جدا أن يكون هناك إختلاف بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع بسبب أخطاء المعاينة . لكن وباعتماد متوسط العينة $\bar{X}$ نستطيع إختبار فيما إذا كان من الممكن اعتبار المتوسط الحسابي للمجتمع مساويا لقيمة ثابتة محددة مسبقا، فإذا كان المجتمع الإحصائي يخضع للتوزيع الطبيعي وكان عدد الوحدات الإحصائية للعينة أكبر من 30 وحدة فإن $\bar{X}$ تخضع لقانون التوزيع الطبيعي

إن المتغير Z الذي يسمى مؤشر الإختبار يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري : $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta_x / \sqrt{n}}$

وبفرض أن مستوى الدلالة قد حدد ب α فإنه يمكننا تحديد منطقتي القبول أوالرفض حسب الحالة التي ندرسها وبالتالي قبول أورفض الفرضية.

حالة : 2- التباين غير معلوم أي مجهول

.عندما يكون تباين المجتمع مجهولا فإننا نستخدم القيمة التقديرية له s المحسوبة من المشاهدات في العينة والمعرف كما يلي :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

وهنا يأخذ المؤشر t الصورة التالية : $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

فإذا كان عدد الوحدات الإحصائية للعينة أكبر من 30 وحدة فإن المؤشر t يخضع لقانون التوزيع الطبيعي أما إذا كان عدد الوحدات الإحصائية للعينة أصغر من 30 وحدة فإن المؤشر t يخضع لقانون توزيع ستودنت ذودرجات حرية مساويا إلى $n-1$

إختبار يتعلق بالنسبة p

لنفرض أننا بصدد دراسة مجتمع إحصائي يتكون من وحدات إحصائية تحمل الصفة A بنسبة p ووحدات إحصائية لا تحمل هذه الصفة بنسبة q، وأن النسبة p مجهولة.

لتقدير p تسحب عينة عشوائية مؤلفة من n وحدة من هذا المجتمع فنلاحظ أن نسبة الوحدات الإحصائية التي تحمل الصفة A تساوي f_n وبفرض أن X يمثل عدد الوحدات الإحصائية الذين يحملون الصفة A في العينة فإن : $f_n = x/n$

إن النسبة f_n في العينة قد تختلف عن النسبة p في المجتمع واعتمادا على القيمة f_n فإننا نستطيع إختبار فيما إذا كانت النسبة p يمكن إعتبارها مساوية للنسبة p_0 . المحددة مسبقا أم لا .

إن x يخضع لقانون التوزيع الثنائي

– فإذا كان حجم العينة كبيرا وكانت p_0 ليست قريبة من الصفر أو الواحد فبإمكاننا تقريب قانون التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي.

–أما إذا كان حجم العينة كبيرا وكانت P. قريبة من الصفر أو الواحد فبإمكاننا تقريب قانون التوزيع الثنائي بالتوزيع البواسوني.

إن إختبار النسبة p_0 يتم بتحديد إفتراض فرضية عدم H_0 . وفريضة بديلة لها H_1 : ضمن مستوى دلالة محدد سلفا

–فإذا أقرينا بأن التقريب الأفضل سيكون بالتوزيع الطبيعي فعندها يكون المتوسط الحسابي

للنسبة f_n : هو $p = p_0$ و انحرافها المعياري يساوي : $\delta_p = \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

و عندها فإن قيمة مؤشر الإختبار تكون :

$$t = \frac{f_n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ثم نجري الإختبار بنفس الخطوات السالفة الذكر .

إختبارت تتعلق بمقارنة عينتين .

كثيرا من المسائل الإقتصادية تجد حلها بمقارنة نتائج يتم الحصول عليها من عينات سحبت من نفس المجتمع أو من مجتمعات إحصائية مشابهة .

ليكن لدينا مجتمعين A و B نسحب عينة من كل منهما , وانطلاقا من النتائج التي نحصل عليها من دراسة العينتين , فإننا نقرر فيما إذا كانت القيم التي تأخذها صفة ما θ متساوية أو مختلفة في المجتمعين . تكون القيم المشاهدة بشكل عام مختلفة . و هذا الفرق يمكن إرجاعه على العموم إلى سببين هما :

-أن قيمتي θ_1 و θ_2 مختلفتان في المجتمعين.

-أن قيمتي θ_1 و θ_2 للصفة المدروسة متساويتان في المجتمعين و الفرق المشاهد يعزى إلى تأثير المعاينة ، من ذلك نجد أننا أمام فرضيتين

الأولى : فرضية العدم : لا يوجد فرق جوهري بين θ_1 و θ_2 أي أن $H_0 : \theta_1 - \theta_2 = 0$

الثانية : الفرضية البديلة : : هناط فرق جوهري بين θ_1 و θ_2 أي : $H_1 : \theta_1 - \theta_2 \neq 0$

و يتم إختبار هذا الفرق بنفس الأسلوب الموضح في الفقرات السابقة و ذلك بهدف الوصول إلى القرار الملائم ، وهنا سيتم التركيز على ثلاثة أنواع من المقارنات :

-مقارنة وسطين حسابيين

-مقارنة نسبتين

-مقارنة تباينين أو إنحرافين معياريين

وذلك من خلال إستخلاص المعلومات الضرورية من عينيتن عشوائيتين .

إختبارت تتعلق بمقارنة وسطين حسابيين :

في كثير من الأحيان , يطلب منا دراسة متوسطي عينتين لمعرفة ما إذا كان الفرق بينهما كبيرا بدرجة تمكننا من القول بأنهما مسحوبتين من مجتمعين مختلفين ، أم الفرق صغير بدرجة يمكن إرجاعها للصدفة .

ليكن لدينا مجتمعين P_1 و P_2 كبيرين كبرا كافيا لهما متوسطين حسابيين μ_1 و μ_2 و انحرافيين معياريين δ_1 و δ_2 نسحب عينتين عشوائيتين E_1 و E_2 من المجتمعين P_1 و P_2 ، العينة الأولى بحجم n_1 لها متوسط حسابي قدره $\bar{X}_1$ و العينة الثانية بحجم n_2 لها متوسط حسابي قدره $\bar{X}_2$ والمطلوب هو معرفة ما إذا كان هناك فرق جوهري بين الوسطين المجهولين μ_1 و μ_2 إعتمادا على الوسطين $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المستخلصين من العينتين العشوائيتين E_1 و E_2 المسحوبتين من المجتمعين P_1 و P_2

إن الحالات التي يمكن أن تعترضنا عند إجراء الإختبار تتمثل بما يلي

- الإنحرافين المعياريين للمجتمعين مقدرين .
- الإنحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين.
- حجم العينات المسحوبة كبير.
- حجم العينات المسحوبة صغير .

و هذه الحالات تتشابه في خطوات الإختبار و تختلف عن بعضها في بعض النقاط و لذا في البداية سنكتفي كخطوة أولى بالتطرق إلى الحالة العامة لهذا النوع من الإختبارات .

أولا: حالة كون العينتين كبيرتين E_1 و E_2 كبيرتين $(n_1 \geq 30 : n_2 \geq 30)$:

أ –الإنحرافان المعياريان معلومان .

إذا كان حجم العينتين كبيرا فإننا نعلم حسب نظرية توزيع المعاينات أن قوانين الإحتمال لكل من $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ هي :

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \delta_1 / \sqrt{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \delta_2 / \sqrt{n_2}\right)$$

ومنه فإن قانون الإحتمال للمتغير العشوائي الناتج عن الفرق $\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)$ هو:

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2; \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}\right)$$

ويتضمن إختبار مقارنة الوسطين الإختبار بين الفرضيتين التاليتين :

فرضية العدم : $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$

الفرضية البديلة : $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 \neq \mu_2$

فإذا كانت الفرضية الإبتدائية صحيحة أي إذا كان $\mu_1 = \mu_2$ فيكون قانون الإحتمال للفرق هو

$$\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) \sim N\left(0; \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}\right)$$

و مؤشر الإختبار Z يعرف بالعلاقة التالية :

$$Z = \frac{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right| - 0}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}}$$

و يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N\left(0,1\right)$ وهنا و نظرا كون العينتان كبيرتان فالإختبار يقارن بين قيمة $|Z|$ المحسوبة إنطلاقا من قانون التوزيع الإحتمالي ل $\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\right)$ حيث

$$|Z|=\frac{\left|\bar{X}_1-\bar{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}}$$

-قيمة Z_α التي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري تبعا لمستوى الدلالة α المعتمد

فإذا كان $|Z_\alpha|\leq|Z|$ فإننا نقبل فرضية العدم و نقول أن الفرق بين الوسطين $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ غير جوهري عند مستوى الدلالة α ونعتبر أن الوسطين الحسابين للمجتمعين متساويين $\left(\mu_1=\mu_2\right)$

-أما إذا كان $|Z_\alpha|\succ|Z|$ فإننا نرفض فرضية العدم و نقول أن الفرق بين الوسطين $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ جوهري عند مستوى الدلالة α ونعتبر أن الوسطين الحسابين للمجتمعين غير متساويين $\left(\mu_1\neq\mu_2\right)$

-كلما كان $|Z|$ أكبر من $|Z_\alpha|$ كلما كان الفرق بين μ_1 و μ_2 ي أكثر دلالة .

ب –الإنحرافان المعياريان متساويان و مجهولان $\delta_1=\delta_2=\delta$:

عندما يكون الإنحرافان المعياري للمجتمعين متساويين و مجهولين أي $\delta_1=\delta_2=\delta$ فإن :

$$\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}=\delta\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

ورأينا سابقا أن التقدير النقطي ل δ هو: S^2 حيث: $S^2=\dfrac{S_1^2\left(n_1-1\right)+S_2^2\left(n_2-1\right)}{n_1+n_2-2}$

حيث $s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i.1} - \bar{x}_1\right)^2$ و $s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i.2} - \bar{x}_2\right)^2$

وتكون الكمية $\delta\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ مقدرة بواسطة $S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

ج –الإنحرافان المعياريان غير متساويين و مجهولان .

$$\delta_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

و بتعويض δ_1 و δ_2 بالقيم التقديرية ينتج لدينا :

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i.1} - \bar{x}_1\right)^2 = \frac{S_{(1)}^2}{n_1 - 1} \quad \text{و} \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i.2} - \bar{x}_2\right)^2 = \frac{S_{(2)}^2}{n_2 - 1}$$

فإذا كان حجم العينتين كبيرا فإن المقدار: $S_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ يمثل تقدير نقطي للإنحراف المعياري $\delta_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$

ثانيا: حالة كون العينتين صغيرتين E_1 و E_2 $\left(n_1 \prec 30 : n_2 \prec 30\right)$:

إذا كان حجم العينتين صغيرا فإن تقدير δ_1 و δ_2 بواسطة S_1 و S_2 يصبح غير دقيق و يختلف كثيرا عن القيم الحقيقية ل δ_1 و δ_2 .

ضمن هذه الشروط فإن الإختبار السابق لم يعد قابلا للتطبيق، إذ لم يعد يسمح بالتمييز فيما إذا كان الفرق المشاهد بين الوسطين الحسابين $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ للعينتين يمكن أن يعزى إلى الفرق الحقيقي

بين μ_1 و μ_2 أو أن يعزى إلى الفرق بين الإنحرافين δ_1 و δ_2 ، وإن لم يجد الباحثين في مجال الإحصاء طريقة أو أداة تمكن من التمييز بين السببين المذكورين ، لكن يمكن إعتماد ما يلي :

-إذا كان توزيع المجتمعين طبيعيا أو طبيعي بشكل جيد من خلال كون العينة كبيرة فإن

$$X_1 \sim N\left(\mu_1 ، \delta_1\right) \quad و \quad X_2 \sim N\left(\mu_2 ، \delta_2\right)$$

-إذا كان الإنحرافان المعياريان للمجتمعين متساوين و مجهولين $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ فإن S تعتبر تقديرا نقطيا ل δ و الكمية :

$$t = \frac{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

تتبع قانون توزيع ستودنت Student ذو $\nu = n_1 + n_2 - 2$ درجة حرية .

و يتم التحقق من صحة فرضية العدم $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$

مقابل الفرضية البديلة : $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 \neq \mu_2$

من خلال إجراء عملية مقارنة بين قيمة $|t|$ المحسوبة إنطلاقا من قانون التوزيع الإحتمالي $\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)$ و المعرف بالعلاقة

$$t = \frac{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

مع قيمة t_α النظرية و التي نحصل عليها من جدول التوزيع لستودنت بدلالة درجة الحرية $\nu = n_1 + n_2 - 2$ و مستوى الدلالة α المعتمد.

إختبارت تتعلق بمقارنة نسبتين .

لنفرض أننا بصدد دراسة مجتمعان إحصائيان P_1 و P_2 يتكون كل منهما من وحدات إحصائية بعضا منهم يحملون الصفة A و لتعتبر p_1 و p_2 نسبة الوحدات الإحصائية الذين يحملون

الصفة A في المجتمعين و بالتالي فإن الوحدات الإحصائية التي لا تحمل هذه الصفة تقدر نسبتها ب q_1 و q_2 على التوالي $q_1=1-p_1$ و $q_2=1-p_2$ و لنفرض أن النسبتين p_1 و p_2 مجهولتين

لتقدير هاتين النسبتين p_1 و p_2 نسحب عينتين عشوائيتين E_1 و E_2 من المجتمعين P_1 و P_2 ، العينة الأولى بحجم n_1 لها نسبة قدرها f_1 و العينة الثانية بحجم n_2 لها نسبة قدرها f_2

و لنعمل على معرفة ما إذا كان هناك فرق جوهري بين النسبتين المجهولتين p_1 و p_2 إعتمادا على النسبتين f_1 و f_2 المستخلصين من العينيتن E_1 و E_2 المسحوبتين من المجتمعين P_1 و P_2

-إذا كان حجم العينين كبيرا فإن قانون التوزيع الإحتمالي لكل من f_1 و f_2 هو :

$$f_1 \sim N\left(p_1, \sqrt{p_1(1-p_1)/n_1}\right) \quad \text{و} \quad f_2 \sim N\left(p_2, \sqrt{p_2(1-p_2)/n_2}\right)$$

وهذا يعني أن التوقع الرياضي للنسبة f_1 يساوي إلى p_1 عندما يكون حجم العينة كبيرا و كما أن الإنحراف المعياري للنسبة f_1 هو $\sqrt{p_1q_1/n_1}$ و نفس المبدأ ينطبق على النسبة f_2.

وعندها يكون قانون التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (f_1-f_2)

$$(f_1-f_2) \sim N\left(p_1-p_2; \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$$

إن الإنحراف المعياري يتعلق بالمؤشرين المجهولين p_1 و p_2 و يتم تقييمهما بواسطة التقدير النقطي التالي : لتكن f تمثل تقديرا نقطيا ل p فإن أفضل تقدير هو في هذه الحالة :

$$f = \frac{n_1.f_1 + n_2.f_2}{n_1 + n_2}$$

و الإنحراف المعياري للفرق $(f_1 - f_2)$ يساوي $\delta_{(f_1-f_2)} = \sqrt{f(1-f)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

و يصبح قانون توزيع $(f_1 - f_2)$ كما يلي

$$f_1 - f_2 \sim N\left(p_1 - p_2; \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$$

ويتضمن إختبار مقارنة النسبتين الإختبار بين الفرضيتين التاليتين :

- فرضية العدم $H_0 : p_1 - p_2 = 0 \Rightarrow p_1 = p_2$:

-الفرضية البديلة $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \Rightarrow p_1 \neq p_2$:

فإذا كانت الفرضية الإبتدائية صحيحة أي إذا كان $p_1 = p_2$ فيكون قانون الإحتمال للفرق بين النسبتين يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي:

$$f_1 - f_2 \sim N\left(0; \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right)$$

و مؤشر الإختبار Z يعرف بالعلاقة التالية :

$$Z = \frac{|f_1 - f_2| - 0}{\sqrt{f(1-f)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

و يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N\left(0;1\right)$

نقارن بين Z و Z_{α} المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري فإن كان :

فإذا كان $|Z| \leq Z_{\alpha}$ فإننا نقبل فرضية العدم

-أما إذا كان $|Z| \succ Z_{\alpha}$ فإننا نرفض فرضية

إختبارات تتعلق بمقارنة تباينين .

لنفرض أننا بصدد دراسة مجتمعان إحصائيان P_1 و P_2 تباينهما δ_1^2 و δ_2^2 مجهولان و نرغب باختبار فيما إذا كان هناك فرق جوهري بين التباينتين المجهولين δ_1^2 و δ_2^2 إعتمادا على تبايني $\hat{\delta}_1^2$ لعينة عشوائية E_1 حجمها n_1 تم سحبها من المجتمع P_1 و $\hat{\delta}_2^2$ لعينة عشوائية E_2 حجمها n_2 تم سحبها من المجتمع P_2 .

-تقدير δ_1^2 و δ_2^2

ليكن S_1^2 التقدير النقطي ل δ_1^2 فيكون:

$$S_1^2 = \frac{S_{(1)}^2}{n_1 - 1} = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i.1} - \bar{X}_1\right)^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}\hat{\delta}_1^2$$

ليكن S_2^2 التقدير النقطي ل δ_2^2 فيكون:

$$S_2^2 = \frac{S_{(2)}^2}{n_2 - 1} = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i.2} - \bar{X}_2\right)^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1}\hat{\delta}_2^2$$

-إنشاء إختبار

هناك فرضية إضافية تتعلق بهذا الإختبار هي أن المتغير العشوائي X يخضع في كلا المجتمعين للتوزيع الطبيعي . كذلك فعوضا عن تشكيل الفرق $d = S_1^2 - S_2^2$ و اختبار فيما إذا كان d

يختلف جوهريا عن الصفر و فإن من المفضل أن نأخذ العلاقة التالية : $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$

و بطبيعة الحال فمن الملائم أن يكون التباين الأكبر في الصورة) البسط (و عندها تصبح

إختبار الفرضيات في إحدى الفرضيتين البسيطتين التاليتين :

-فرضية العدم : $H_0:F=1$

-الفرضية البديلة : $H_0:F\succ 1$

ومن الناحية العملية فإن الإختبار يقارن بين :

أ -قيمة F الفعلية و قيمة F النظرية و التي نحصل عليها بالرجوع إلى جدول فيشر سنيديكور تبعا لمستوى الدلالة α و لعدد درجات الحرية: $\nu_1=n_1-1$ و $\nu_2=n_2-1$

-قاعدة القرار

- إذا كان: $F_\alpha \prec F$ فالفرق غير جوهري بين S_1^2 و S_2^2 ضمن مستوى دلالة α فيمكننا إذا أن تقبل تساوي التباينين المجهولين.

- إذا كان: $F_\alpha \prec F$ فالفرق جوهري بين S_1^2 و S_2^2 ضمن مستوى دلالة α و التباين المجهول δ_1^2 يختلف عن التباين المجهول δ_2^2 .

تمارين

تمريـــن 1:

ضبطت آلة من أجل تعبئة علبة منظف تزن 500غ، تم أخذ عينة من 100 علبة معبأة، وقد وجد أن متوسط وزن علب العينة هو503غ.

- كيف يمكن إختبار جودة ضبط الآلة بمستوى معنوية 10% إذا كان الانحراف المعياري لسعة العلبة 03غ؟

تمريـــن 2:

للتحقق من شكاوي المستهلكين بخصوص نقص تعبئة علب منظف حجم 500غ، أخذت مصلحة الجودة عينة من 100 علبة، فكان الوزن المتوسط للعينة 497غ.

- إذا كان $\delta = 3$ ، هل تؤيد بيانات العينة دعاوي المستهلكين بمستوى معنوية 10%؟

تمريـــن 3:

تدل الاحصائيات لسنوات عديدة أن نسبة الناجحين في مادة الإحصاء في قسم التسيير هي 60%. في فوج معين مكون من 36 طالبا وجد أن عدد الناجحية هو28.

- تحقق مما إذا كانت نتائج هذا الفوج تعد أعلى من المتوسط العام بمستوى معنوية 1%، 5%، 10%؟

تمريـــن 4:

تدل الاحصائيات لسنوات عديدة أن نسبة الناجحين في مادة الرياضيات في قسم التسيير هي 55%. في فوج معين مكون من 32 طالبا وجد أن عدد الناجحية هو25.

- تحقق مما إذا كانت نتائج هذا الفوج تعد أعلى من المتوسط العام بمستوى معنوية 1%، 5%، 10%؟.

تمريـــن 5:

ترغب شركة طياران في التزود بقطع لدى مورد محلي وتريد التأكد من أن 90% من القطع تلبي المواصفات معينة، وعليه أخذت مصالح الجودة عينة من 35 قطعة للاختبار، فكان عدد القطع المقبولة 28.

- هل يدل ذلك على أن المعيار المحدد من قبل المؤسسة غير متوفر في منتج المورد؟
- اختر مستوى المعنوية الأكثر سلامة (القبول بدليل إحصائي ضعيف)؟.

تمريـــن 6:

للتأكد من فرضية توازن القطع النقدية، قمنا بإلقاء قطعة نقدية عشوائية 100 مرة وتسجيل النتائج؛ 1 للصورة و0 لكتابة.

لنعتمد القاعدة التالية للقرار: نقبل الفرضية إذا كان عدد مرات الحصول على الصورة بين 40 و60 (يمكن الاعتماد على المجموع)، ونرفضها إذا كان أقل من 40 أوأكبر من 60.

المطلوب:

- إذا كانت الفرضية صحيحة ما هوإحتمال رفضها؟
- عبر رياضيا عن قاعدة القرار؟.
- ما هي نتيجة الإختبار إذا كان المجموع 45؟، 40؟.
- باستخدام هذه القاعدة ما هوإحتمال قبول الفرضية الصفرية بينما القطعة مغشوشة بحث الاحتمال الحقيقي لظهور الصورة هو0.55؟، 0.60؟.

تمريـــن 7:

في تجربة للتأثير الايجابي لسلامة المحيط الذي يشتغل فيه العامل على إنتاجيته، قام باحث بالتجربة التالية في مصنع ذووحدتين إنتاجيتين الأولى بها 50 عامل والثاني 60، أدخلت تحسينات على ظروف العمل في الورشة الأولى (عينة الاختبار) وتركت الورشة الثانية (العينة الضابطة) على حالها، بعد مدة كافية من المراقبة وجد أن إنتاجية العامل في الورشة الأولى 86 وحدة في اليوم بانحراف معياري 8، بينما كانت 81 في الورشة الثانية بانحراف معياري 7.

- كيف يمكن اجراء إختبار إحصائي بمستوى معنوية 1%.

تمريـــن 8:

بعد مرور مدة على تخزين قطع صناعية في ظروف سيئة تم إختبار الجودة على 10 وحدات فتبين أن متوسط مقاومتها للحرارة 700 درجة بانحراف معياري 145 درجة، بينما الرقم الافتراضي لمقاومة القطعة السليمة هو750.

- هل تدل التجربة على أن مقاومة القطع المخزنة انخفضت بمستوى معنوية 0.01؟، 0.05؟.