الحـــــــــــل

تمريــن 1:

1. لإيجاد متوسط وتباين المجتمع:

نوجد أولاً مجموع قيم المفردات ومجموع مربعات المفردات (البيانات في صورة جدول كما يلي):

i	X_i	X_i^2
1	2	4
2	1	1
3	3	9
المجموع	$\sum X_i = 6$	$\sum X_i^2 = 14$

من هذه البيانات نحسب الوسط الحسابي للمجتمع كما يلي: $\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{6}{3} = 2$

بينما تباين المجتمع يحسب كما يلي: $\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\sum X_i^2 - N\overline{X}^2\right) = \frac{1}{3}\left(14 - \frac{6^2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

2. عدد العينات الممكنة: سنرمز لعدد العينات الممكنة بالرمز M:

- إذا كان السحب بإرجاع: $M = N^n = 3^2 = 9$
- إذا كان السحب بدون إرجاع: $M = C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$

3. توزيع المعاينة للوسط الحسابي:

- في حالة السحب بدون إرجاع: نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي: حيث أن عدد العينات الممكن سحبها هي:

$\bar{x}$	1.5	2	2.5
العينة	(1.2)	(1.3)	(2.3)

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ هو:

$\bar{x}$	1.5	2	2.5
$f(\bar{x})$	1/3	1/3	1/3

- في حالة السحب بإرجاع: نوجد أولاً جميع العينات الممكنة ، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة:

العينة	$\overline{X}$	العينة	$\overline{X}$
(2.3)	2.5	(1.1)	1
(3.1)	2	(1.2)	1.5
(3.2)	2.5	(1.3)	2
(3.3)	3	(2.1)	1.5
		(2.2)	2

توزيع المعاينة في هذه الحالة هو:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

4. متوسط وتباين الوسط الحسابي للعينة:

- في حالة السحب بدون إرجاع:

$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\bar{x}.f(\bar{x})$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x})$
1.5	1/3	0.5	0.5-	0.25	0.0833
2	1/3	0.67	0	0	0
2.5	1/3	0.83	0.5	0.25	0.0833
$\sum$	1	2		0.5	0.1666

*متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$: $\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1.5*\frac{1}{3}) + (2*\frac{1}{3}) + (2.5*\frac{1}{3}) = 2 = \mu$

وهو يساوي نفس قيمة μ كما يجب أن يكون.

*تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\delta^2 \bar{x} = \sum (\bar{x} - \mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x}) = (1.5-2)^2 * (\frac{1}{3})$$
$$+ (2-2)^2 * (\frac{1}{3}) + (2.5-2)^2 * (\frac{1}{3}) = \frac{0.5}{3} = 0.1666$$

وهي تساوي $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$. **للتحـــقق:** $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{2/3}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = 0.1666$

- في حالة السحب مع الإرجاع:

$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\bar{x}.f(\bar{x})$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2$	$(\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x})$
1	1/9	1/9	1-	1	1/9
1.5	2/9	1/3	0.5-	0.25	0.5/9
2	3/9	2/3	0	0	0
2.5	2/9	5/9	0.5	0.25	0.5/9
3	1/9	3/9	1	1	1/9
$\sum$	1	2	0	2.5	1/3

*متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$: $\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1*\frac{1}{9}) + (1.5*\frac{2}{9}) + (2*\frac{3}{9}) + (2.5*\frac{2}{9}) + (3*\frac{1}{9}) = 2 = \mu$

و هو يساوي نفس قيمة μ كما يجب أن يكون.

*تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\delta^2 \bar{x} = \sum (\bar{x} - \mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x}) = (1-2)^2 * (\frac{1}{9}) + (1.5-2)^2 * (\frac{2}{9})$$
$$+ (2-2)^2 * (\frac{3}{9}) + (2.5-2)^2 * (\frac{2}{9}) + (3-2)^2 * (\frac{1}{9}) = \frac{1}{3} = 0.333$$

وهي تساوي $\frac{\sigma^2}{n}$. **للتحـــقق:** $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333 = \sigma^2_{\bar{X}}$

x	x^2
40	1600
42	1764
48	2304
56	3136
64	4096
250	12900
50	2580

تمريــن 2:

*التوزيع الاحتمالي للمجتمع

X	40	42	48	56	64
$f(X)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

* الوسط الحسابي للمجتمع هو: $\mu = \sum xf(x) = (40*\frac{1}{5})+(42*\frac{1}{5})+(48*\frac{1}{5})+(56*\frac{1}{5})+(64*\frac{1}{5}) = 50$

* تباين المجتمع هو: $\delta^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = \{(40)^2*(\frac{1}{5})+(42)^2*(\frac{1}{5})+(48)^2*(\frac{1}{5})+(56)^2*(\frac{1}{5})+(64)^2*(\frac{1}{5})\} - 50^2 = 80$

أو $\delta^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x) = (40-50)^2*(\frac{1}{5})+(42-50)^2*(\frac{1}{5})+(48-50)^2*(\frac{1}{5})+(56-50)^2*(\frac{1}{5})+(64-50)^2*(\frac{1}{5}) = 80$

*عدد العينات الممكن سحبها في حالة السحب مع الإرجاع مع العلم أن $n=2$ هو $N^n = 5^2 = 25$

والجدول التالي يوضح العينات

$\overline{X}$	العينة	$\overline{X}$	العينة	$\overline{X}$	العينة	$\overline{X}$	العينة	$\overline{X}$	العينة
52	(64.40)	48	(56.40)	44	(48.40)	41	(42.40)	40	(40.40)
53	(64.42)	49	(56.42)	45	(48.42)	42	(42.42)	41	(40.42)
56	(64.48)	52	(56.48)	48	(48.48)	45	(42.48)	44	(40.48)
60	(64.56)	56	(56.56)	52	(48.56)	49	(42.56)	48	(40.56)
64	(64.64)	60	(56.64)	56	(48.64)	53	(42.64)	52	(40.64)

* توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ في حالة السحب مع الإرجاع هو:

$\overline{x}$	40	41	42	44	45	48	49	52	53	56	60	64
$f(\overline{x})$	1/25	2/25	1/25	2/25	2/25	3/25	2/25	4/25	2/25	3/25	2/25	1/25

*حساب الوسط الحسابي $\mu_{\overline{x}}$ والتباين $\delta^2_{\overline{x}}$ لتوزيع المعاينة

$\overline{x}$	$f(\overline{x})$	$\overline{x}.f(\overline{x})$	$(\overline{x}-\mu_{\overline{x}})^2$	$(\overline{x}-\mu_{\overline{x}})^2 f(\overline{x})$
40	1/25	40/25	100	100/25
41	2/25	82/25	81	162/25
42	1/25	42/25	64	64/25
44	2/25	88/25	36	72/25
45	2/25	90/25	25	50/25
49	3/25	144/25	4	12/25
48	2/25	98/25	1	2/25
52	4/25	208/25	4	16/25
53	2/25	106/25	9	18/25
56	3/25	168/25	36	108/25
60	2/25	120/25	100	200/25
64	1/25	64/25	196	196/25
$\sum$	1	1250/25	1000	1000/25

$$\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 50 = \mu$$

$$\delta^2{}_{\bar{x}} = \sum (\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x}) = \frac{1000}{25} = 40 = \frac{80}{2} = \frac{\delta^2}{n}$$

تمريــن 3:

*عدد العينات الممكن سحبها في حالة السحب مع عدم الإرجاع مع العلم أن $n = 2$ هو

$C_N{}^n = C_5{}^2 = \frac{5!}{2!*(5-2)!} = \frac{5*4}{2} = 10$ والجدول التالي يوضح العينات:

$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة
49	(42.56)	41	(40.42)
53	(42.64)	44	(40.48)
52	(48.56)	48	(40.56)
56	(48.64)	52	(40.64)
60	(56.64)	45	(42.48)

* توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ في حالة السحب مع الإرجاع هو:

$\bar{x}$	41	44	45	48	49	52	53	56	60
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	/102	1/10	1/10	1/10

*حساب الوسط الحسابي $\mu_{\bar{x}}$ والتباين لتوزيع المعاينة $\delta^2{}_{\bar{x}}$

$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$\bar{x}.f(\bar{x})$	$(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2$	$(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x})$
41	0.1	4.1	81	8.1
44	0.1	4.4	36	3.6
45	0.1	4.5	25	2.5
48	0.1	4.8	4	0.4
49	0.1	4.9	1	0.1
52	0.2	10.4	4	0.8
53	0.1	5.3	9	0.9
56	0.1	5.6	36	3.6
60	0.1	6.0	100	10
$\sum$	1	50	296	30

$$\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 50 = \mu$$

$$\delta^2{}_{\bar{x}} = \sum (\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2 f(\bar{x}) = 30 = \frac{80}{2} * \frac{5-2}{5-1} = \frac{\delta^2}{n} * \frac{N-n}{N-1} = 30$$

تمريـــن 4:

لدينا $n = 9$ و $N = 6000$ إذن $\frac{n}{N} = \frac{9}{6000} = 0.0015 \prec 0.05$

إذن إذا كان السحب مع الإرجاع أو بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 13600 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{600}{3} = 200$$

$$P(13600 \le \overline{X} \le 13800) = P(\frac{13600 - 13600}{200} \le Z \le \frac{13800 - 13600}{200})$$
$$= P(0 \le Z \le 1) = 0.84134 - 0.5000 = 0.34134$$

عدد العينات هو : $0.34134 * 60 \approx 20$

$$P(\overline{X} \le 13800) = P(Z \le \frac{13800 - 13600}{200}) = P(Z \le 1) = 0.84134 = 0.84134$$

عدد العينات هو : $0.84134 * 60 \approx 50$

تمريـــن 5:

لدينا $n = 25$ و $N = 1000$ إذن $\frac{n}{N} = \frac{25}{1000} = 0.025 \prec 0.05$

إذن إذا كان السحب مع الإرجاع أو بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 80 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

بما أن المتغيرة X تتبع التوزيع الطبيعي فإن متوسط العينات $\overline{X}$ يتبع هو أيضا التوزيع الطبيعي حتما بغض النظر عن حجم العينة سواء كان صغيرا أم كبيرا.

إذن: $X \mapsto N(80, 49) \Rightarrow \overline{X} \mapsto N(80, \frac{49}{25})$

- إيجاد $P(\overline{X} \ge 78) = ?$

$$P(\overline{X} \ge 78) = 1 - P(Z \le \frac{78 - 80}{7/5}) = 1 - P(Z \le -1.4285) = 1 - \cancel{0.92364} = \cancel{0.07636}$$

1-0,07636=0,92364

تمريـــن 6:

المتغير العشوائي محل الدراسة X هو عمر العامل حيث $X \to N(45.49)$

و الاحتمال المطلوب $P(\overline{X} \succ 48) = ?$

بما أن مجتمع أعمار العمال تتوزع توزيعا طبيعيا إذن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيكون توزيعا طبيعيا بغض النظر عن حجم العينة، وسيكون الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 45 \qquad \delta^2{}_{\bar{x}} = \frac{\delta^2}{n} = \frac{49}{16}$$

لم نستخدم معامل التصحيح بالرغم من أن السحب كان مع عدم الإرجاع لأن:

$$\frac{n}{N} = \frac{16}{1500} = 0.01 \prec 0.05$$

نحسب القيمة المعيارية كما يلي: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\delta_{\overline{X}}} = \dfrac{48-45}{\sqrt{49/16}} = \dfrac{12}{7} = 1.71$

بالتالي فإن: $P(\overline{X} \succ 48) = P(Z \succ 1.71) = 0.5 - 0.4564 = 0.0436$

أي أنه إذا سحبنا من هذا المجتمع مع عدم الارجاع كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $(n = 16)$، فستكون نسبة العينات التي وسطها الحسابي أكبر من 48 هي $4.36\,\%$

تمرين 7:

المتغير العشوائي محل الدراسة X هو درجة الطالب حيث $X \rightarrow N(68.25)$

و الاحتمال المطلوب هو $P(67 \le \overline{X} \le 69) = ?$

بما أن مجتمع درجة الطالب تتوزع توزيعا طبيعيا إذن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة سيكون توزيعا طبيعيا، وسيكون الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 68 \qquad \delta^2{}_{\bar{x}} = \frac{\delta^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{25}{100}\frac{420-100}{420-1} = 0.1909$$

استخدمنا معامل التصحيح لأن السحب كان مع عدم الإرجاع لأن:

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{420} = 0.24 \succ 0.05$$

نحسب القيمتين المعياريتين كما يلي:

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\delta_{\overline{X}}} = \frac{67-68}{\sqrt{0.1909}} = \frac{12}{7} = -2.29$$

$$Z_2 = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\delta_{\overline{X}}} = \frac{69-68}{\sqrt{0.1909}} = 2.29$$

بالتالي فإن:

$$P(67 \le \overline{X} \le 69) = P(-2.29 \le Z \le 2.29) = 0.4890 + 0.4890 = 0.9780$$

تمريـــن 8:

المتغير العشوائي محل الدراسة X هو وزن علبة التونة والمجتمع هو مجموعة أوزان كل العلب وتوزيعه الاحتمالي غير معروف وحجم العينة $(n = 100)$ أي $(n \succ 30)$، إذن بالرغم من أن توزيع المجتمع مجهول فإن توزيع معاينة لمتوسط الحسابي للعينة سيكون توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي (نظرية النهاية المركزية)، وسيكون الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 223 \qquad \delta^2{}_{\bar{x}} = \frac{\delta^2}{n} = \frac{(2.25)^2}{100} = 0.0506$$

لم نستخدم معامل التصحيح لأن السحب كان مع عدم الإرجاع لأن:

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{50000} = 0.002 \prec 0.05$$

نحسب القيمة المعيارية كما يلي:

$$Z_1 = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\delta_{\overline{X}}} = \frac{222.5 - 223}{\sqrt{0.0506}} = \frac{-0.5}{0.225} = -2.22$$

بالتالي فإن:

$$P(\overline{X} \prec 222.5) = P(Z \prec -2.22) = 0.50.4868 = 0.0132$$

تمريـــن 9:

سنرمز لمقياس الذكاء بالرمز X ، وبالتالي المتغير العشوائي $\overline{X}$ يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu_{\overline{X}} = 100$ وانحراف معياري $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{75}{\sqrt{25}} = 15$ أي أن:

$$\overline{X} \sim N(100, 225)$$

والآن نوجد المطلوب:

1. عدد الطلبة في الجامعة الذين تزيد درجة مقياس ذكائهم عن 130.

نوجد أولاً نسبة أفراد المجتمع الذين تزيد درجة مقياس ذكائهم عن 130 والتي سنرمز لها بالرمز P_A كما يلي:

$$P_A = P(X > 130) = P\left(Z > \frac{130 - 100}{75}\right) = 1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

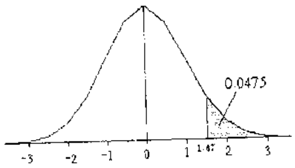
إذا، عدد الطلبة في المجتمع الذين تزيد درجة مقياس ذكائهم عن 130 والتي سنرمز لها بالرمز N_A هي:

$$N_A = N\,P(X > 130) = (60000)(0.3446) = 20676$$

حيث N هي حجم المجتمع.

2. عدد الطلبة في العينة المتوقع أن يزيد مقياس ذكائهم عن 130: حيث n هي حجم العينة

سنرمز للعدد المتوقع في العينة بالرمز M: $M = n\,P(X > 130) = (25)(0.3446) = 8.615 \cong 9$

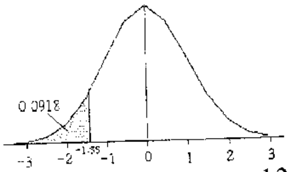


3. احتمال أن يكون متوسط الذكاء المحسوب من العينة أكبر من 125

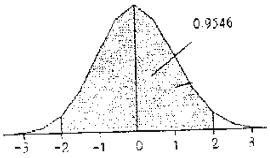
$$P(\overline{X} > 125) = P\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - .9525 = 0.0475$$

4. احتمال أن يكون متوسط الذكاء المحسوب من العينة أصغر من 80

$$P(\overline{X} < 80) = P\left(Z < \frac{80-100}{15}\right) = \Phi(-1.33) = 0.0918$$



5. احتمال أن يكون متوسط الذكاء المحسوب من العينة محصورا بين 70 و 130



$$P(70 < \overline{X} < 130) = P\left(\frac{70-100}{15} < Z < \frac{130-100}{15}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.97725 - 0.02275 = 0.9545$$

6. درجة مقياس الذكاء المقابلة لنسبة الخمسة في المائة الأولى؟

وهذا يعني أن نسبة الطلبة في الجامعة الذين تقل درجة مقياس الذكاء لهم عن 75.325 تساوي 5% من أجمالي الطلبة.

حل السلسلة 02

تمرين 01

$\mu_{p'} = p = 0.02.$

$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.02(0.98)}{400}} = 0.007$ (بفرض أن المجتمع كبير بما فيه الكفاية لكي نهمل معامل الإرجاع)

$n = 400 \geq 30 \Rightarrow p' \approx N(0.02, 0.007)$

$P(p' \leq 0.03) =$ $= p(z < \frac{0.03-0.02}{0.007}) = p(z<1.42) = p(z<0) + p(0<z<1.42)$

ملاحظة: بدون تعديل كنا سنحصل على : $P(p' \leq 0.03) = 0.0764$

تمرين 02

$\mu_{m1-m2} = \mu_{m1} - \mu_{m2} = \mu_1 - \mu_2 = 1400 - 1200 = 200$

$\sigma^2_{m1-m2} = \sigma^2_{m1} + \sigma^2_{m2} = \sigma^2_1/n_1 + \sigma^2_2/n_2 = (200^2/125) + (100^2/125) = 400$

$\Rightarrow \sigma_{m1-m2} = \sqrt{400} = \mathbf{20\ h.}$

تمرين 03

$\mu_{m1-m2} = \mu_{m1} - \mu_{m2} = \mu_1 - \mu_2 = 0.5*1000 - 0.5*1000 = 0$

$\sigma^2_{m1-m2} = \sigma^2_{m1} + \sigma^2_{m2} = \sigma^2_1/n_1 + \sigma^2_2/n_2 = (20^2/1000) + (20^2/1000) = 0.8\ g$

$\Rightarrow \sigma_{m1-m2} = \sqrt{0.8} = \mathbf{0.89\ g}$

تمرين 04

a) $\mu_{m1-m2} = \mu_{m1} - \mu_{m2} = 27.3 - 15.6 = 11.7$ km

$$\sigma_{m_1-m_2} = \sqrt{\sigma^2_{m_1-m_2}} = \sqrt{\sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2}} = \sqrt{\frac{0.16^2}{1} + \frac{0.08^2}{1}} = 0.179km$$

b) $\mu_{m1+m2} = \mu_{m1} + \mu_{m2} = 27.3 + 15.6 = \mathbf{42.9}$ km

$$\sigma_{m_1+m_2} = \sqrt{\sigma^2_{m_1+m_2}} = \sqrt{\sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2}} = \sqrt{\frac{0.16^2}{1} + \frac{0.08^2}{1}} = 0.179km$$

تمرين 05:

المقدر هو إحصائية – أي دالة في متغيرات عينة عشوائية– مستخدمة لتقدير معلمة من معالم المجتمع. تتفاوت المقدرات حسب مجموعة من الخصائص: عدم التحيز، الكفاءة (الفعالية) و التقارب. تتعلق كفاءة و تقارب المقدر "بخطأ المعاينة " أي بتباين المقدر. المقدر الفعال هو الذي يكون تباينه أقل، المقدر المتقارب هو الذي يؤول تباينه إلى الصفر عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية. بصفة عامة يفضل المقدر ذي خطأ المعاينة الأقل لأنه يجعل فرص صحة التقدير أكبر.

كمثال على ذلك، متوسط العينة m هو مقدر لمتوسط المجتمع μ وحيث أن $E(m) = \mu + 0$ نقول عن m أنه غير متحيز. وسيط العينة med هو أيضا مقدر غير متحيز لمعلمة المجتمع μ، لكن m يفضل عليه لأن له خطأ معاينة أقل أي أنه أكثر كفاءة (فعالية). كلا المقدران متقارب.

تمرين 06:

نستنتج مجال الثقة لمتوسط المجتمع إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow M \sim N(\mu,\sigma_m) \Rightarrow z_m = \frac{m-\mu}{\sigma_m} \sim N(0,1) \Rightarrow -z_{1-\alpha/2} \le \frac{m-\mu}{\sigma_m} \le z_{1-\alpha/2}$$

$$\sigma_m = \sigma/\sqrt{n} \Rightarrow m - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le m + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و يمكن استنادا إلى قانون النهاية المركزية[1] استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير M حتى إذا كان المجتمع مجهول التوزيع بشرط أن تكون العينة ممتدة $(n \ge 30)$.

إذا كان المجتمع محدودا (ذا حجم N) والمعاينة نفادية نكتب حدود مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$m \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهولا نعوض σ في الصيغ السابقة بالمقدر $\hat{S}$ فنكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$m \pm z_c \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

و ذلك استنادا إلى القانون: $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$

α	0.10	0.05	0.01
$z_{1-\alpha/2}$	$z_{1-0.10/2} = z_{0.95} = 1.645$	$z_{1-0.05/2} = z_{0.975} = 1.96$	$z_{1-0.01/2} = z_{0.995} = 2.58$

تمرين 07:

- لا نعلم إذا كان المجتمع طبيعيا لكن بما أن $n > 30$ يمكن استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير بناءا على نظرية النهاية المركزية. من جهة أخرى يعتبر مجتمع الأعمار كبيرا بما فيه الكفاية لكي نفترض أن $n/N < 0.05$ ومن ثم يمكن إهمال معامل الإرجاع عند حساب خطأ المعاينة. بناءا عليه نكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$m \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

عند مستوى ثقة 0.95 فإن $z_c = 1.96$ ومنه فإن مجال الثقة يكتب:

$$\left[38.1 - 1.96\times\frac{6}{\sqrt{410}}\ ;\ 38.1 + 1.96\times\frac{6}{\sqrt{410}}\right] = (37.51; 38.68).$$

- في حالة σ مجهول نعوضه ب S لكن نستخدم التوزيع الطبيعي بدل ستيودنت لأن العينة كبيرة ونكتب حدود مجال الثقة كما يلي: $m \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ ومنه فإن مجال الثقة يكتب:

$$\left[38.1 - 1.96\times\frac{6.2}{\sqrt{410-1}}\ ;\ 38.1 + 1.96\times\frac{6.2}{\sqrt{410-1}}\right] = (37.5; 38.7).$$

تمرين 08:

$n > 30$ ، $np > 0.5$ ، $nq > 0.5$ التوزيع الطبيعي يصلح أن يستخدم كتقريب للتوزيع الثنائي لX: عدد الزائرين الذين يقومون بعمليات شراء. ومن ثم فإن $p' = n_a/n$ تتبع هي الأخرى نفس التوزيع و نستنتج أنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لكتابة مجال الثقة ل p كما يلي:

$$p \in \left[p' - z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}\ ;\ p' + z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_{p'}\right]$$

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \qquad (n/N < 0.05 \text{ يفترض أنه كبير بحيث } N)$$

النسبة في المجتمع مجهولة، لذلك نستخدم 'p عوضا عن p عند حساب $\sigma_{p'}$

$$\sigma_{p'} = \frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100}} = 0.049 \cong 0.05$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.1/2} = z_{0.95} = 1.64$$

$$p \in [0.4 - 1.64(0.049)\ ;\ 0.4 + 1.64(0.049)] \Rightarrow p \in [0.32\ ;\ 0.48]$$

تمرين 09:

$n > 30$، $np > 0.5$، $nq > 0.5$ يمكن إذن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي لعدد المستهلكين الذين يفضلون هذا النوع أو ذاك في العينة ومن ثم استخدام التوزيع الطبيعي في كتابة مجال الثقة للنسبة في المجتمع (السوق).

$$p \in p' \pm z_{1-\alpha/2} * \sigma_{p'} = p' \pm z_{1-0.01/2}\, \sigma_{p'} = p' \pm z_{0.995}\, \sigma_{p'} = 0.3 \pm 2.58\, \sigma_{p'}$$

لا يمكن إهمال معامل الإرجاع لأن:

$$n/N = 400/2000 = 0.20 > 0.05$$

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'q'}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{0.3(0.7)}{400}\left(\frac{2000-400}{2000-1}\right)} = 0.0229 * 0.89 = 0.0204$$

$$p = 0.3 \pm 2.58(0.02) = 0.3 \pm 0.052$$

$$\Rightarrow p \in [0.248 \,;\, 0.352].$$

التمرين 10:

$$m = \mu + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow m - \mu = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{(m-\mu)}{\sigma(z)} = 1/\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma(z)}{m-\mu} \Rightarrow n = \left(\frac{z\sigma}{m-\mu}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{z\sigma}{m-\mu}\right)^2 = \left(\frac{2.58(4000)}{2000}\right)^2 = 5.16^2 \cong 27$$

- المقدار العام لمجال الثقة هو 2000 (2) = 4000 دج.
- في حالة كون التوزيع الأصلي للمجتمع مجهولا يجب أن يكون حجم العينة على الأقل 30 حتى يتسنى استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير استنادا إلى نظرية النهاية المركزية.

التمرين 11:

- لا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير المتوسط ونستخدم بدلا منه توزيع ستيودنت إذا كانت العينة أصغر من 30 والانحراف المعياري للمجتمع مجهولا مع كون التوزيع الأصلي طبيعيا.
- نكتب المتغيرة المعيارية ل m في حالتي استخدام التوزيع الطبيعي و ستيودنت كما يلي:

$$z_m = \frac{m-\mu_m}{\sigma_m} = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad , \quad t_m = \frac{m-\mu_m}{\sigma_m} = \frac{m-\mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- قيم معاملات الثقة t_c في حالة عدد درجات الحرية 10 - 15 - 20 ومستوى الثقة 90%:

$t_{1-\alpha/2} = t_{0.95;\,10} = 1.813$	$t_{0.95;\,15} = 1.753$	$t_{0.95;\,20} = 1.725$
$t_{0.05;\,10} = -1.813$	$t_{0.05;\,15} = -1.753$	$t_{0.05;\,20} = -1.725$

- عدد درجات الحرية هو عدد المفردات التي يمكن اختيارها بحرية من العينة لتقدير معلمة المجتمع. فمثلا إذا كان حجم العينة 2 ونعلم أن متوسط العينة هو 10، فإذا وجدنا أن العدد الأول في العينة هو 7 فإن العدد الثاني لا بد أنه 13. في هذه الحالة نقول أن $\upsilon = n - 1 = 2 - 1 = 1$.

5. يستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير متوسط المجتمع بمجال:

- إذا كان المجتمع طبيعيا وانحرافه المعياري σ معلوما (سواءا كانت العينة أقل أو أكبر من 30).
- إذا كان المجتمع طبيعيا وانحرافه المعياري مجهولا لكن $n \geq 30$. في هذه الحالة نعوض $\sigma/\sqrt{n}$ ب $S'/\sqrt{n}$ أو $S/\sqrt{(n-1)}$ (التوزيع الأصلي ستيودنت للإحصائية $\frac{m-\mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$ يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري).
- إذا كان المجتمع غير معلوم التوزيع لكن $n \geq 30$ و σ معلوما (استنادا إلى نظرية النهاية المركزية).
- إذا كان المجتمع غير معلوم التوزيع مع كون σ مجهولا لكن $n \geq 100$ (بتقدير هذا الأخير ب 'S).

يستخدم توزيع ستيودنت إذا كان المجتمع موزع طبيعيا لكن $n < 30$ و σ مجهول.

تستخدم نظرية شيبيشيف إذا كان $n < 30$ ، والمجتمع ليس طبيعيا، ولكن σ معلوم، وهي نظرية تستخدم كحل أخير، أي إذا لم يمكن استخدام التوزيع الطبيعي ولا ستيودنت، لأن نتائجها أقل دقة بكثير.

التمرين 12:

المجموع 3593.

1- قدر نقطيا متوسط عدد العمال للمؤسسة العاملة في القطاع.

$$\hat{\mu} = m = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{91+168+...+101}{40} = \frac{3593}{40} = 89.8 \cong 90$$

2- تقرر منح إعفاء ضريبي لمؤسسات القطاع التي تشغل 135 عاملا أو أكثر. قدر نقطيا نسبة المؤسسات المستفيدة من الإجراء.

نقدر النسبة في القطاع p بالنسبة في العينة p' .

المؤسسات المشغلة ل 135 عامل وأكثر عددها تسع و هي المفردات : 168، 171، 158، 137، 190، 140، 147، 194، 141. إذن النسبة في العينة: p' = 9*100/40 = 22.5% و هي القيمة المقدرة ل p .

3- أحسب خطأ المعاينة للمقدر المستخدم في (2) .

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx \sqrt{\frac{0.225\,(0.775)}{40}}\sqrt{\frac{194-40}{193}} = 0.066$$

4- أعط تقديرا بمستوى معنوية 5% لنسبة مؤسسات القطاع المستفيدة من الإعفاء.

$$p \in \left[p' - z_{1-\alpha/2}\sigma_{p'} \quad ; \qquad p' + z_{1-\alpha/2}\sigma_{p'}\right]$$
$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$
$$p' = 0.225, \sigma_{p'} = 0.066 \Rightarrow p \in (0.225 - 1.96(0.066);\ 0.225 + 1.96(0.066))$$
$$\Rightarrow p \in [0.11;\ 0.34]$$

5- كم يجب أن يكون حجم العينة إذا أردنا أن يكون تباين المقدر لنسبة المؤسسات المستفيدة 0.01.

$$\sigma^2_{p'} = 0.01 = \frac{p\acute{q}'}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow n = N \Big/ \left(\sigma^2_{p'}\left(\frac{N-1}{p\acute{q}'}\right)+1\right)$$
$$= 394 \Big/ \left(0.01\left(\frac{394-1}{0.225(1-0.225)}\right)+1\right) = 16$$

حل السلسلة 03

التمرين 01:

$H_0: \mu = 500 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 500$

نحتاج إلى اختبار ثنائي الاتجاه لأن جودة التعبئة تعني عدم الزيادة ولا النقصان.

المجتمع مجهول التوزيع، لكن يمكن استخدام التوزيع الطبيعي استنادا إلى نظرية النهاية المركزية لأن $n = 100 \geq 30$.

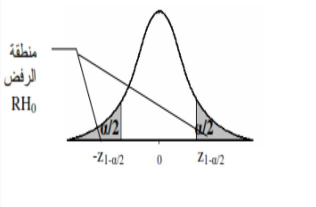
إذن: $m \approx N(\mu, \sigma_m)$

قاعدة القرار تكون كالتالي:

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m} \notin [-z_{1-\alpha/2} \; ; \; z_{1-\alpha/2}] \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

أو نكتب أيضا:

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \left|\dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m}\right| > z_{tab} = z_{1-\alpha/2} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$



رسم 1 اختبار ثنائي الاتجاه باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري

نهمل معامل الإرجاع بفرض أن المجتمع (أوزان العلب المنتجة في المعمل) كبير بحيث $n/N < 0.05$. وحسب الفرضية الصفرية فإن: $\mu = 500$ إذن:

$$M \approx N\left(500 \, , \, \frac{3}{\sqrt{100}}\right)$$

$$z_{cal} = \frac{503-500}{3/\sqrt{100}} = 10 \qquad ; \qquad z_{tab} = z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.10/2} = z_{0.95} = 1.64$$

نرفض الفرضية الصفرية ونستدل أن الآلة تحتاج إلى تصحيح. $|z_{cal}| > z_{tab} \Rightarrow RH_0$

التمرين 02:

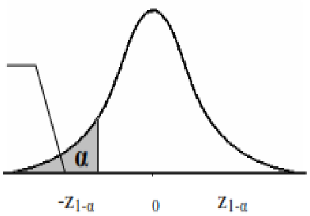
نحتاج هنا إلى اختبار أحادي الاتجاه لكي نرى إن كانت بيانات العينة *(m = 497)* تصل أن تعتبر دليلا إحصائيا على دعوى المستهلكين بنقص تعبئة العلب أم أنها أقل من ذلك و أن القيمة 497 تفسر بالعوامل العشوائية التي تتضمنها التعبئة.

$H_0: \mu = 500 \leftrightarrow H_1: \mu < 500$ g

$n = 100 \geq 30 \Rightarrow m \approx N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$; Sous H_0: $\mu = 500 \Rightarrow m \approx N(500, 3/\sqrt{100})$.

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$z_{cal} = \frac{497-500}{3/\sqrt{100}} = -10 \qquad ; \qquad z_{tab} = z_{1-\alpha} = z_{1-0.10} = z_{0.90} = 1.28$$



رسم 2 اختبار أحادي الاتجاه من اليسار

$z_{cal} < z_{tab} \Rightarrow RH_0$

نرفض الفرضية H_0 ونستدل أن بيانات العينة تؤيد شكاوى المستهلكين.

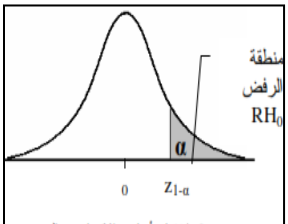
لاحظ أنه ربما نصل إلى نتيجة معاكسة، أي عدم رفض الفرضية الصفرية ومن ثم عدم تأييد الدعوى بنقصان التعبئة، إذا اخترنا مستوى معنوية أكثر شدة (0.01 أو 0.05 بدل 0.10). كلما كانت القيم المحصل عليها في العينة بعيدة عن القيمة الافتراضية كان ذلك أدل على قوة الدليل الإحصائي. يعتبر بعض الإحصائيين نتيجة الاختبار الإحصائي "معتبرة جدا" *très significatif* إذا كانت تقع في منطقة رفض بمستوى 0.01، و"معتبرة باحتمال" *probablement significatif* إذا كانت تقع في منطقة الرفض 0.05 لكن ليس 0.01، ما يعني ضرورة مواصلة البحث عن أدلة و "غير معتبرة" *non significatif* إذا كانت تقع في منطقة 0.10 لكن ليس 0.05.

التمرين 03:

نحتاج إلى اختبار أحادي الاتجاه من اليمين لنرى ما إذا كانت البيانات الإحصائية للفوج تؤكد أن مستوى الفوج أعلى من المعدل العام أم أن الفرق أقل من أن يعني ذلك وأنه ينسب للعوامل العشوائية.

$H_0: p = 0.6 \leftrightarrow H_1: p > 0.6$

$$n = 36 \geq 30 \Rightarrow p' \approx N(p\ ;\ \sigma_{p'}) \qquad ;sous\ \ H_0 : p' \approx N\left(0.6\ ;\sqrt{\frac{0.6(0.4)}{36}}\right)$$



رسم 3 اختبار أحادي الاتجاه من اليمين

$$\begin{cases} RH_0 \ \text{si} \ z_{cal} = \dfrac{p' - p_0}{\sigma_{p'}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{28}{36} = 0.7777;\ \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{36}} = 0.08164 \Rightarrow \ z_{cal} = \frac{0.7777 - 0.6}{0.08164} = 2.177$$

$$z_{tab} = z_{1-\alpha} = z_{1-0.1} = z_{0.9} = 1.28$$

$$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$$

و نستدل أن نتائج الفوج أكبر من المعدل العام بمستوى معنوية 0.10.

* $\alpha = 0.05$: $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.64$

$$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$$

و نستدل أن نتائج الفوج أكبر من المعدل العام بمستوى معنوية 0.05.

* $\alpha = 0.01$: $z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.33 \qquad z_c \leq z_{tab} \Rightarrow R'H_0$

ونستدل بمستوى معنوية 0.01 أن نتائج الفوج ليست أكبر من المعدل العام.

لاحظ أن اختيار مستوى المعنوية يؤثر على نتيجة الاختبار. اختيار مستوى معنوية أكبر يعني احتمالا أكبر لرفض الفرضية الصفرية وبالعكس، مستوى معنوية أقل يعني احتمالا أقل لرفضها. اختيار مستوى المعنوية يكون بحسب خطورة عدم رفض فرضية العدم إن كانت خاطئة. إذا كانت هناك شكوك بأن مادة منزلية تسبب مضاعفات خطيرة على صحة المستخدم فإن من المناسب أن يكون الاختبار متشددا باعتماد مستوى معنوية كبير ما يعني القبول بدليل إحصائي ضعيف. لاحظ أن مبدأ الاختبار هو الرغبة في الحصول على دليل إحصائي ينفي H_0 لكي نقبل H_1 و قوة الدليل تكون بمقدار بعد النتيجة عن القيمة الافتراضية.

التمرين 05:

$$H_0: p = 0.9 \leftrightarrow H_1: p < 0.9$$

$$\begin{cases} RH_0 \ \text{si} \ z_{cal} = \dfrac{p' - p_0}{\sigma_{p'}} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{28}{35} = 0.805;\ \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{0.9(0.1)}{35}} = 0.0507 \Rightarrow \ z_{cal} = \frac{0.805 - 0.9}{0.0507} = -1.972$$

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow z_{tab} = -z_{1-\alpha} = -z_{1-0.1} = -z_{0.9} = -1.28$$

$$-1.972 < -1.28 \Rightarrow RH_0$$

ونستدل أن بيانات العينة تدل إحصائيا على أن قطع المورد لا تلبي المعيار المحدد.

التمرين 06:

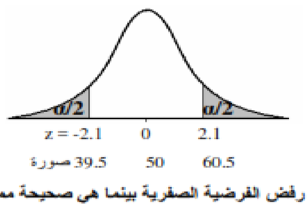
1) $P(RH_0/H_0) = P(X > 60 \ U \ X < 40) = 1 - P(40 \leq X \leq 60).$

$Sous\ H_0 : \ p = 0.5. \qquad X \sim B(100, 0.5). \quad npq \geq 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$

$$P(40 \leq X \leq 60) = P\left(\frac{39.5 - 50}{5} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60.5 - 50}{5}\right) = P(-2.1 \leq Z \leq 2.1)$$

$$= F(2.1) - 1 + F(2.1) = 2F(2.1) - 1 = 0.964 \Rightarrow P(RH_0/H_0) = 1 - 0.964 = 0.036$$

2) $$\begin{cases} RH_0 \ \text{si} \ z_{cal} = \dfrac{x - 50}{5} \notin [-2.1\ ;\ 2.1] \\ \overline{R}H_0 \ \text{sinon} \end{cases}$$



احتمال رفض الفرضية الصفرية بينما هي صحيحة ممثل بالمساحة

45 توجد داخل المجال لذلك يكون القرار بقبول الفرضية الصفرية، و كذلك القيمة 40.

3) $P(\overline{R}H_0/H_1) = P(\overline{R}H_0/p = 0.55) = P(40 \leq X \leq 60/p = 0.55).$

$$X \sim B(100, 0.55). \quad npq \geq 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$$

$$P(40 \leq X \leq 60/p = 0.55) = P\left(\frac{39.5-55}{4.9749} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60.5-55}{4.9749}\right)$$

$$= P(-3.1156 \leq Z \leq 1.1055) = 0.86$$

2) $P(\overline{R}H_0/H_1) = P(\overline{R}H_0/p = 0.60) = P(40 \leq X \leq 60/p = 0.60).$

$$X \sim B(100, 0.60). \quad npq \geq 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$$

$$P(40 \leq X \leq 60/p = 0.60) = P\left(\frac{39.5-60}{4.89899} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60.5-60}{4.89899}\right)$$

$$= P(-4.18 \leq Z \leq 0.102) = 0.54$$

نلاحظ أن احتمال الخطأ تناقص وذلك لأن 0.6 أبعد (بالمقارنة مع 0.55) من القيمة المفترضة 0.5 ومن ثم يكون من المستبعد الخطأ بمقدار 0.10 في قيمة النسبة الحقيقية النظرية p للحصول على الصورة.

التمرين 07:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\mu_{m_1-m_2} = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{sous } H_0: \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_{m_1-m_2} = 0$$

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{(m_1 - m_2) - 0}{\sigma_{m_1-m_2}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_{m_1-m_2} = \sqrt{\sigma^2_{m_1-m_2}} = \sqrt{\sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cong \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{50} + \frac{7^2}{60}} = 1.45$$

$$z_{cal} = \frac{(m_1 - m_2)}{\sigma_{m_1-m_2}} = \frac{86-81}{1.45} = 3.448 \quad ; \quad z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$$

$$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$$

ونستنتج أن بيانات الدراسة تؤيد فكرة أن تحسين ظروف العمل يزيد في إنتاجية العامل.

نحصل على نفس نتيجة الاختبار في حالة اعتماد اختبار ثنائي الاتجاه رغم أن مساحة الرفض من اليمين تتقلص إلى النصف:

$$z_{tab} = z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58 < z_{cal} = 3.448$$

لاحظ أننا استخدمنا S^2 تعويضا للتباين المجهول (في حالة العينة الكبيرة $\widehat{S}^2 \cong S^2$ لذلك لا نميز بينهما).