3.4 Exercices

3.4.1 Énoncés

1) Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$
   (d) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx$
   (e) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx.$
   (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(x/n)e^{-x}dx$
2) On pose : $I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
   (a) On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ telle que $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathbf{1}_{x\leq n}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g_n(x)=(n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right)-n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$.)
   (b) En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α.
3) Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour toute suite positive $(u_n)_{n\geq 0}$, on a : $\sum_{n\geq 0}u_n=\int_{\mathbb{N}}u_n\mu(dn)$.
   (a) Calculer $\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right]$.
   (b) Calculer $\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right]$.
4) Inégalité de Jensen.
   Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)=1$. Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ convexe et dérivable deux fois (et donc $\phi''\geq 0$). Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)=1$. Soit $f:(E,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(R))$ mesurable et telle que $\int_E f(x)d\mu(x)<+\infty$.
   (a) Montrer que $\forall z,y\in I$, $\phi(y)\geq\phi(z)+\phi'(z)(y-z)$
   (b) En prenant $z=\int_E f(t)d\mu(t)$ et $y=f(x)$ dans l'inegalité précédente, montrer que :
   $$\phi\left(\int_E f(x)d\mu(x)\right)\leq\int_E\phi\circ f(x)d\mu(x).$$
   (c) En déduire que pour toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1|f(x)|dx<+\infty$:
   $$\left(\int_0^1|f(x)|dx\right)^2\leq\int_0^1 f(x)^2dx.$$
5) (a) Montrer que $\forall z\geq 0$, $0\leq 1-e^{-z}\leq z$.
   (b) En déduire que $\forall y>0$, $x\mapsto\frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (c) Pour tout $y>0$, on pose
   $$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}dx\ .$$

Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer $F'(y)$. On rappelle que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2 \ .$$

(d) En déduire $F(y)$ à une constante près.

(e) Calculer cette constante en regardant $\lim_{n\to+\infty} F(1/n)$.

6) On considère pour $n\geq 0$ la série $\sum_{k\geq 0} u_{n,k}$ avec $u_{n,k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{2n^2+6n+1}{n^2+5n+\pi}\right)^k$.

(a) Montrer que cette série est convergente ($\forall n\geq 0$). On notera I_n sa limite.

(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3.4.2 Corrigés

(1) (a) — Pour tout $x\geq 1$, $\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}\leq\frac{n^2+1}{x^2n^2}\leq n^2+n^2x^2n^2\leq\frac{2}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty[$.

— Pour tout $x\geq 1$, $\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{x^2}$.

Donc, par théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty}\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = [-1/x]_1^{+\infty} = 1$.

(b) — $\forall x\in]0,1]$, $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $[0,1]$

— $\forall x\in]0,1]$,
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par convergence dominée $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)dx = 0$

(c) — $\forall x\in[0,1]$, $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right|\leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$.

— On a $\forall x\in[0,1]$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\log(1-\frac{x}{n})) = \exp(n(-x/n+\mathrm{o}(1/n))) = \exp(-x+\mathrm{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ par continuité de la fonction exponentielle.

Donc par convergence dominée,
$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1} \ .$$

(d) — $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}|\leq\frac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $]-\infty,+\infty[$,

— $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u)\underset{u\to 0}{\sim} u$

donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi \ .$$

(e) — $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}\leq e^{2-|x|}$$
qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.