

Dans ce chapitre, nous mettons en place le formalisme matriciel. Celui-ci nous permettra d'accéder à une présentation relativement claire des étapes de calcul de la MEF. Ensuite, après avoir introduit les notations et propriétés particulières de ce formalisme dans le cas où la structure a été discrétisée, notamment le concept de matrice de rigidité, nous proposons une présentation générale de la méthode des déplacements. Cette présentation, bien que superficielle, nous permet de découvrir les différentes phases de cette méthode de résolution qui est la plus largement utilisée en calcul des structures.

## 1 – FORMULATION MATRICIELLE DE LA MECANIQUE DES STRUCTURES

### 1.1 – Conventions et notations

Pour l'exposé de la MEF, il est préférable d'abandonner la notation indicielle utilisée au chapitre précédent et d'adopter une notation matricielle qui s'avère beaucoup plus pratique.

Si nous prenons le cas d'un problème d'élasticité 3D, l'état de contrainte en un point du solide ne sera plus représenté par un tenseur d'ordre 2, mais par un vecteur (matrice limitée à une seule colonne) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad \text{que l'on écrira plus commodément sous sa forme transposée :}$$

$$\sigma^T = \left[ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \right]$$

Le nombre des composantes de ce vecteur est limité à 6 puisque l'on sait que  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  et  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  (propriété de symétrie du tenseur des contraintes). De la même manière, l'état de déformation sera représenté par un vecteur à 6 composantes :

$$\varepsilon^T = \left[ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2 \varepsilon_{xy} \quad 2 \varepsilon_{yz} \quad 2 \varepsilon_{zx} \right]$$

Le choix des termes  $2 \varepsilon_{xy}$ ,  $2 \varepsilon_{yz}$  et  $2 \varepsilon_{zx}$  s'explique par le fait que l'on souhaite pouvoir calculer le potentiel de déformation en faisant un simple produit scalaire des vecteurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  :

$$w = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma \left( \dot{\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) \quad (1)$$

ce qui donne bien :  $w = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2 \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2 \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2 \sigma_{zx} \varepsilon_{zx})$

D'une manière générale, les notations utilisées sont les suivantes :

$\sigma$	vecteur des contraintes généralisées au point courant
$\varepsilon$	vecteur des déformations généralisées au point courant
$U$	vecteur des déplacements généralisés au point courant
$C$	matrice d'opérateurs différentiels
$D$	matrice constitutive du matériau
$\underline{f}$	vecteur des forces de volume
$\underline{p}$	vecteur des efforts appliqués en surface
$n$	vecteur représentant la normale extérieure à la surface du solide
$N$	matrice des cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface du solide

L'un des intérêts de ce type de notations est qu'il peut être appliqué également dans le cas des problèmes 1D (poutres) et 2D (plaques et coques). Il reste impératif que les vecteurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  soient définis de sorte à satisfaire l'équation (1) relative au calcul du potentiel de déformation. Par ailleurs, si les composantes de  $U$  sont dédiées normalement aux déplacements, elles pourront aussi représenter des rotations (celles des sections droites dans le cas des poutres).

## 1.2 - Equations de champ

Les équations de champ peuvent être reformulées en adoptant les nouvelles notations.

### 1.2.1 - Les relations déformations-déplacements ou relations cinématiques

$$\varepsilon = C U$$

### 1.2.2 - Les équations d'équilibre

En général, la matrice d'opérateurs différentiels intervenant dans les équations d'équilibre est la transposée de celle des relations déformations-déplacements. On a donc :

$$C^T \sigma + \underline{f} = 0$$

### 1.2.3 - Les relations contraintes-déformations ou relations d'élasticité

1<sup>ère</sup> forme :  $\sigma = D \varepsilon$

2<sup>ème</sup> forme :  $\varepsilon = D^{-1} \sigma$

La matrice  $C$  est symétrique. Remarquons qu'il est possible d'exprimer les équations d'équilibre en fonction des déplacements (équations de Navier) :

$$C^T D C U + \underline{f} = 0$$

## 1.3 – Conditions aux limites

### 1.3.1 - Les conditions aux limites cinématiques

$$U = \underline{U} \quad \text{sur } S_u$$

### 1.3.2 - Les conditions aux limites statiques

$$N^T \sigma = \underline{p} \quad \text{sur } S_p$$

Elles peuvent être exprimées en fonction des déplacements :

$$N^T D C u = \underline{p} \quad \text{sur } S_p$$

#### Exemple – Cas des problèmes d'élasticité 3D

On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma^T &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}] \\ \varepsilon^T &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{zx}] \\ U^T &= [u \quad v \quad w] \\ \underline{f}^T &= [\underline{f}_x \quad \underline{f}_y \quad \underline{f}_z] \\ \underline{p}^T &= [\underline{p}_x \quad \underline{p}_y \quad \underline{p}_z] \\ n^T &= [n_x \quad n_y \quad n_z] \end{aligned}$$

On peut établir sans difficulté l'expression de  $C^T$  :

$$C^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que les relations déformations-déplacements  $\varepsilon = C U$  sont bien de la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

De la même manière, les équations d'équilibre  $C^T \sigma + \underline{f} = 0$  s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{f}_x \\ \underline{f}_y \\ \underline{f}_z \end{bmatrix} = 0$$

A partir de la relation de Hooke  $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$ , on peut établir l'expression de D :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu) & 2\nu & 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu & 2(1-\nu) & 2\nu & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu & 2\nu & 2(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Enfin, l'expression de  $N^T$  est :

$$N^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

#### 1.4 – Théorème de l'énergie potentielle totale.

On a vu que les notations avaient été choisies de sorte à pouvoir écrire le potentiel de déformation sous la forme :  $w = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon$ .

On a donc :

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon$$

L'énergie de déformation interne se calcule par :

$$W = \int_D w(\varepsilon) dv = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon^T D \varepsilon dv$$

L'expression de l'énergie potentielle totale devient :

$$V = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon^T D \varepsilon dv - \int_{S_p} \underline{p} U ds - \int_D \underline{f} U dv = W - T$$

**Théorème :** Le champ des déplacements U associé à un état d'équilibre stable minimise la fonctionnelle V et réciproquement.

## 2 – STRUCTURES DISCRETES

Le formalisme matriciel est particulièrement adapté dans le cas où on effectue parallèlement une discrétisation de la structure. Il peut être appliqué de manière immédiate aux cas simples des structures à base de barres et de poutres.

Discrétiser (mailler) une structure, c'est d'une part la décomposer en éléments de formes géométriques simples prédéfinies (segments de droite ou de courbe pour les poutres, triangles ou quadrangles pour les plaques...). Ces éléments sont interconnectés en des points appelés nœuds. C'est d'autre part, et surtout, remplacer dans la formulation du problème certaines fonctions inconnues (champ des déplacements en général) par un nombre fini de paramètres discrets qui représentent les valeurs de ces fonctions aux nœuds.

### 2.1 – Notations

Les notations suivantes viennent compléter celles introduites au paragraphe précédent :

- s nombre de nœuds de la structure
- m nombre de composantes de déplacement (ou degrés de liberté, noté ddl) par nœud
- N nombre total de ddl :  $N = m s$
- q vecteur des déplacements aux nœuds (N composantes)
- F vecteur des charges appliquées aux nœuds (N composantes)

$$q^T = [q_1 \quad \dots \quad q_i \quad \dots \quad q_N]$$

$$F^T = [F_1 \quad \dots \quad F_i \quad \dots \quad F_N]$$

Nous supposons ici que toutes les charges appliquées à la structure sont des charges concentrées aux nœuds (forces ou moments). Nous verrons plus tard (élément poutre) qu'il est possible de traiter aussi par ce biais le cas des charges réparties.

### 2.2 – Théorème de Castigliano

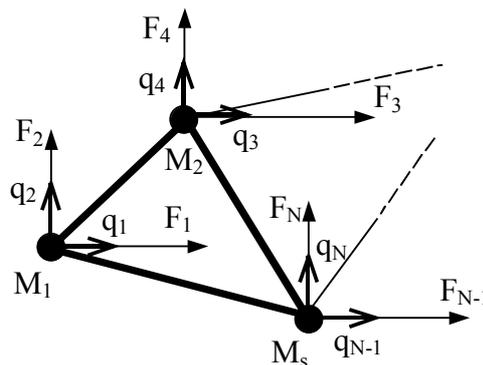


Figure 1 – Structure discrète

Soit une structure discrète en équilibre sous l'action d'un système de forces ponctuelles ( $F_1, F_2, \dots, F_N$ ). Soit  $q_i$  le déplacement du nœud d'application de la force  $F_i$  dans la direction de cette force. Considérons, à partir de cette position d'équilibre, un système de déplacements virtuels  $\delta q_i$  où  $\delta q_i$  représente un petit déplacement supplémentaire du nœud d'application de la force  $F_i$  dans la direction de cette force. On a, d'après le principe des travaux virtuels, à l'équilibre :

$$\delta W = \delta T$$

Or, ici, dans le cas d'un système de forces ponctuelles, le travail des forces appliquées  $T$  est de la forme :

$$T = F^T q$$

D'où :

$$\delta T = F_i \delta q_i$$

Et donc :

$$F_i = \frac{\delta W}{\delta q_i}$$

Nous disposons donc de  $N$  équations qui constituent les conditions d'équilibre des nœuds, et qui peuvent être synthétisées en une équation unique :

$$F = \nabla_q W$$

Ce résultat est connu sous le nom de premier théorème de Castigliano.

### 2.3 – Matrice de rigidité et de flexibilité

Définition. On appelle matrice de rigidité d'une structure la matrice  $K$  qui permet d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements :

$$W = \frac{1}{2} q^T K q$$

Il apparaît alors que :

$$\nabla_q W = K q$$

Et donc, si on rapproche ce résultat de celui du paragraphe précédent, on en déduit :

$$K q = F$$

La matrice de flexibilité  $S$  d'une structure est la matrice inverse de la matrice de rigidité  $K$ .

$$S = K^{-1} \quad \text{et} \quad S F = q$$

On peut montrer, en utilisant le théorème de Maxwell-Betti, que la matrice  $S$  est symétrique. La symétrie de  $S$  implique celle de  $K$ .

## 3 –METHODE DES DEPLACEMENTS

Il existe deux types de méthodes matricielles qui permettent de résoudre les problèmes en analyse des structures :

- la **méthode des déplacements** dans laquelle le problème est formulé en fonction des déplacements aux nœuds
- la **méthode des forces** dans laquelle le problème est formulé en fonction des forces aux nœuds (forces internes ou réactions aux appuis)

Nous nous limiterons ici à la présentation de la méthode des déplacements. Nous allons décrire cette méthode en nous appuyant sur un exemple simple qui met en jeu deux éléments de type barre, sans toutefois détailler le calcul des termes des matrices de rigidité (ceci sera vu au chapitre concernant les éléments barre). Le but poursuivi ici est juste d'introduire les différentes étapes qui forment la méthode et de définir les principaux concepts sur lesquels elle s'appuie. En effet, si on se limite aux grandes lignes, il s'agit d'une méthode générale qui peut être mise en oeuvre à l'identique quel que soit le type d'éléments. Nous la présentons donc une fois pour toutes. Nous définirons dans les chapitres suivants les particularités qui viennent compléter la méthode en fonction du type d'élément étudié.

L'exemple retenu est une structure qui comporte 2 éléments (notés e1 et e2), 3 nœuds (notés 1, 2 et 3) et 2 ddl par nœud ( $u_j$  et  $v_j$  : déplacements du nœud  $j$  dans les directions  $x$  et  $y$ ). Les éléments e1 et e2 sont interconnectés au nœud 2 (voir figure 2). Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$q^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]$$

Tous ces déplacements sont considérés, dans un premier temps, comme des inconnues. Cette structure est soumise à un chargement extérieur utile donné  $P$  :

$$P^T = [P_{X1} \quad P_{Y1} \quad P_{X2} \quad P_{Y2} \quad P_{X3} \quad P_{Y3}]$$

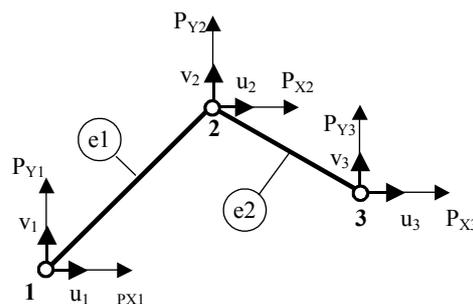


Figure 2 – Structure à deux barres

La méthode des déplacements est composée des étapes de calcul suivantes :

1. Formulation élémentaire
  - Calcul des matrices de rigidité élémentaires
2. Formulation globale
  - Assemblage des matrices de rigidité de manière à satisfaire les équations d'équilibre des nœuds
  - Prise en compte des conditions de déplacements imposés
  - Résolution par rapport aux inconnues de déplacement
  - Calcul des réactions aux appuis
  - Calcul des contraintes dans les éléments

### 3.1 – Formulation élémentaire

La structure est préalablement discrétisée en éléments. On caractérise le comportement de chaque élément, considéré comme libre (pas de condition de déplacement imposé aux nœuds), en fonction du vecteur  $q^e$  représentant ses déplacements nodaux. On calcule la matrice de rigidité de chaque élément. D'après ce que nous avons vu, elle est telle que l'énergie de déformation de l'élément s'exprime sous la forme :

$$W^e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e$$

Généralement, les matrices sont calculées d'abord dans les axes locaux des éléments. Les transformations nécessaires sont ensuite effectuées pour les exprimer dans le système d'axes globaux.

Lien avec les efforts. Considérons maintenant les forces que les nœuds exercent sur les éléments. Ces forces sont nommées forces nodales et notées  $Q^e$ . Le théorème de Castigliano appliqué au seul élément e1, puis au seul élément e2 permet d'écrire :

$$K^{e1} q^{e1} = Q^{e1} \quad \text{et} \quad K^{e2} q^{e2} = Q^{e2}$$

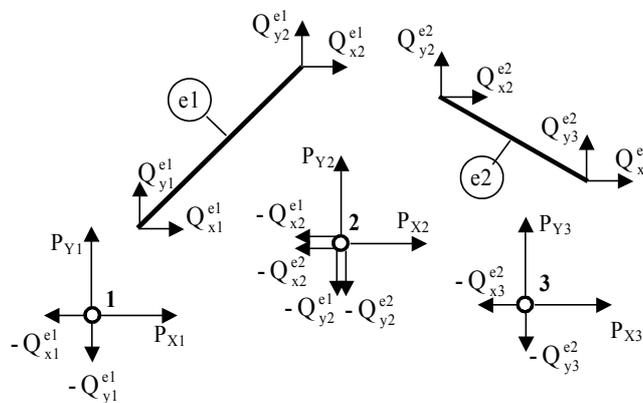


Figure 3 – Forces nodales sur les barres

Nous avons, sous forme détaillée :

Élément e1 :

Nœud 1	Nœud 2	
$k_{11a}^{e1}$	$k_{11c}^{e1}$	$k_{12a}^{e1}$
$k_{11c}^{e1}$	$k_{11b}^{e1}$	$k_{12d}^{e1}$
$k_{12a}^{e1}$	$k_{12d}^{e1}$	$k_{22a}^{e1}$
$k_{12c}^{e1}$	$k_{12b}^{e1}$	$k_{22c}^{e1}$
$k_{12c}^{e1}$	$k_{12b}^{e1}$	$k_{22c}^{e1}$
$k_{12c}^{e1}$	$k_{12b}^{e1}$	$k_{22c}^{e1}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{x1}^{e1} \\ Q_{y1}^{e1} \\ Q_{x2}^{e1} \\ Q_{y2}^{e1} \end{bmatrix}$$

Nœud 1  
Nœud 2

Élément e2 :

Nœud 2	Nœud 3	
$k_{22a}^{e2}$	$k_{22c}^{e2}$	$k_{23a}^{e2}$
$k_{22c}^{e2}$	$k_{22b}^{e2}$	$k_{23d}^{e2}$
$k_{23a}^{e2}$	$k_{23d}^{e2}$	$k_{33a}^{e2}$
$k_{23c}^{e2}$	$k_{23b}^{e2}$	$k_{33c}^{e2}$
$k_{23c}^{e2}$	$k_{23b}^{e2}$	$k_{33c}^{e2}$
$k_{23c}^{e2}$	$k_{23b}^{e2}$	$k_{33c}^{e2}$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{x2}^{e2} \\ Q_{y2}^{e2} \\ Q_{x3}^{e2} \\ Q_{y3}^{e2} \end{bmatrix}$$

Nœud 2  
Nœud 3

Dans cette expression, la composante  $Q_{x2}^{e1}$  représente l'action du nœud 2 sur l'élément e1 dans la direction x.

## 3.2 – Formulation globale

### 3.2.1 - Assemblage

L'énergie de déformation de la structure complète est la somme des énergies de déformation des éléments. Cette propriété permet de construire la matrice de rigidité globale  $K$  à partir des matrices de rigidité élémentaires.

$$W = \sum_{\text{éléments}} W^e \quad \text{d'où } K \text{ est telle que : } \quad \frac{1}{2} q^T K q = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e$$

Connaissant  $K$  et le chargement extérieur utile  $P$ , on peut mettre en place les équations d'équilibre :

$$K q = F$$

Dans le cadre de ce chapitre d'introduction, nous allons procéder de manière détaillée en écrivant explicitement les conditions d'équilibre des nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } \begin{cases} -Q_{x1}^{e1} + P_{X1} = 0 \\ -Q_{y1}^{e1} + P_{Y1} = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11a}^{e1} & k_{11c}^{e1} & k_{12a}^{e1} & k_{12c}^{e1} \\ k_{11c}^{e1} & k_{11b}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{12b}^{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Nœud 2 : } \begin{cases} -Q_{x2}^{e1} - Q_{x2}^{e2} + P_{X2} = 0 \\ -Q_{y2}^{e1} - Q_{y2}^{e2} + P_{Y2} = 0 \end{cases} \quad \text{soit :}$$

$$\begin{bmatrix} k_{12a}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{22a}^{e1} + k_{22a}^{e2} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{23a}^{e2} & k_{23c}^{e2} \\ k_{12c}^{e1} & k_{12b}^{e1} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{22b}^{e1} + k_{22b}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{23b}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X2} \\ P_{Y2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Nœud 3 : } \begin{cases} -Q_{x3}^{e2} + P_{X3} = 0 \\ -Q_{y3}^{e2} + P_{Y3} = 0 \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{bmatrix} k_{23a}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{33a}^{e2} & k_{33c}^{e2} \\ k_{23c}^{e2} & k_{23b}^{e2} & k_{33c}^{e2} & k_{33b}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X3} \\ P_{Y3} \end{bmatrix}$$

En regroupant ces résultats sous forme matricielle, il vient :

Nœud 1	Nœud 2		Nœud 3								
$k_{11a}^{e1}$	$k_{11c}^{e1}$	$k_{12a}^{e1}$	$k_{12c}^{e1}$	0	0	$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} P_{X1} \\ P_{Y1} \\ P_{X2} \\ P_{Y2} \\ P_{X3} \\ P_{Y3} \end{bmatrix}$	Nœud 1		
$k_{11c}^{e1}$	$k_{11b}^{e1}$	$k_{12d}^{e1}$	$k_{12b}^{e1}$	0	0				$v_1$	$P_{Y1}$	Nœud 2
$k_{12a}^{e1}$	$k_{12d}^{e1}$	$k_{22a}^{e1} + k_{22a}^{e2}$	$k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2}$	$k_{23a}^{e2}$	$k_{23c}^{e2}$				$u_2$	$P_{X2}$	Nœud 3
$k_{12c}^{e1}$	$k_{12b}^{e1}$	$k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2}$	$k_{22b}^{e1} + k_{22b}^{e2}$	$k_{23d}^{e2}$	$k_{23b}^{e2}$				$v_2$	$P_{Y2}$	
0	0	$k_{23a}^{e2}$	$k_{23d}^{e2}$	$k_{33a}^{e2}$	$k_{33c}^{e2}$				$u_3$	$P_{X3}$	
0	0	$k_{23c}^{e2}$	$k_{23b}^{e2}$	$k_{33c}^{e2}$	$k_{33b}^{e2}$	$v_3$	$P_{Y3}$				

Il apparaît que la règle d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires est d'additionner, pour chaque nœud, les matrices de rigidité nodale des éléments ayant ce nœud en commun. La règle mise en évidence dans cet exemple simple reste valable dans tous les autres cas de la MEF.

### 3.2.2 - Prise en compte des conditions de déplacement imposé

La matrice de rigidité globale  $K$  obtenue possède un nombre de singularités égal au nombre des modes de déplacement possibles avant que la structure ne soit connectée à des appuis (structure libre). Les conditions d'appui doivent être en nombre suffisant pour empêcher ces déplacements et permettre ainsi d'extraire de la matrice  $K$  une sous-matrice définie positive relative aux seuls déplacements inconnus (après prise en compte des déplacements imposés, la structure doit être isostatique ou hyperstatique, mais ne doit pas présenter de mobilités résiduelles). Avant de résoudre le système des équations d'équilibre pour déterminer les déplacements inconnus, il faut prendre en compte les conditions de déplacement imposé.

Reprenons l'exemple de la structure à deux barres. Considérons qu'il existe les conditions suivantes :

- une liaison de type articulation au nœud 1 impose des déplacements nuls en ce nœud, d'où  $u_1 = v_1 = 0$
- une liaison glissière selon  $x$  au nœud 3 impose un déplacement nul en ce nœud dans la direction  $y$ , d'où  $v_3 = 0$
- un déplacement est imposé au nœud 2, celui dans la direction  $x$ , soit  $u_2 = \underline{u}_2$

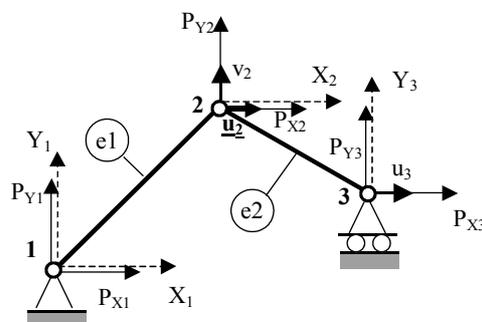


Figure 3 – Structure à deux barres avec conditions de déplacement imposé

Toutefois, la prise en compte de ces conditions doit s'accompagner de la mise en place des forces susceptibles de les créer. Il faut donc rajouter au modèle les forces nodales, inconnues a priori, qui permettront d'obtenir les déplacements que l'on veut imposer. Dans notre exemple, il s'agit :

- des efforts  $X_1$  et  $Y_1$  qui permettront d'obtenir  $u_1 = v_1 = 0$  au niveau du nœud 1
- de l'effort  $Y_3$  qui permettra d'obtenir  $v_3 = 0$  au niveau du nœud 3
- de l'effort  $X_2$  qui permettra d'obtenir  $u_2 = \underline{u}_2$  au niveau du nœud 2

Ces efforts sont appelés les « réactions aux appuis ». Cette dénomination prend tout son sens dans le cas où les déplacements imposés sont relatifs à une liaison au bâti.  $X_1$  représente en effet l'action de l'appui (du bâti) sur la structure dans la direction x au niveau du nœud 1. Le système de référence, après prise en compte des conditions de déplacement imposé, devient :

$$\begin{bmatrix} k_{11a}^{e1} & k_{11c}^{e1} & k_{12a}^{e1} & k_{12c}^{e1} & 0 & 0 \\ k_{11c}^{e1} & k_{11b}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{12b}^{e1} & 0 & 0 \\ k_{12a}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{22a}^{e1} + k_{22a}^{e2} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{23a}^{e2} & k_{23c}^{e2} \\ k_{12c}^{e1} & k_{12b}^{e1} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{22b}^{e1} + k_{22b}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{23b}^{e2} \\ 0 & 0 & k_{23a}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{33a}^{e2} & k_{33c}^{e2} \\ 0 & 0 & k_{23c}^{e2} & k_{23b}^{e2} & k_{33c}^{e2} & k_{33b}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{u}_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X1} + X_1 \\ P_{Y1} + Y_1 \\ P_{X2} + X_2 \\ P_{Y2} \\ P_{X3} \\ P_{Y3} + Y_3 \end{bmatrix}$$

Les déplacements qui restent inconnus sont les déplacements  $v_2$  et  $u_3$ . Des forces sont venues se rajouter à celles du chargement utile P, elles apparaissent dans le membre de droite des lignes associées aux déplacements imposés. Le système présente une inconnue dans chaque ligne, un déplacement quand elle est dans le membre de gauche, un effort quand elle est dans le membre de droite. Le système obtenu à l'issue de cette étape est le système d'équations d'équilibre  $Kq = F$  caractéristique de la structure étudiée dans son contexte d'utilisation.

La méthode s'attache à calculer dans un premier temps les déplacements. Si on ne retient que les lignes associées à des déplacements non nuls, le système se réduit ainsi :

$$\begin{bmatrix} k_{22a}^{e1} + k_{22a}^{e2} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{23a}^{e2} \\ k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{22b}^{e1} + k_{22b}^{e2} & k_{23d}^{e2} \\ k_{23a}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{33a}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X2} + X_2 \\ P_{Y2} \\ P_{X3} \end{bmatrix}$$

Le déplacement  $\underline{u}_2$  étant fixé, le système peut encore être transformé en :

$$\begin{bmatrix} k_{22b}^{e1} + k_{22b}^{e2} & k_{23d}^{e2} \\ k_{23d}^{e2} & k_{33a}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{Y2} \\ P_{X3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2}) \underline{u}_2 \\ k_{23a}^{e2} \underline{u}_2 \end{bmatrix}$$

Seules les inconnues de déplacement  $v_2$  et  $u_3$  apparaissent dans ce système.

### 3.2.3 - Résolution du système linéaire

Si les conditions de déplacement imposé sont en nombre suffisant, le système linéaire résiduel peut être résolu car la sous-matrice mise en jeu n'est plus singulière. Dans les cas réels, on aboutit à un système de très grande taille. Il existe des méthodes de résolution appropriées qui tirent profit des propriétés particulières des matrices considérées (matrices creuses, c'est-à-dire comptant de très nombreux termes nuls).

### 3.2.4 - Calcul des réactions aux appuis

Si on ne retient que les lignes associées à des forces inconnues et les colonnes associées à des déplacements non nuls, le système de référence se réduit ainsi :

$$\begin{bmatrix} k_{12a}^{e1} & k_{12c}^{e1} & 0 \\ k_{12d}^{e1} & k_{12b}^{e1} & 0 \\ k_{22a}^{e1} + k_{22a}^{e2} & k_{22c}^{e1} + k_{22c}^{e2} & k_{23a}^{e2} \\ k_{23c}^{e2} & k_{23b}^{e2} & k_{33c}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{X1} + X_1 \\ P_{Y1} + Y_1 \\ P_{X2} + X_2 \\ P_{Y3} + Y_3 \end{bmatrix}$$

Tous les déplacements étant maintenant connus, ce système permet d'obtenir sans difficulté les réactions aux appuis  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_2$  et  $Y_3$ .

Remarque. Dans notre exemple, il apparaît clairement au niveau des systèmes à résoudre que les forces extérieures  $P_{X1}$ ,  $P_{Y1}$ ,  $P_{X2}$  et  $P_{Y3}$  n'interviennent pas dans le calcul des déplacements  $v_2$  et  $u_3$ . Elles n'ont aucun effet sur les déplacements de la structure. Le système ci-dessus nous laisse deviner que ces forces sont directement imputées aux réactions aux appuis associées (c'est le bâti qui équilibre directement ces forces).

### 3.2.5 - Calcul des forces internes et des contraintes dans les éléments

Après résolution, tous les déplacements nodaux sont connus. On peut alors calculer les forces nodales internes  $Q_{xi}^{ej}$  et  $Q_{yi}^{ej}$  en reprenant chaque élément séparément :

$$\begin{bmatrix} k_{11a}^{e1} & k_{11c}^{e1} & k_{12a}^{e1} & k_{12c}^{e1} \\ k_{11c}^{e1} & k_{11b}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{12b}^{e1} \\ k_{12a}^{e1} & k_{12d}^{e1} & k_{22a}^{e1} & k_{22c}^{e1} \\ k_{12c}^{e1} & k_{12b}^{e1} & k_{22c}^{e1} & k_{22b}^{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{x1}^{e1} \\ Q_{y1}^{e1} \\ Q_{x2}^{e1} \\ Q_{y2}^{e1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} k_{22a}^{e2} & k_{22c}^{e2} & k_{23a}^{e2} & k_{23c}^{e2} \\ k_{22c}^{e2} & k_{22b}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{23b}^{e2} \\ k_{23a}^{e2} & k_{23d}^{e2} & k_{33a}^{e2} & k_{33c}^{e2} \\ k_{23c}^{e2} & k_{23b}^{e2} & k_{33c}^{e2} & k_{33b}^{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{x2}^{e2} \\ Q_{y2}^{e2} \\ Q_{x3}^{e2} \\ Q_{y3}^{e2} \end{bmatrix}$$

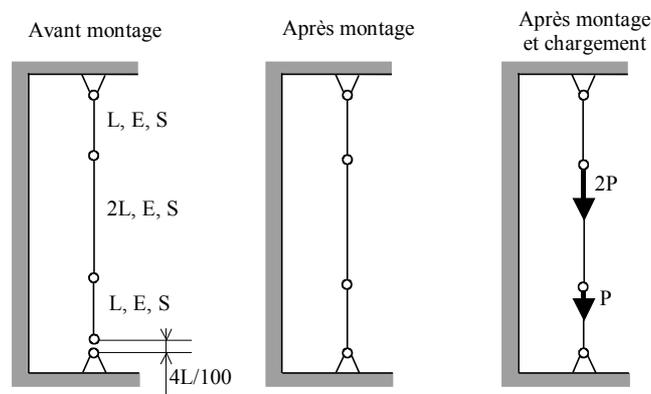
Par ailleurs, il est possible d'exploiter des relations matricielles qui donnent le vecteur des contraintes  $\sigma^e$  d'un élément à partir des déplacements nodaux  $q^e$  de l'élément. Ces relations diffèrent selon le type d'élément considéré.

## 5 - EXERCICES

**Exercice 3.1** – Etablir l'expression des vecteurs et matrices utiles à la formulation matricielle dans le cas d'un état plan de contrainte (élasticité 2D, contraintes planes). On utilisera le plan Oxy. On rappelle que ce modèle se traduit par les relations :  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ , ce qui conduit à  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ . La composante  $\varepsilon_{zz}$  n'est pas nulle mais peut se déduire des composantes de contraintes par :  $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ .

**Exercice 3.2** – Etablir l'expression des vecteurs et matrices utiles à la formulation matricielle dans le cas d'un état plan de déformation (élasticité 2D, déformations planes). On utilisera le plan Oxy. On rappelle que ce modèle se traduit par les relations :  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ , ce qui conduit à  $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ . La composante  $\sigma_{zz}$  n'est pas nulle mais peut se déduire des autres composantes par :  $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ .

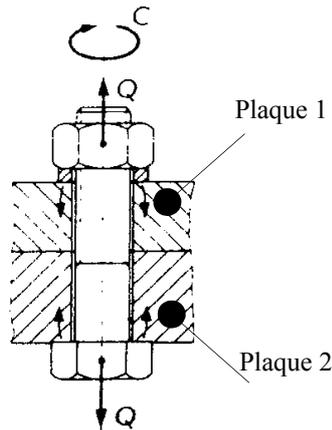
**Exercice 3.3** – Considérons la structure représentée ci-après. Elle est formée de 3 barres articulées mais montées de sorte qu'elles soient alignées verticalement. Ces trois barres ont la même section droite S, le même module d'élasticité E, et sont respectivement de longueurs L, 2L et L. Elles sont montées avec précontrainte entre les deux parois d'un bâti rigide. Pour ce faire, les deux articulations du bâti sont distantes de  $4L + 4L/100$ . En service, ces barres supportent un chargement extérieur égal à 2P et P aux articulations intermédiaires (voir figure).



Calculer, en utilisant la méthode des déplacements, le déplacement des articulations intermédiaires, les réactions aux appuis et les forces internes dans les barres

- 1 – après montage mais sans le chargement extérieur
- 2 – après montage et avec le chargement extérieur

**Exercice 3.4** – Considérons l'assemblage boulonné représenté ci-après. Il comporte deux plaques épaisses serrées par un boulon. Nous supposons que toutes les pièces travaillent axialement (pas de charges décentrées induisant de la flexion) et dans leur zone d'élasticité linéaire. Nous supposons de plus que les deux plaques ont les mêmes caractéristiques, notamment la même épaisseur. Nous pouvons faire une analogie avec des ressorts et associer une raideur à chaque pièce :  $K_P$  pour chacune des deux plaques et  $K_B$  pour le boulon.



On note  $\delta$  le déplacement axial relatif de l'écrou par rapport à la vis qui est imposé au moment du serrage.

1 – En utilisant la méthode des déplacements et un modèle discret à base de ressorts, établir, en fonction de  $\delta$ , l'expression de l'allongement de la vis et du rétrécissement des plaques sous l'action du serrage. Calculer l'effort interne dans la vis (appelé couramment force de serrage  $Q$ ).

Considérons maintenant qu'un chargement extérieur purement axial tendant à séparer les plaques est appliqué en plus à la structure : action  $P$  sur la plaque 1 et action opposée  $-P$  sur la plaque 2.

2 – En utilisant un modèle discret à base de ressorts et les résultats utiles issus de la méthode des déplacements, établir, en fonction de  $K_p$ ,  $K_B$  et de  $P$ , l'expression de la valeur minimale  $\delta_{\min}$  de  $\delta$  qui permet d'éviter le décollement des deux plaques quand celles-ci sont soumises au chargement extérieur  $P$ , cela dans chacun des trois cas suivants (voir figure) :

- on suppose que l'action  $P$  est appliquée dans le plan médian de la plaque 1 et l'action  $-P$  dans le plan médian de la plaque 2.
- on suppose que l'action  $P$  est appliquée dans le plan supérieur de la plaque 1 et l'action  $-P$  dans le plan inférieur de la plaque 2.
- on suppose que l'action  $P$  est appliquée dans le plan inférieur de la plaque 1 et l'action  $-P$  dans le plan supérieur de la plaque 2.

