ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Colloques STI – Gymnases 2014

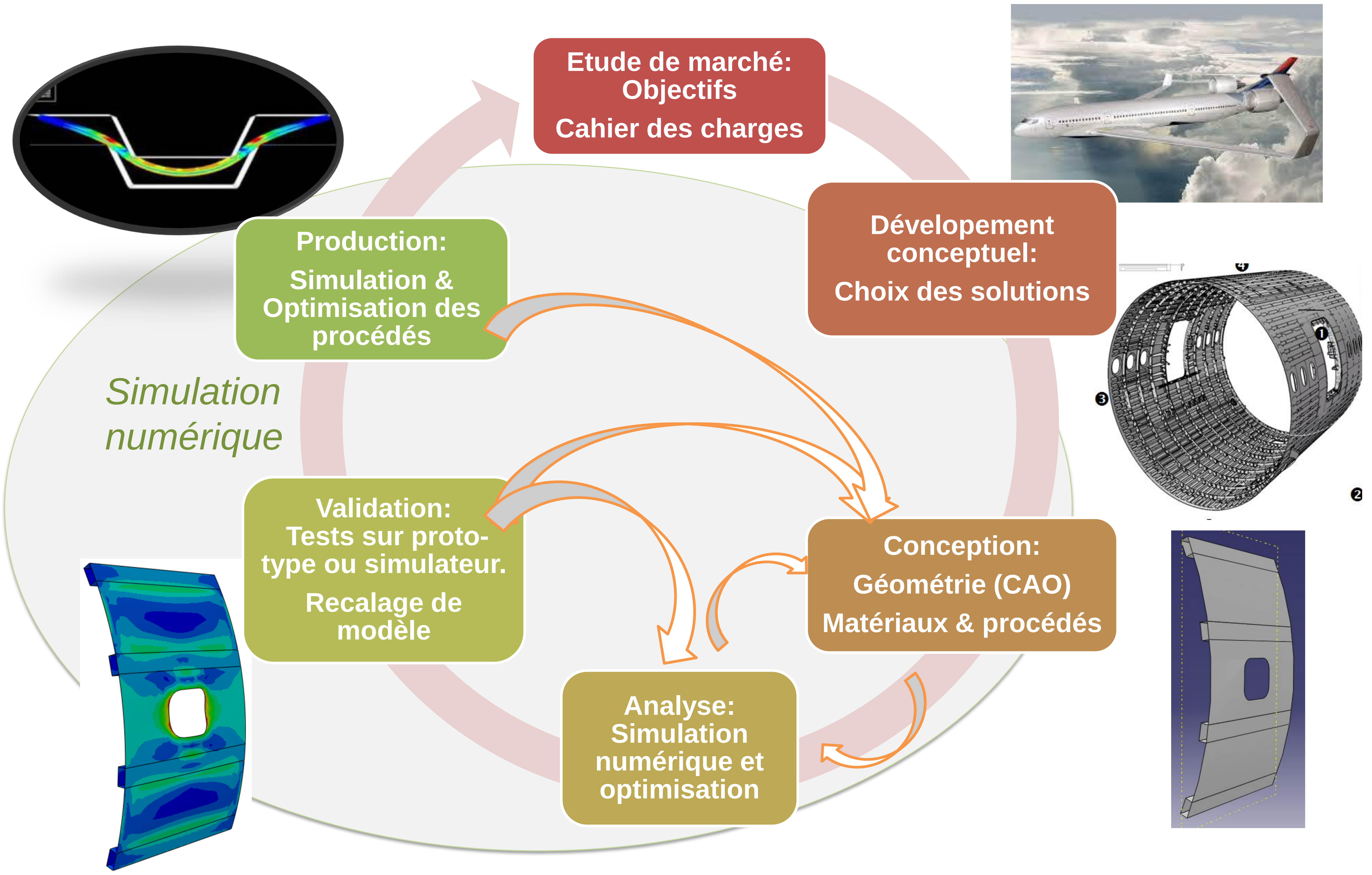
Modélisation numérique en mécanique:
Des matériaux aux structures

Joël Cugnoni

Laboratoire de mécanique appliquée et d'analyse de fiabilité

Processus de conception mécanique: Importance de la simulation numérique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE



Des matériaux aux structures…

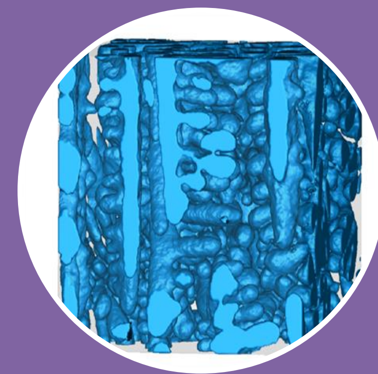
… une question d'échelle !

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

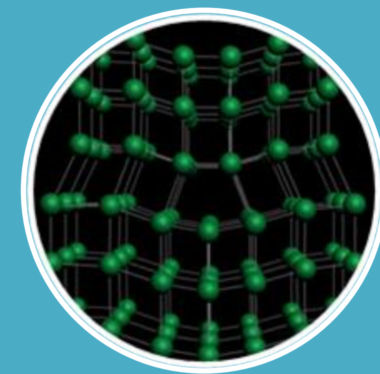
Structure

Solide continu

p.ex pièce mécanique ou composant



Microstructure p.ex phase ou grains



Crystal ou molécule(s)

Echelle atomistique

100m – 1m | 1m -1 mm | 100 μm -1 μm | 1 μm – 1nm | 0.1 nm

Force / Déplacement

Contrainte / Déformation

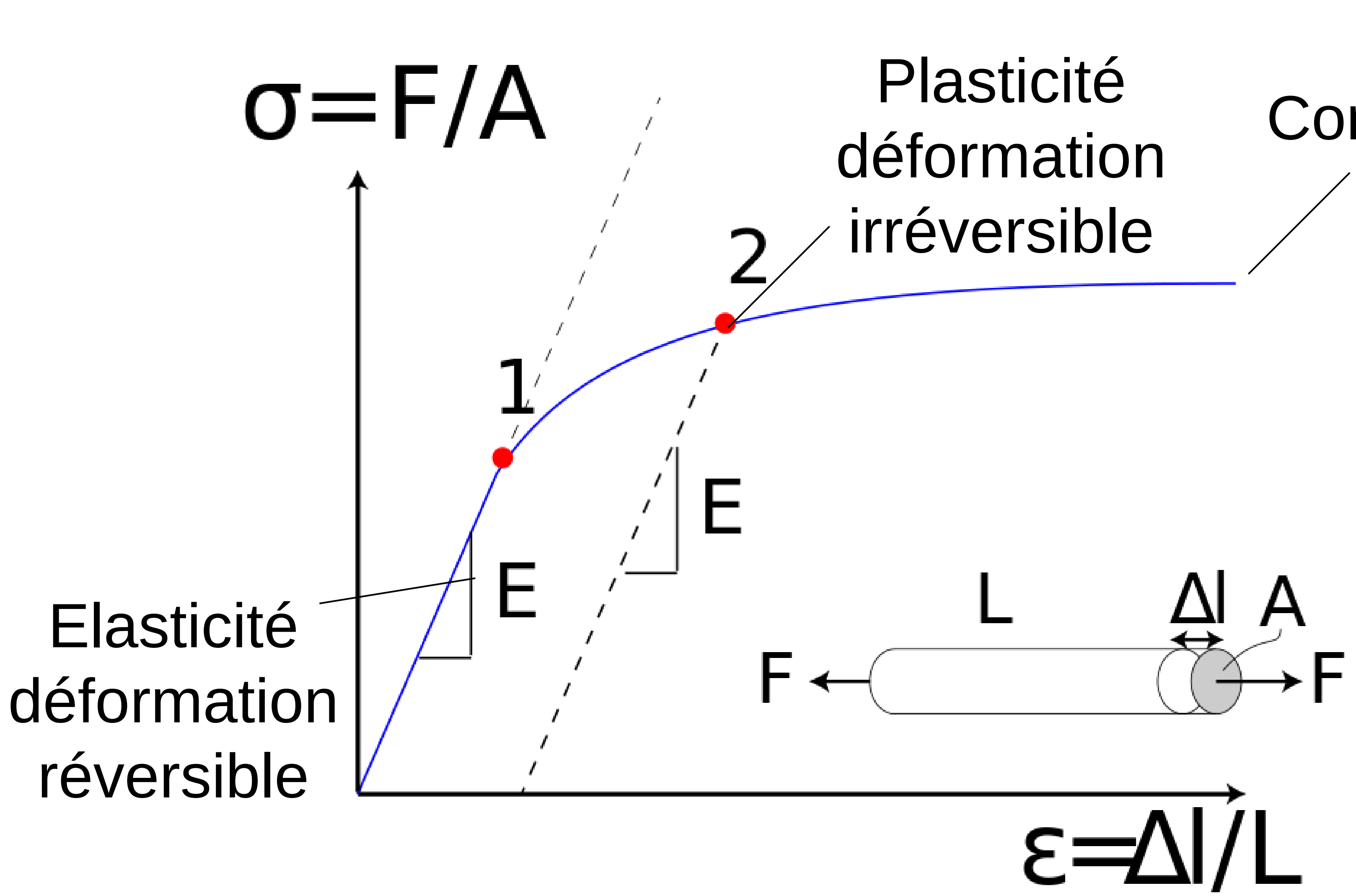
Contrainte / Déformation

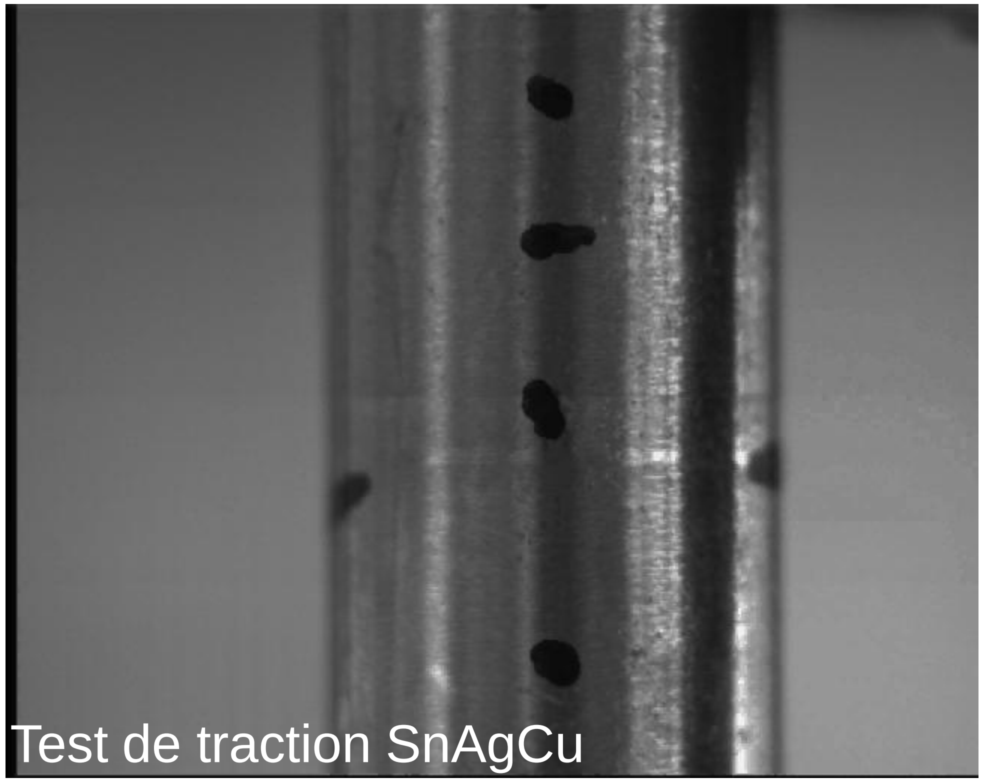
Contraintes / Dislocations

Distance /Forces d'interactions

Mécanique des milieux continus

Essai de traction: comportement d'un matériau





Loi de comportement: déterminée **expérimentalement** !

Lien entre contraintes et déformations $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon)$

Si le matériau est élastique et linéaire: $\boldsymbol{\sigma} = C\,\boldsymbol{\varepsilon}$

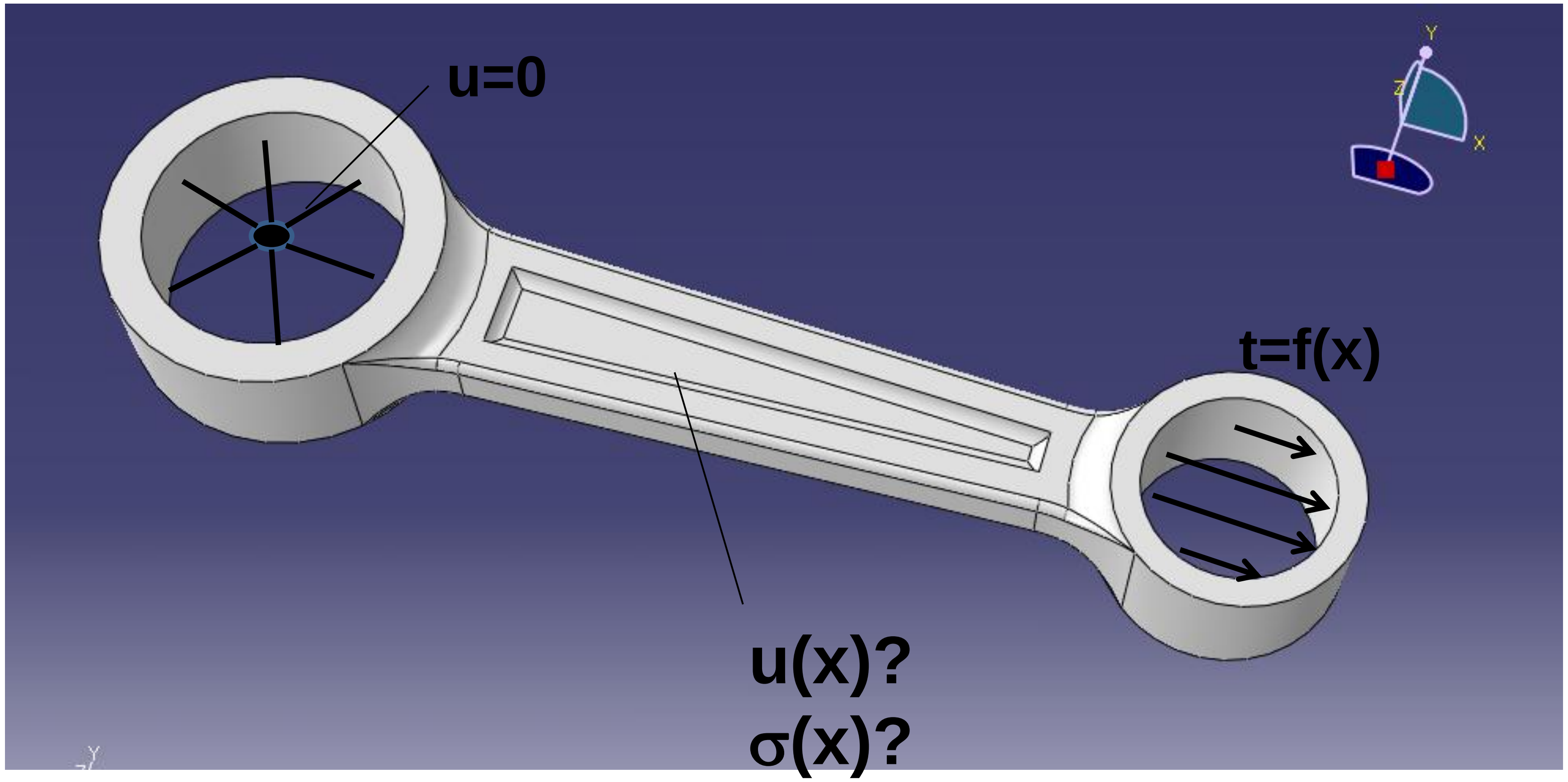
=> Physique expérimentale, TP, mesure

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Question: est-ce que la pièce cassera ?

Données du problème:

Géométrie, forces et déplacements imposés, propriétés de matériau



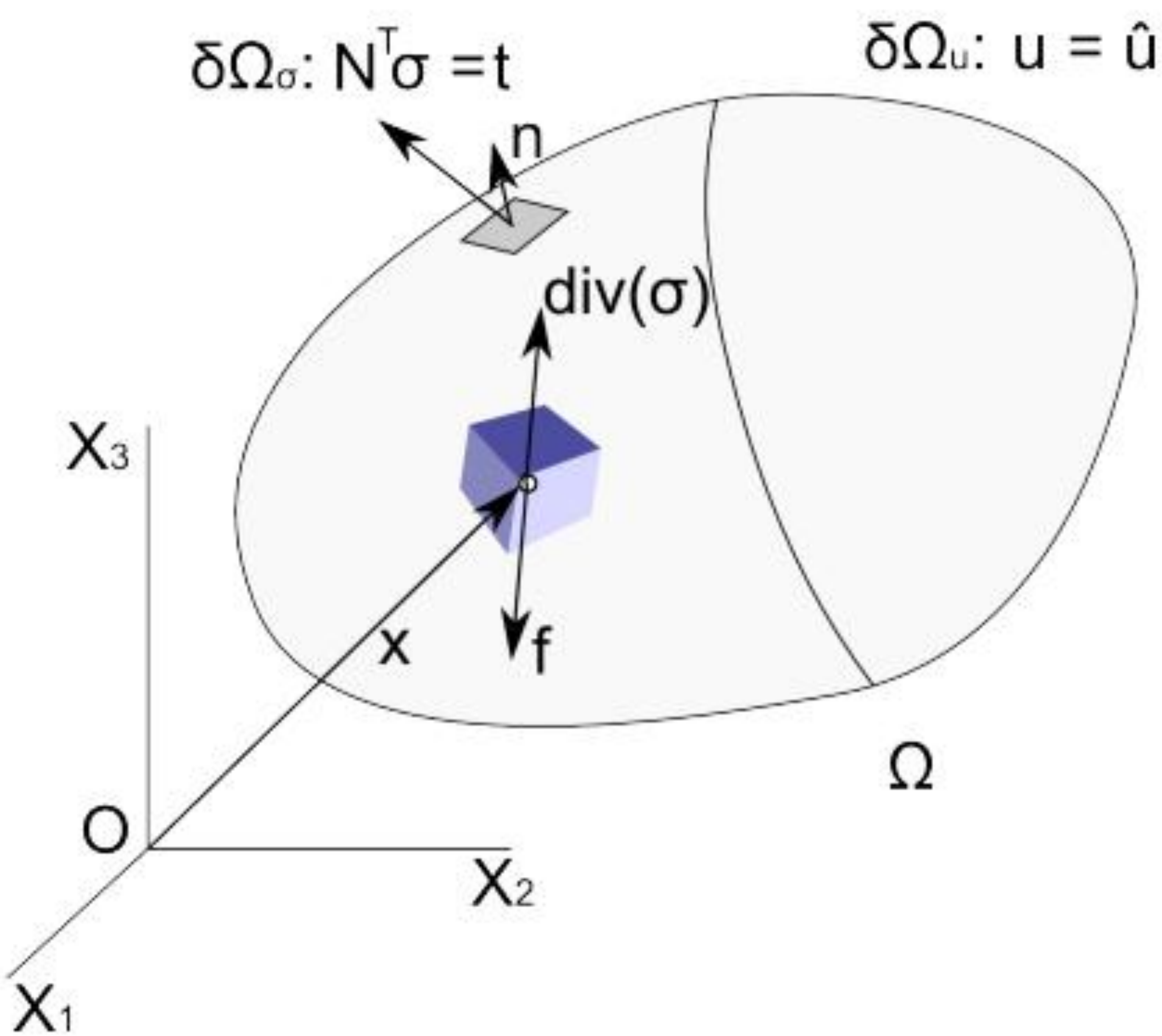
Calculer le champ de déplacement **u**(**x**) et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$(**x**) pour vérifier la fiabilité de la pièce:

Critère: σ(**x**) < σ_{limite} en tout point **x** de la pièce

Equilibre statique :
Un problème d'équations différentielles…

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

*Problème: trouver le champs de déplacement **u**(**x**) qui satisfisait les équations suivantes en tout point **x***



$$\begin{cases} div(\sigma(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \\ \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\ \epsilon(\mathbf{x}) \\ \epsilon(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Avec les conditions de bords

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \delta\Omega_u$$

=> *déplacements imposés*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \forall x \in \delta\Omega_\sigma$$

=> *forces externes*

Difficile voir impossible à résoudre…

=> Analyse, Calcul différentiel

Equilibre statique:

Point de vue “énergétique”

*Si on multiplie l’équation différentielle par une fonction test quelconque δ**u** et que l’on intégre sur le domaine, nous obtenons:*

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \, \nabla \mathbf{u} \; d\Omega}_{\text{Travail des forces internes / contraintes}} = \int_{\delta\Omega_\sigma} \underbrace{\delta \mathbf{u}^T \, \mathbf{t} \; d(\delta\Omega)}_{\text{Travail des forces externes}} + \int_{\Omega} \underbrace{\delta \mathbf{u}^T \, \mathbf{f} \; d\Omega}_{\text{Travail des forces de gravité}} \qquad \forall \delta \mathbf{u}$$

“Conservation de l’énergie”

*La solution **u** minimise l’énergie interne du système.*

Mieux… mais encore trop difficile à résoudre…

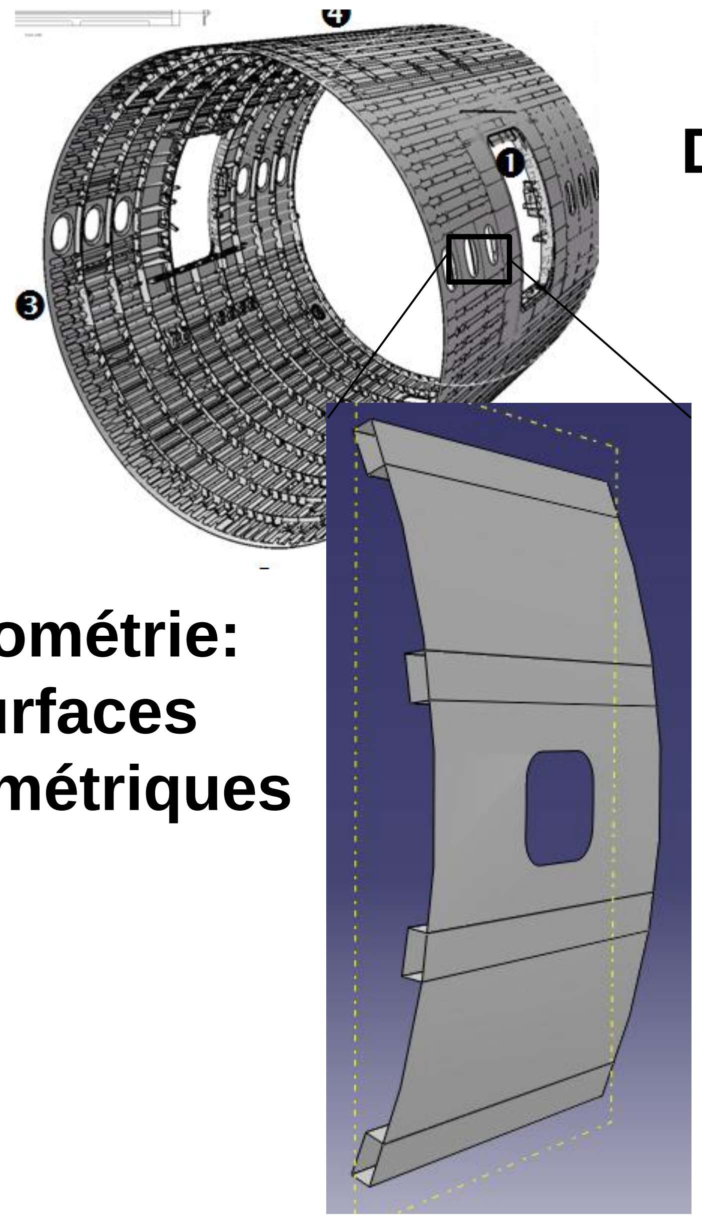
=> Analyse, Calcul intégral

Méthode des éléments finis:
Une solution numérique “automatisée”

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

La méthode des **éléments finis** permet de trouver une **solution numérique approchée** en suivant la démarche suivante:

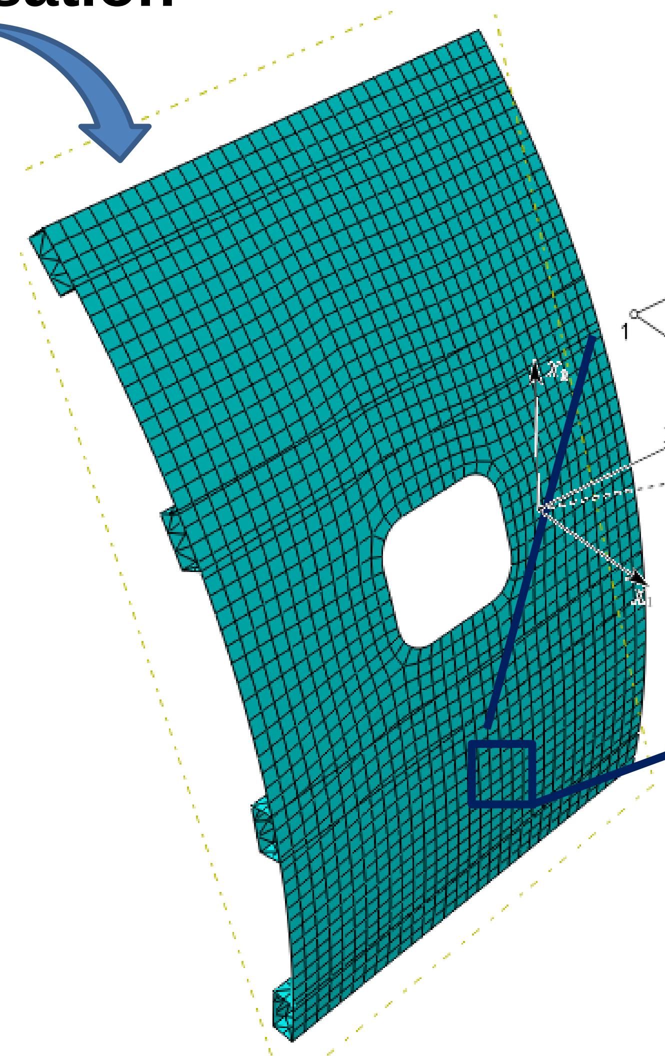
1) Discrétisation de la géométrie 3D (CAO) en petits éléments simples: génération d’un **maillage** (éléments Ω^e et noeuds x_i)

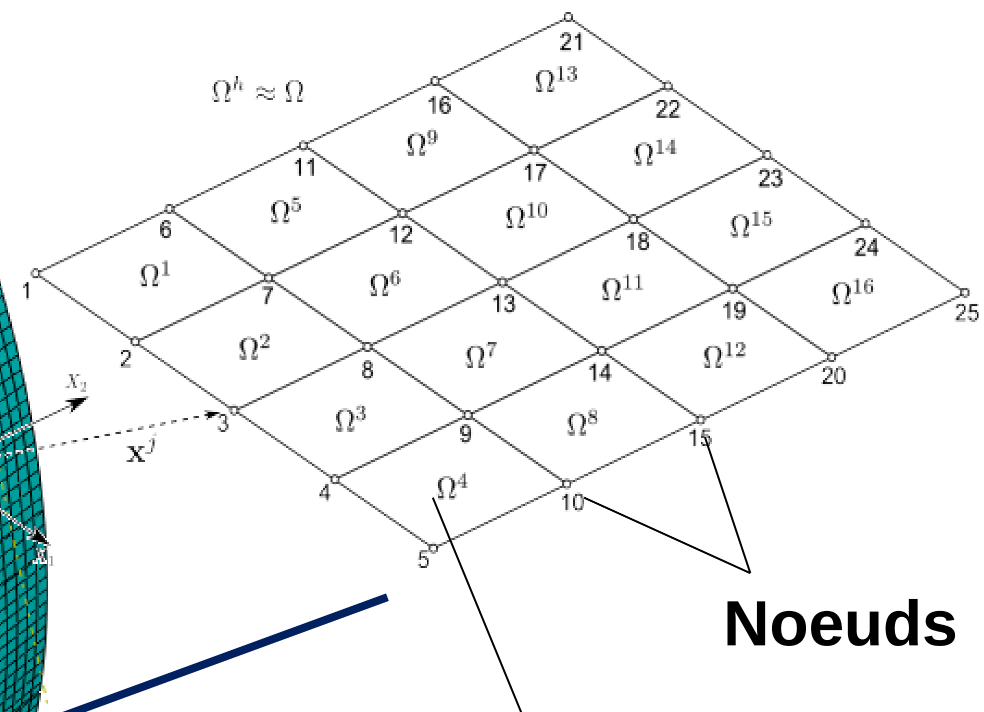


Géométrie: Surfaces paramétriques

Discrétisation

Géométrie discrète: maillage





Noeuds

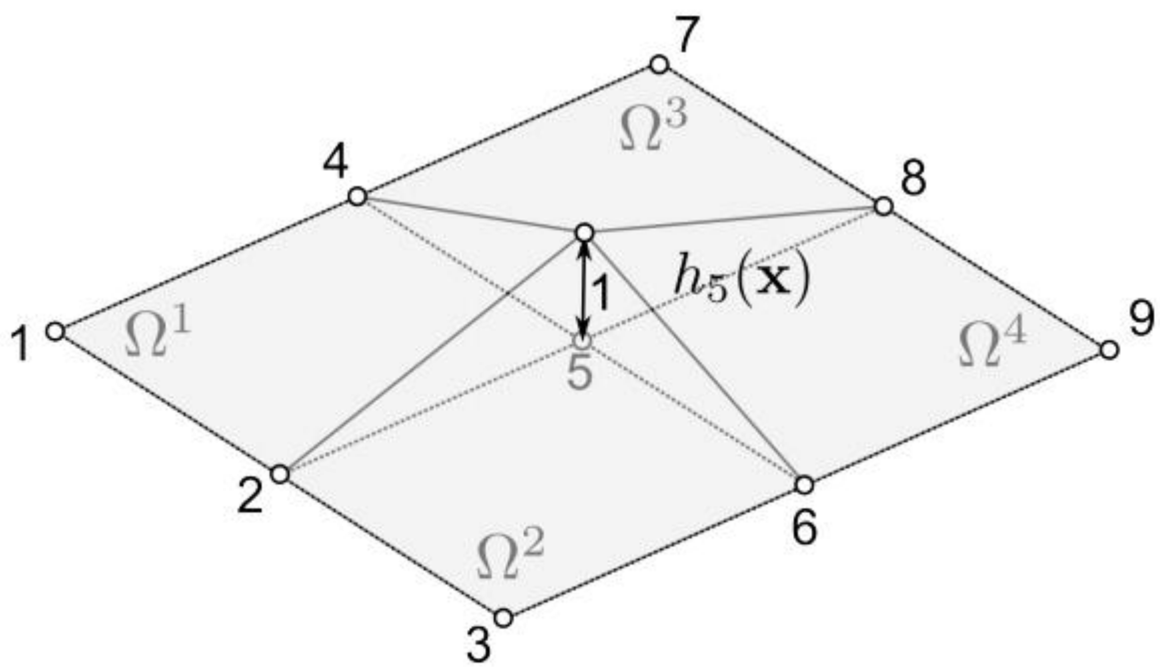
Elément fini

=> Géométrie analytique et vectorielle

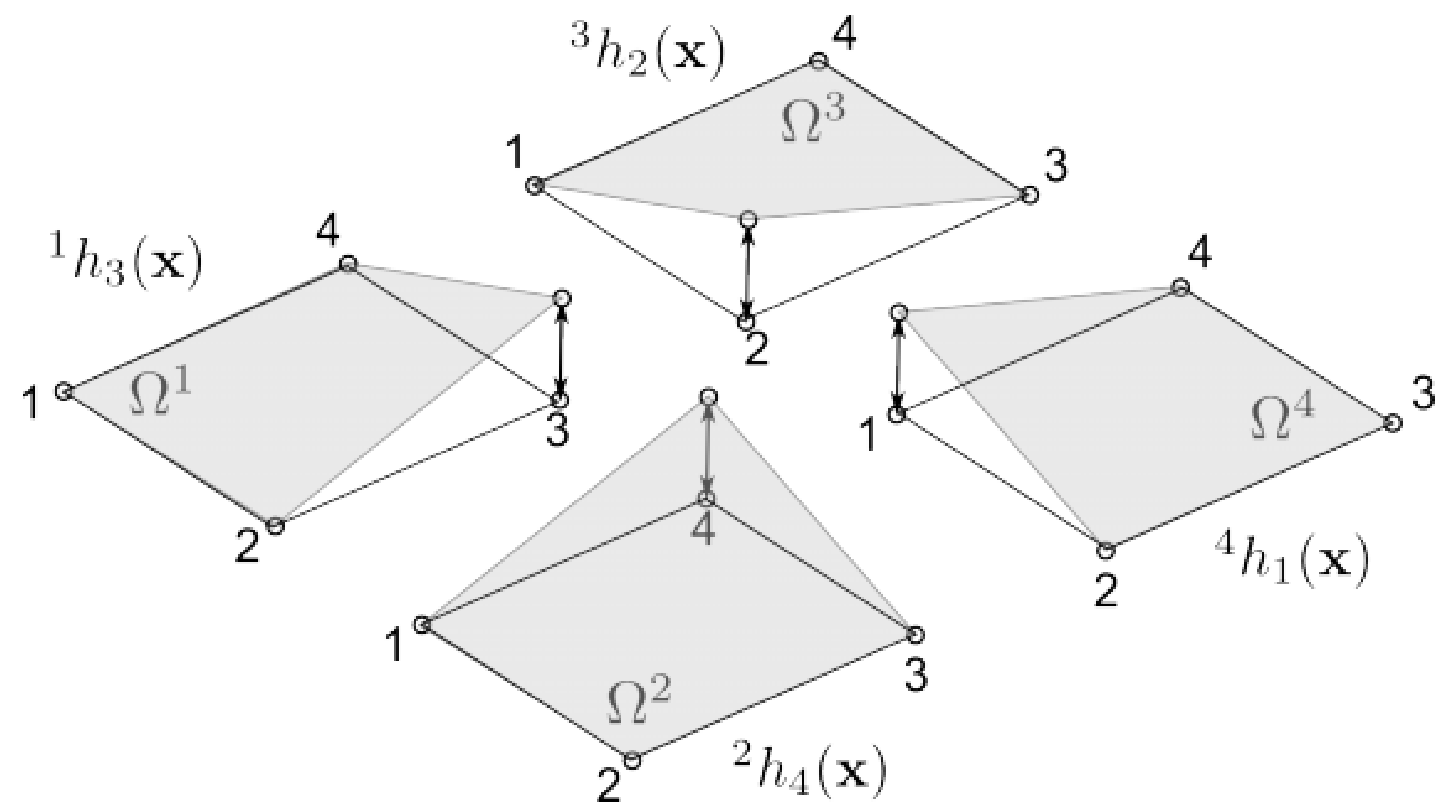
Solution approchée:

Ou comment se simplifier un peu la tâche..

2) Définir des **fonctions d’approximation** polynomiales pour chaque nœuds sur chacun des éléments. Les inconnues sont les déplacements aux noeuds **u**



Fonction de base h5(**x**)
correspondant au noeud 5



Fonction de base h5(x) “éclatée”
sur chaque élément fini

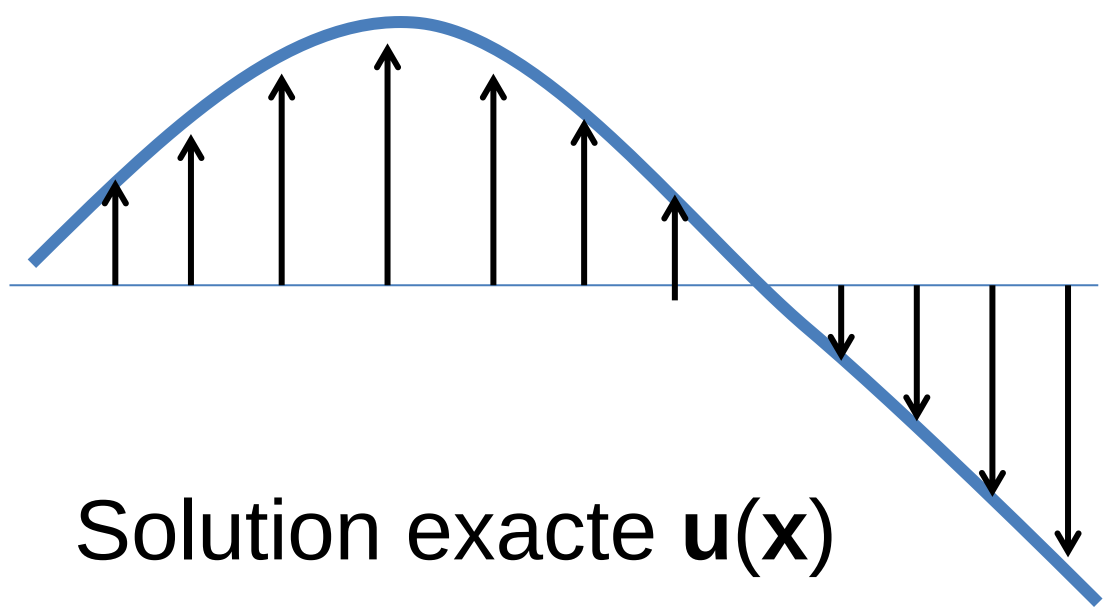
=> Espaces vectoriels, interpolation

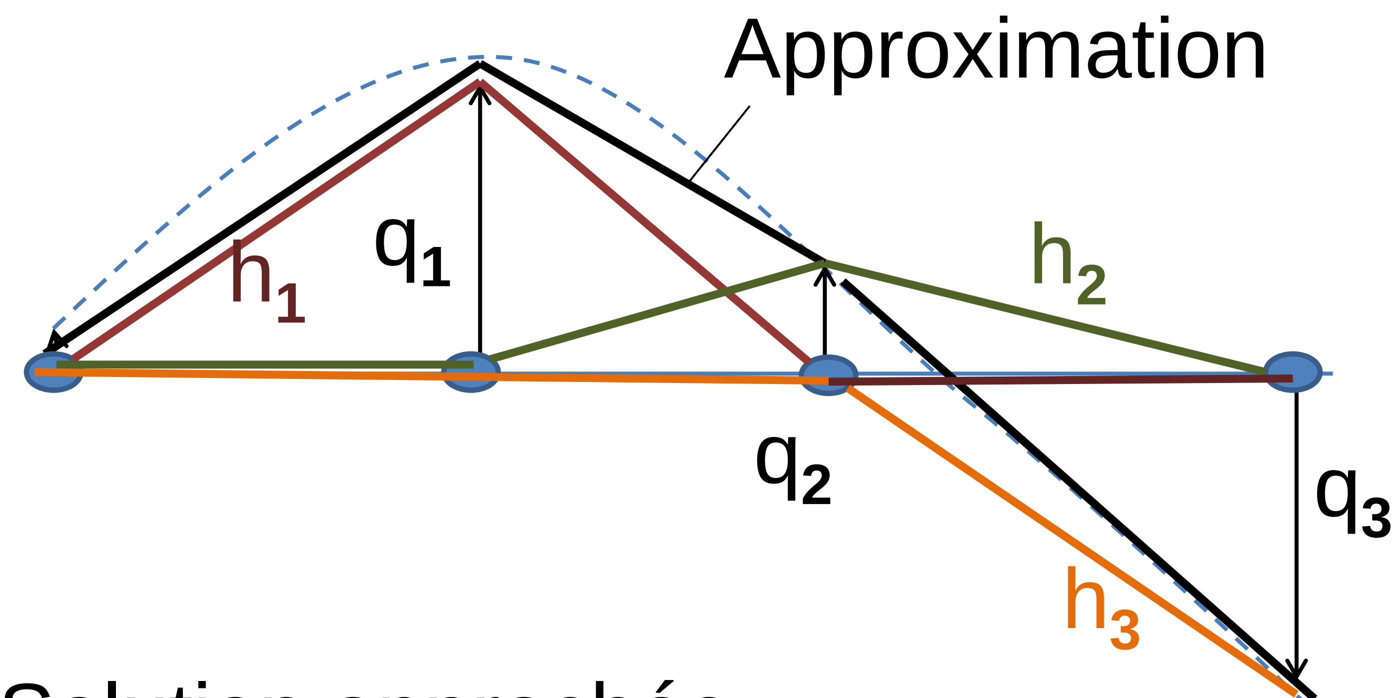
Solution approchée:
Ou comment se simplifier un peu la tâche..

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

*3) Faire l'**approximation** que le **champ de déplacement u**(**x**) peut être écrits comme combinaisons linéaires de fonctions de base **H**(**x**) connues:*

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\,\mathbf{q}$$





Solution approchée

$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{x})\,\mathbf{q_1} + h_2(\mathbf{x})\,\mathbf{q_2} + h_3(\mathbf{x})\,\mathbf{q_3}$

On veut trouver les coefficients $\mathbf{q}_i$!

=> Interpolation et espaces vectoriels

Solution approchée:

Ou comment se simplifier un peu la tâche..

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

4) Le système à résoudre se réduit alors à un ***système linéaire*** *:*

$$\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{r}}$$

Où :

- ***K*** *est la matrice de rigidité du système:*

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{H})^{T}\,\mathbf{C}\,\nabla\mathbf{H}\,dV$$

- ***q*** *représente le vecteur des déplacement inconnus*
- ***r*** *représente le vecteur des forces externes (gravité + surface)*

La méthode des éléments finis permet donc de convertir un **système d'équation différentiel** difficile à résoudre en un **système d'équation linéaire simple**

Ouff c'est fini … heureusement tout ceci est programmé dans un logiciel!

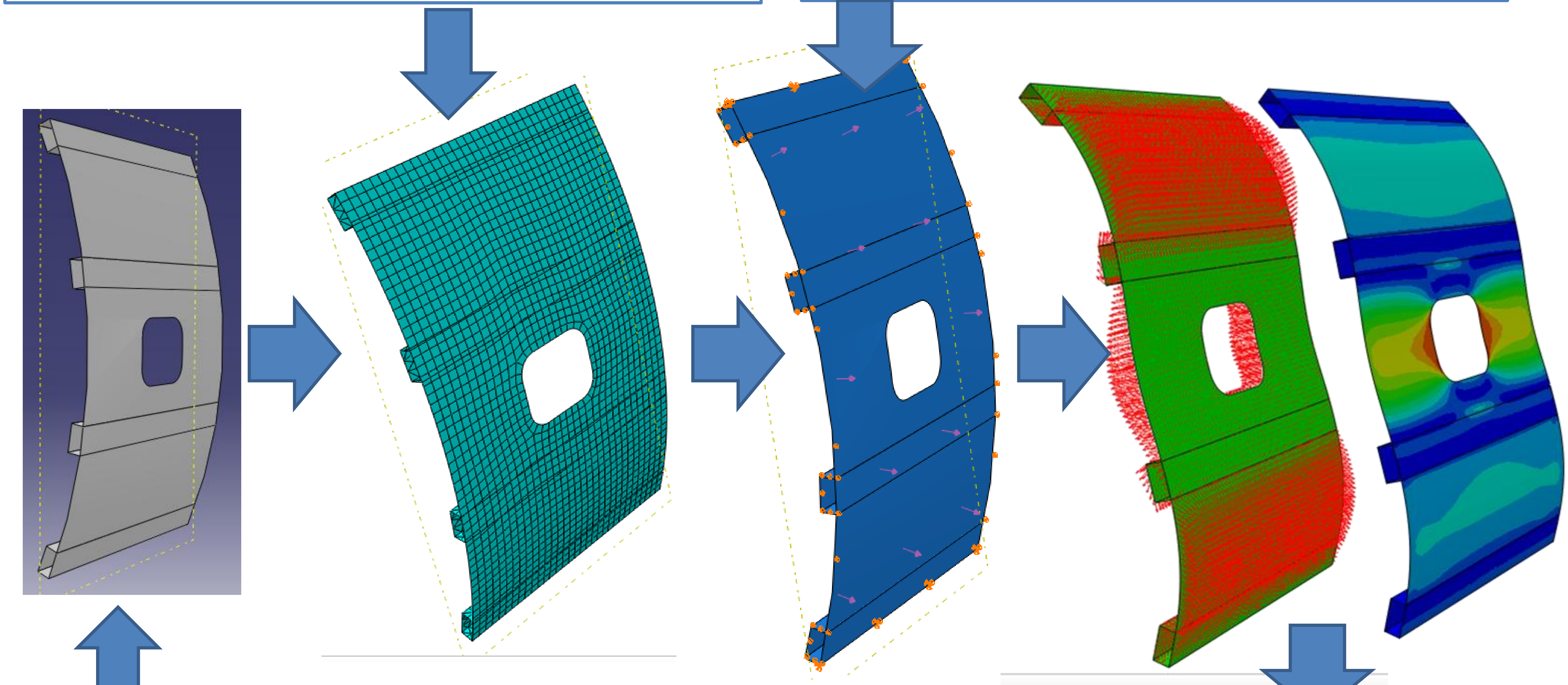
=> Calcul intégral, Algèbre linéaire, résolution de systèmes linéaires

Méthode des éléments finis
Exemple: panneau de fuselage d'avion

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Matériau: Aluminium 2024T3 , ép. 2mm
=> Loi de comportement $\sigma = C\varepsilon$

Forces externes et déplacements imposés (cahier des charges)



Géométrie: Logiciel CAO

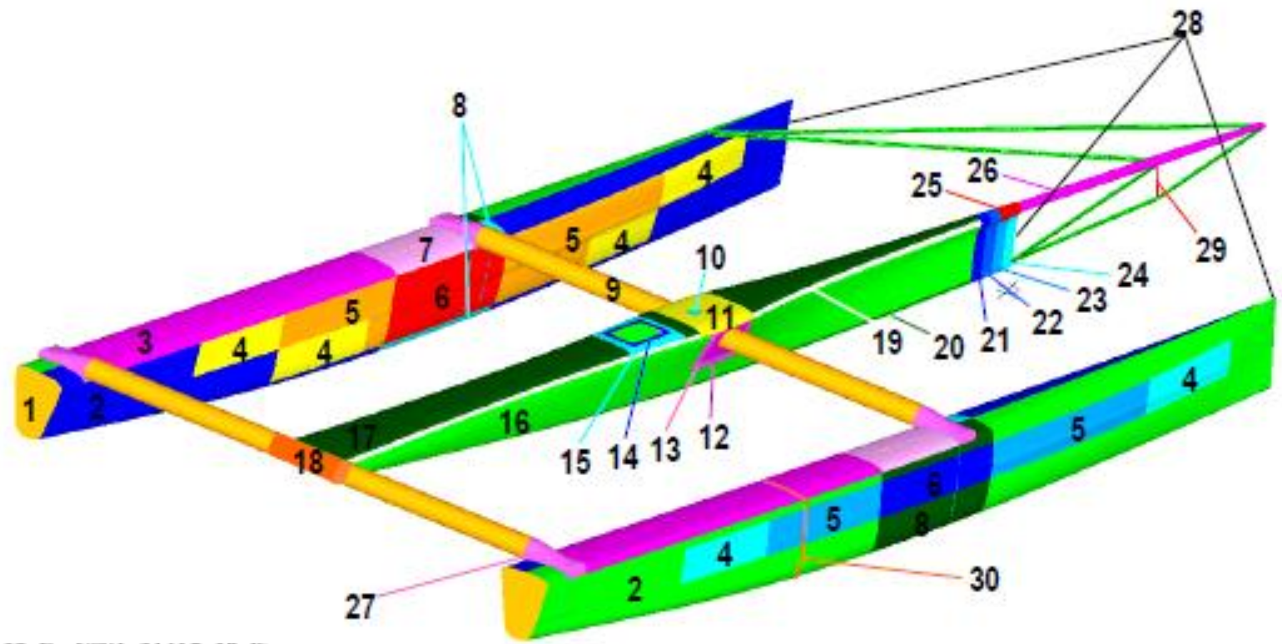
Discrétisation en éléments finis

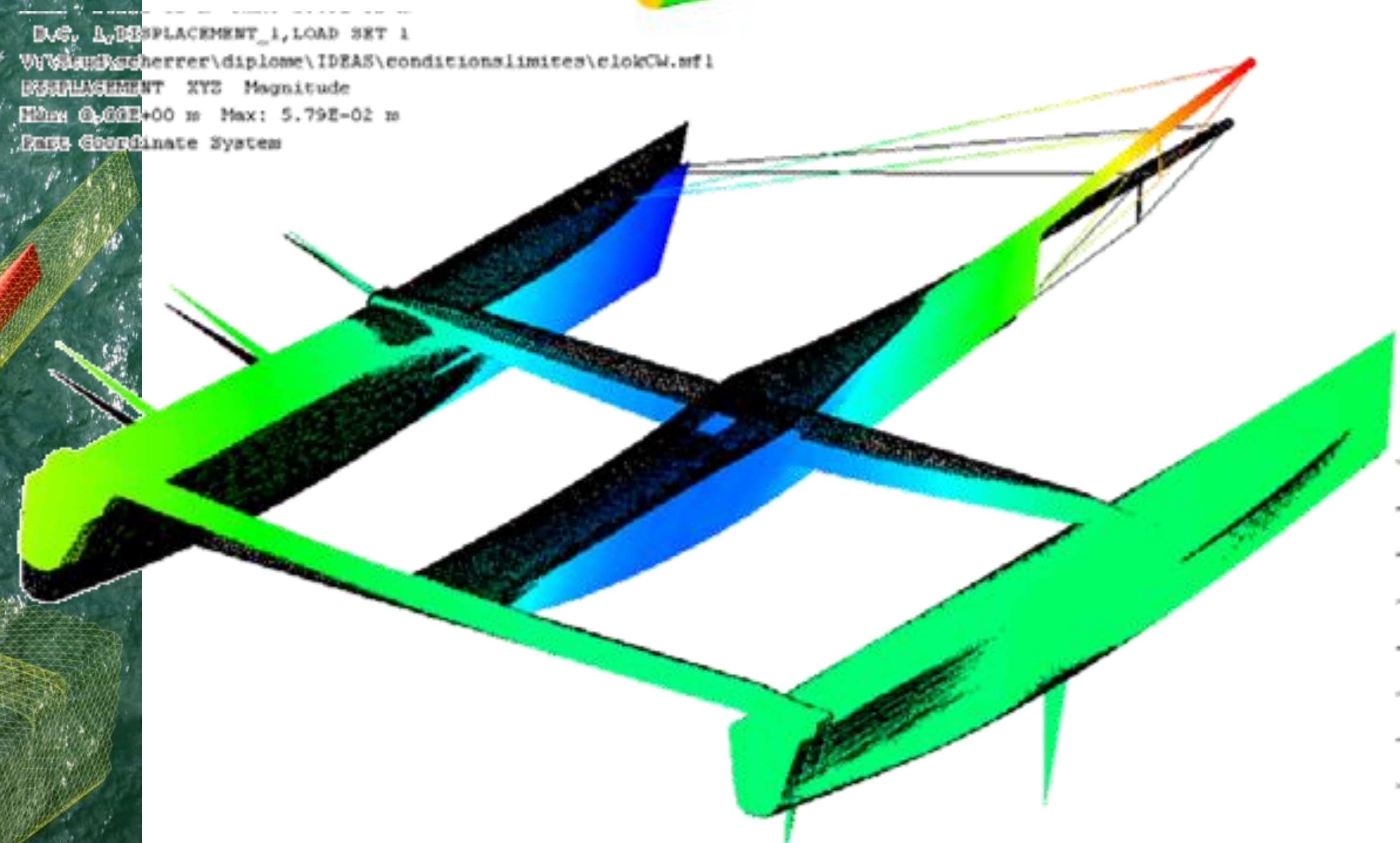
Champs de déplacement et contraintes => Ok? Ça tient?

Simulations par éléments finis: Applications pratiques d’étudiants

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse des contraintes dans la structure d’un catamaran de compétition

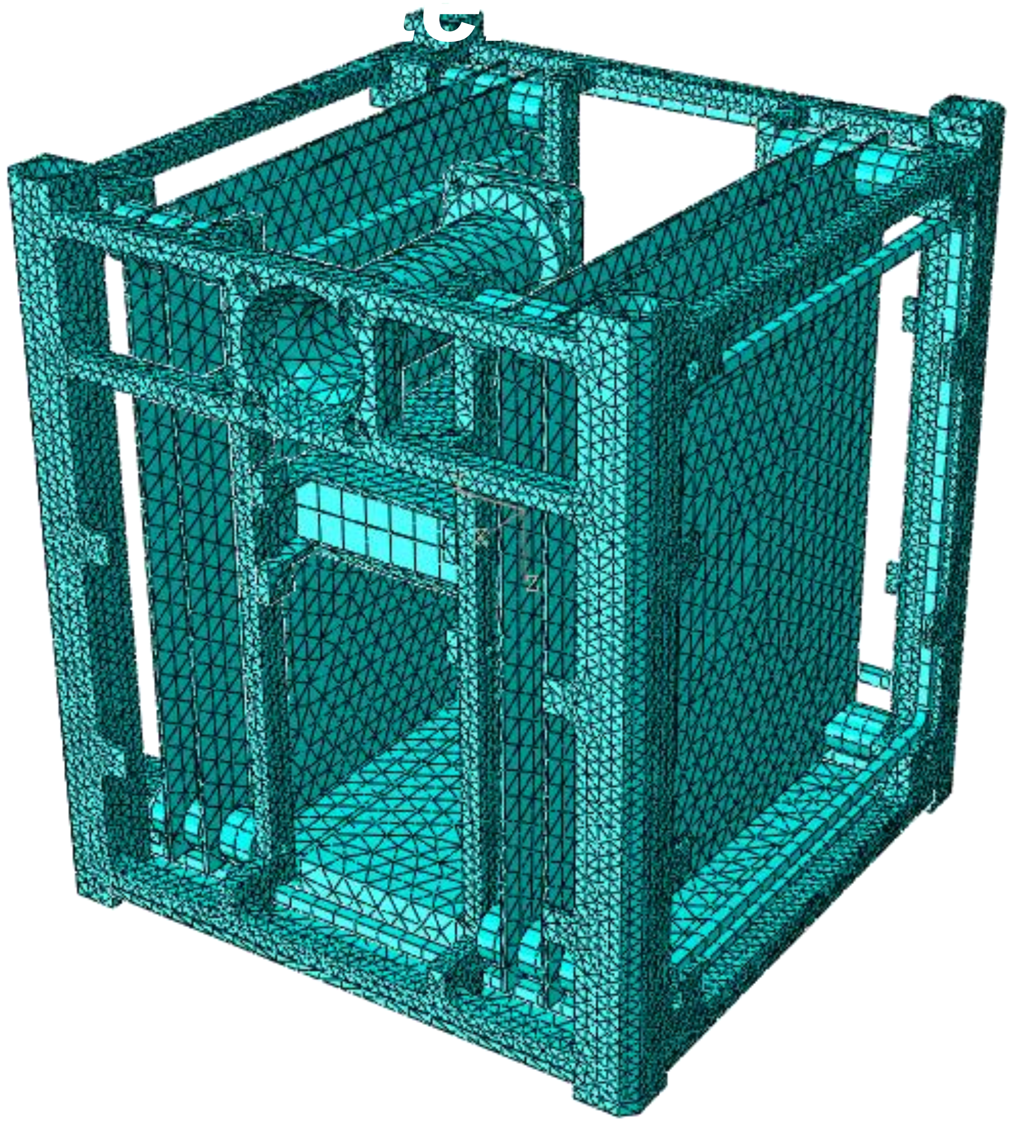


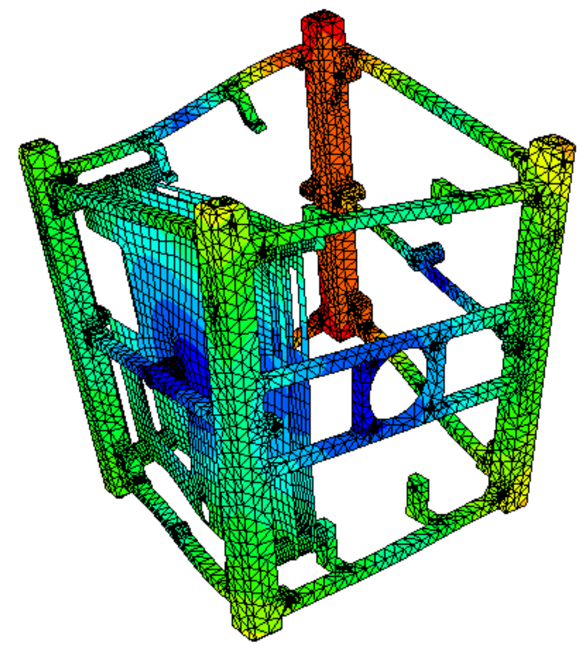


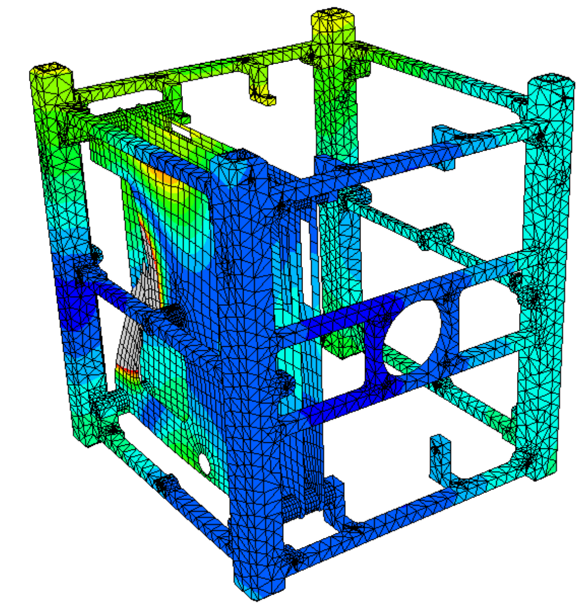
Simulations par éléments finis: Applications pratiques d'étudiants

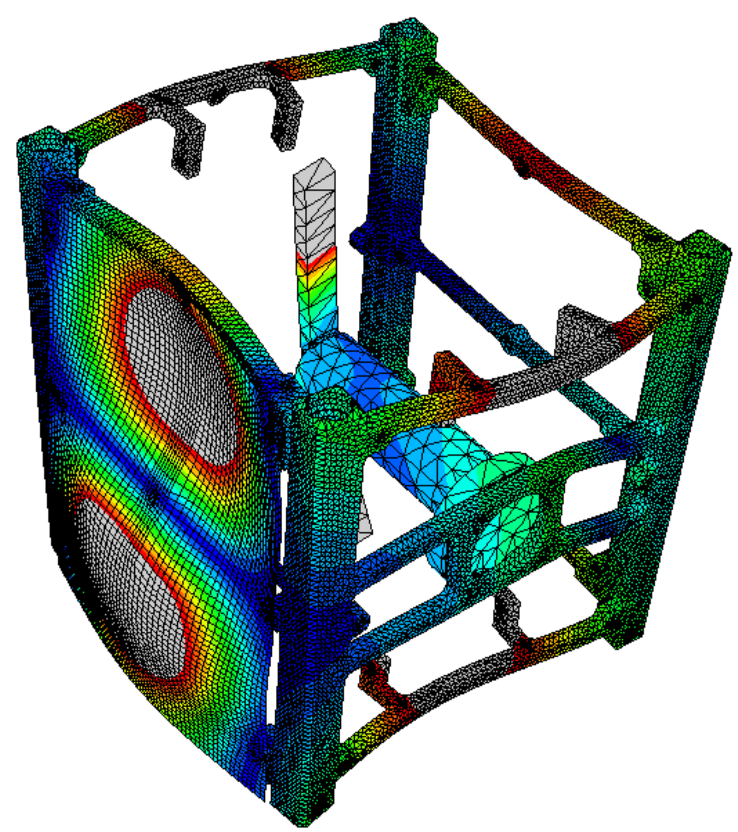
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

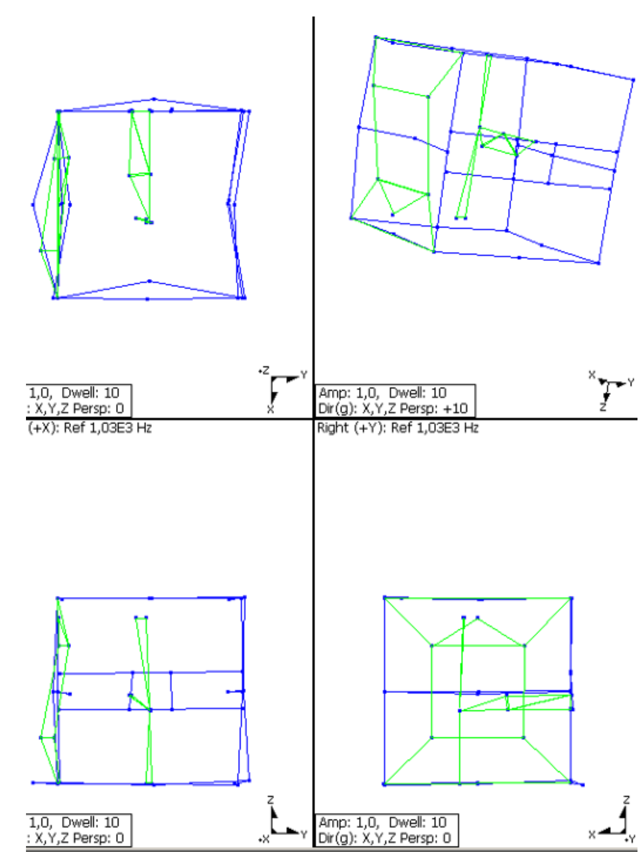
Simulation et validation des vibrations du pico satellite SwissCube







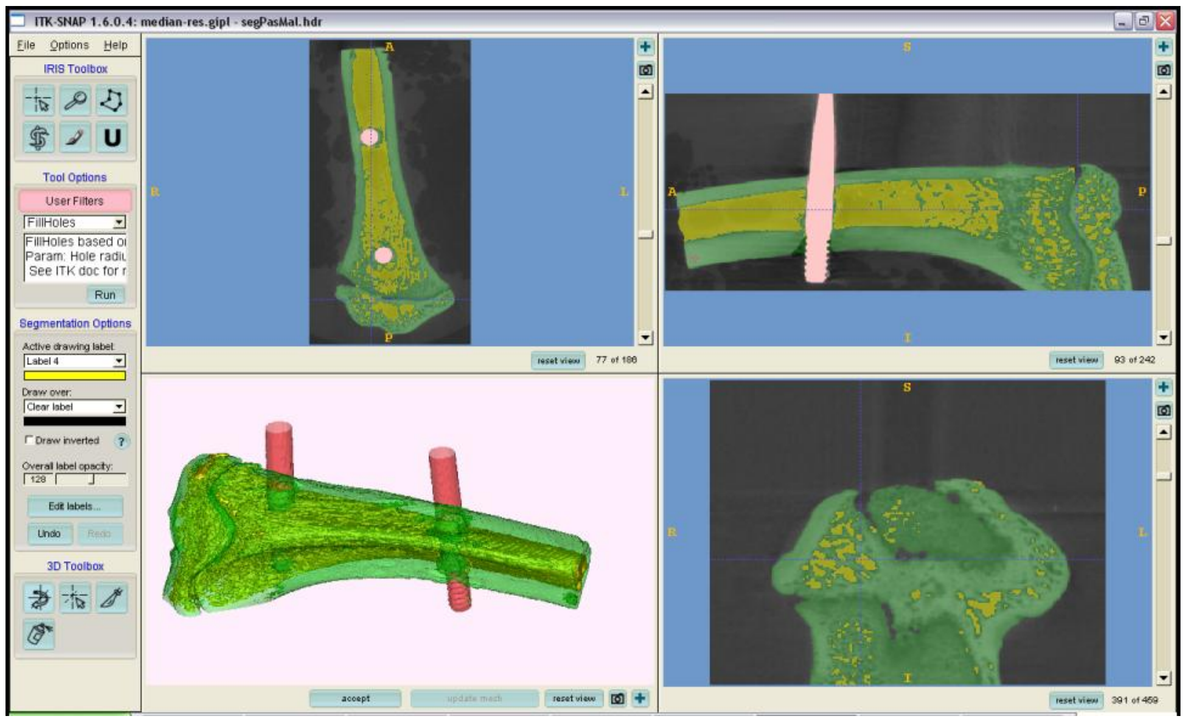


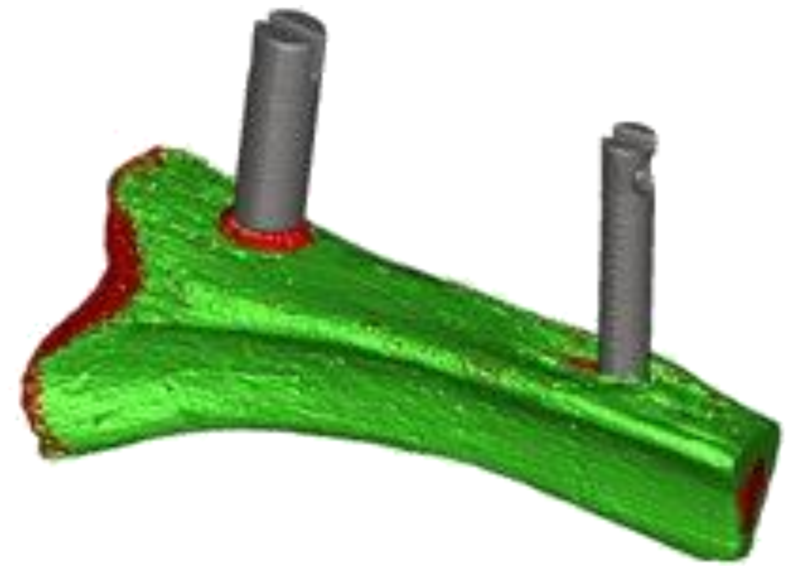


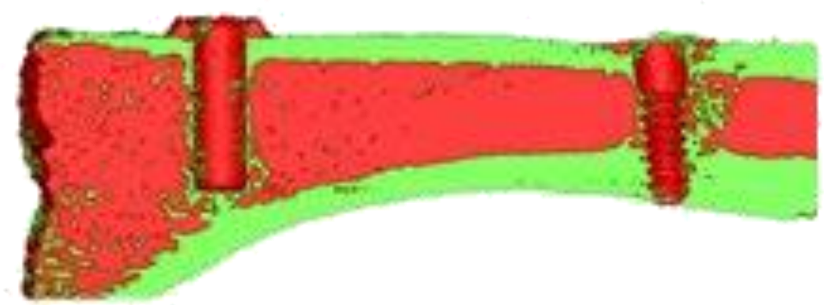
Simulations par éléments finis: Applications pratiques d’étudiants

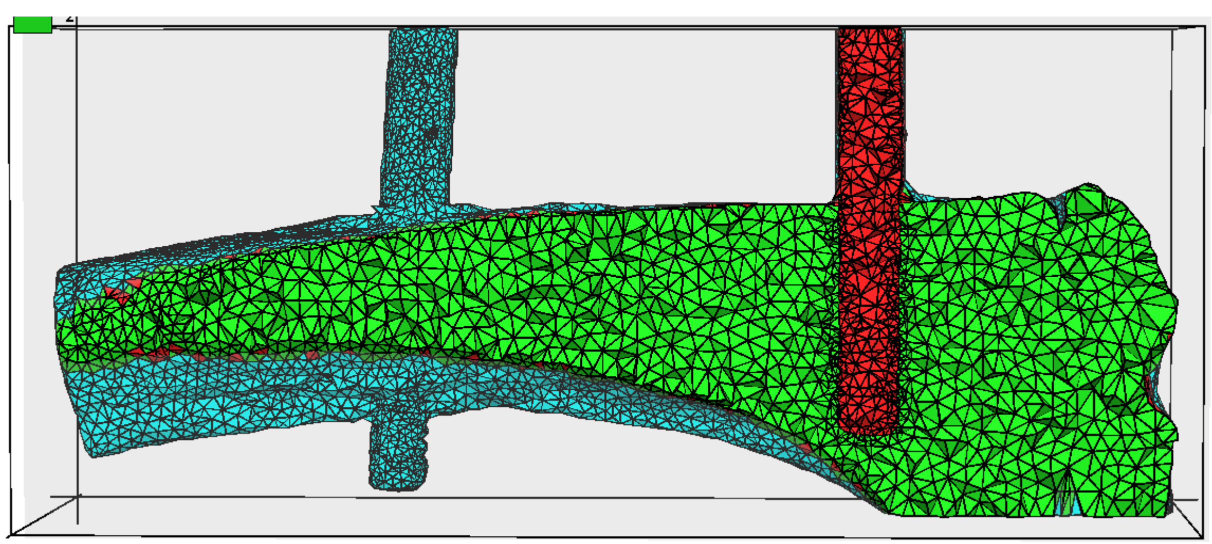
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

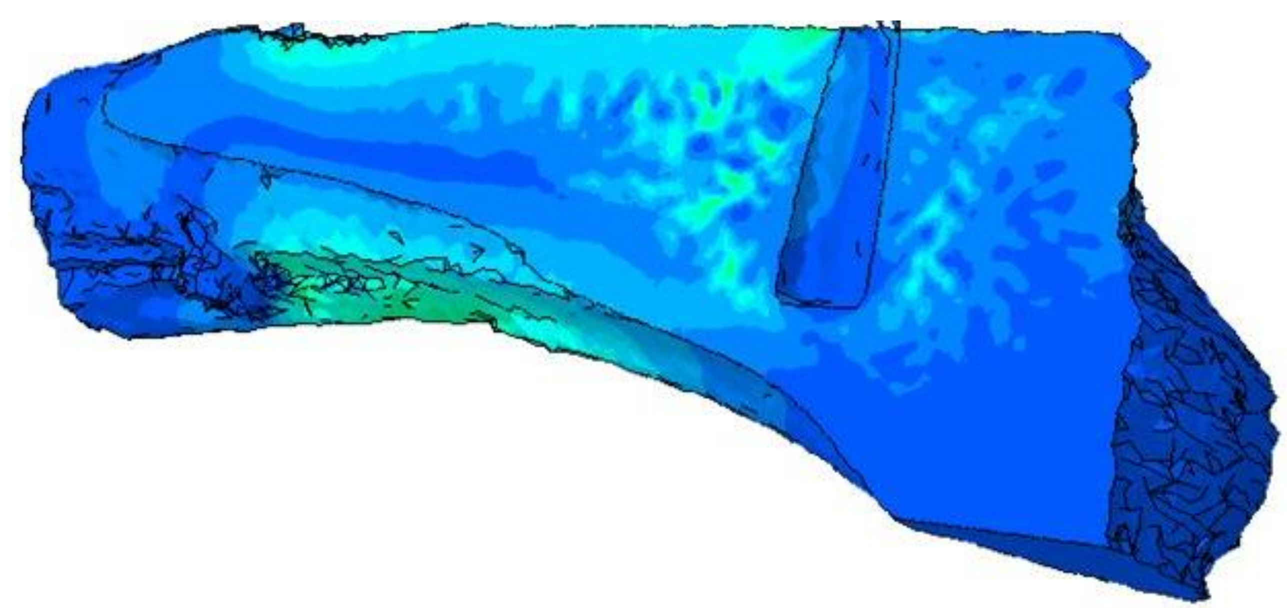
Analyse et prédiction de l’intégration osseuse d’un implant



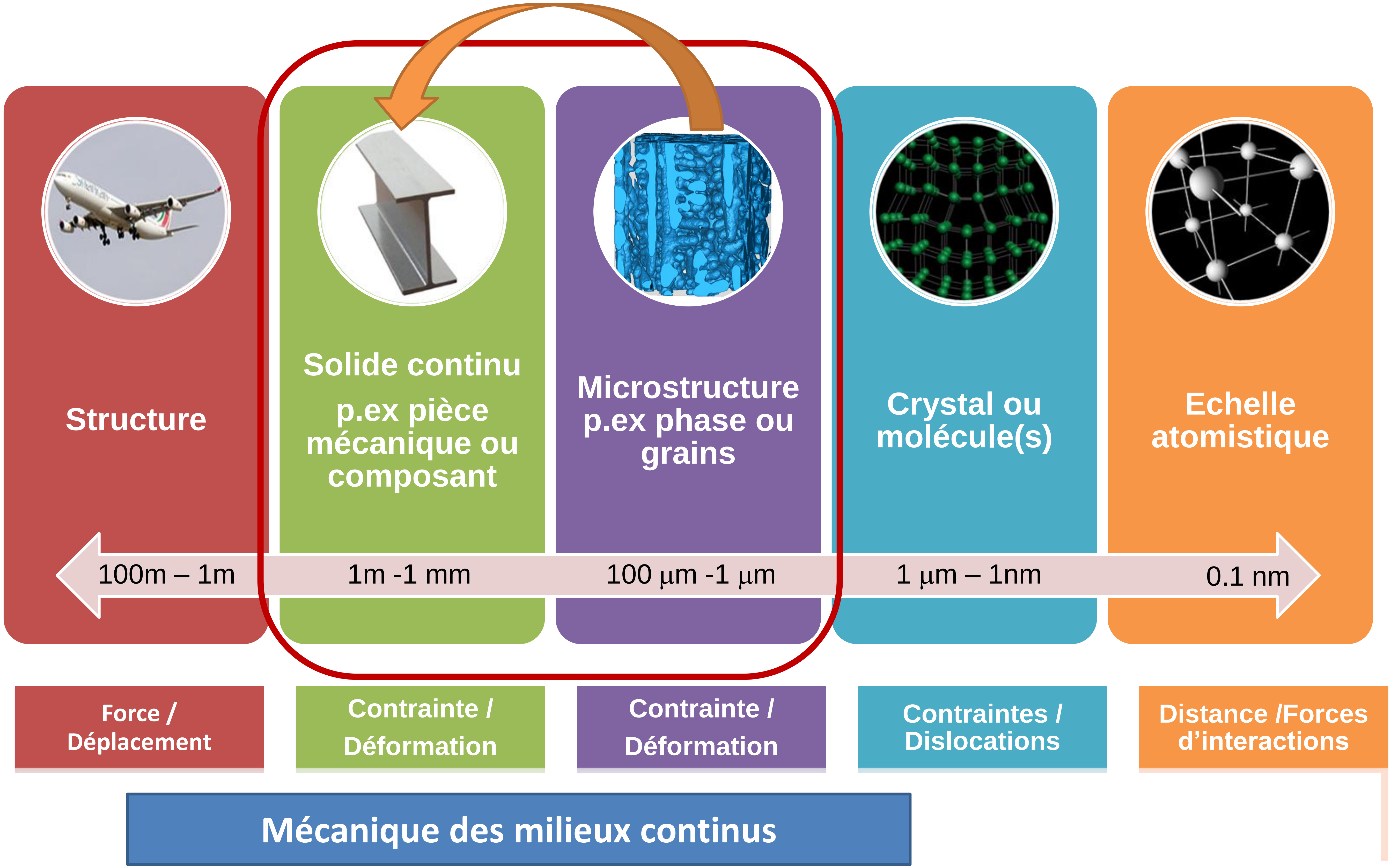








Modélisation des matériaux
… et changement d'échelle!

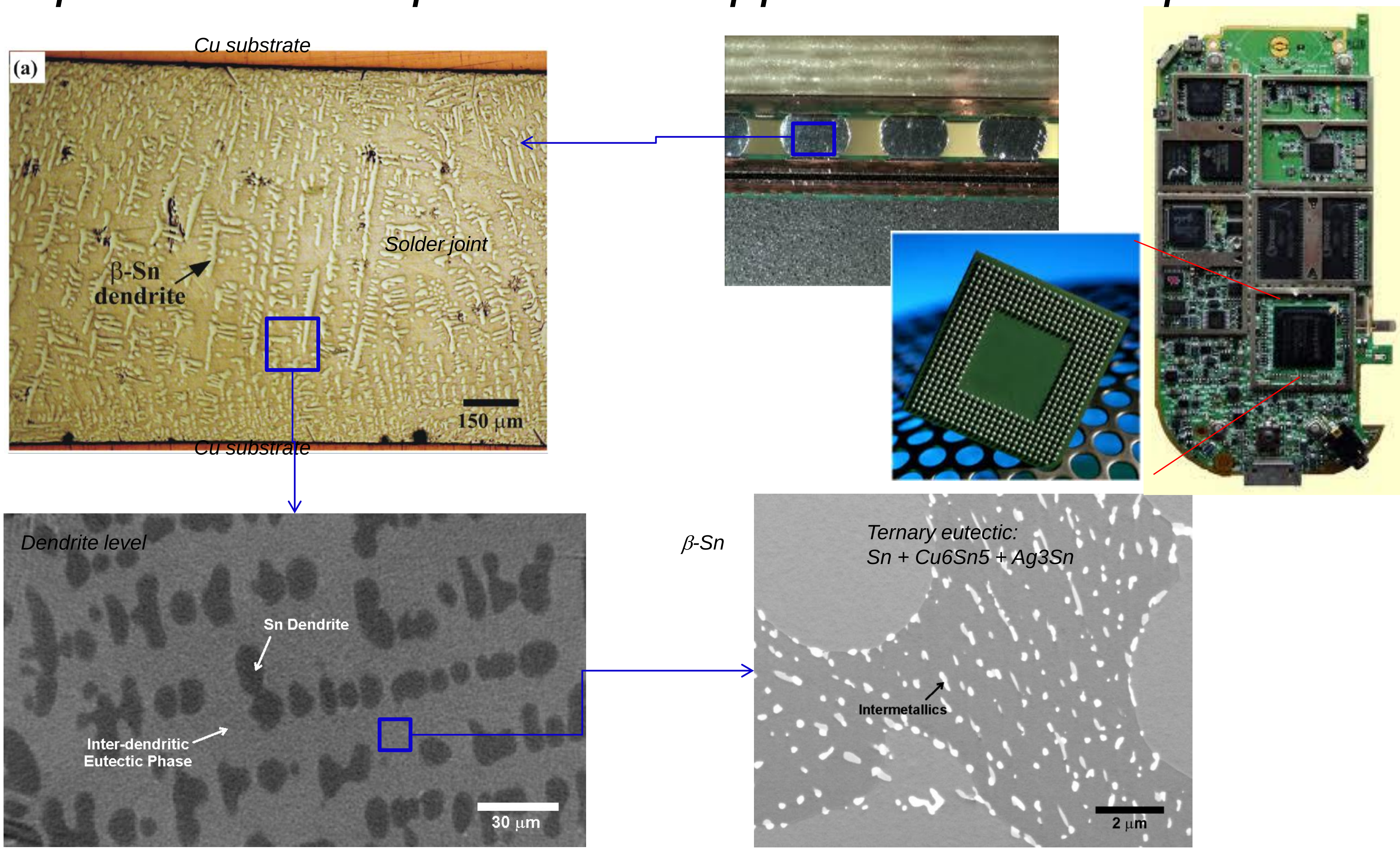


Modélisation multiéchelle et homogénéisation: ..des microstructures aux structures… un exemple

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exemple: alliage SnAgCu pour soudures micro éléctroniques:

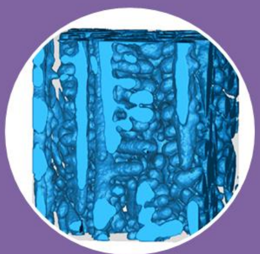
Principale cause de panne des appareils électroniques !!



Problème: vieillissement => changement de microstructure
=> changement de comportement mécanique => pannes => déchets!

Modélisation multiéchelle et homogénéisation:
Ou comment prédire les propriétés d'un matériau?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

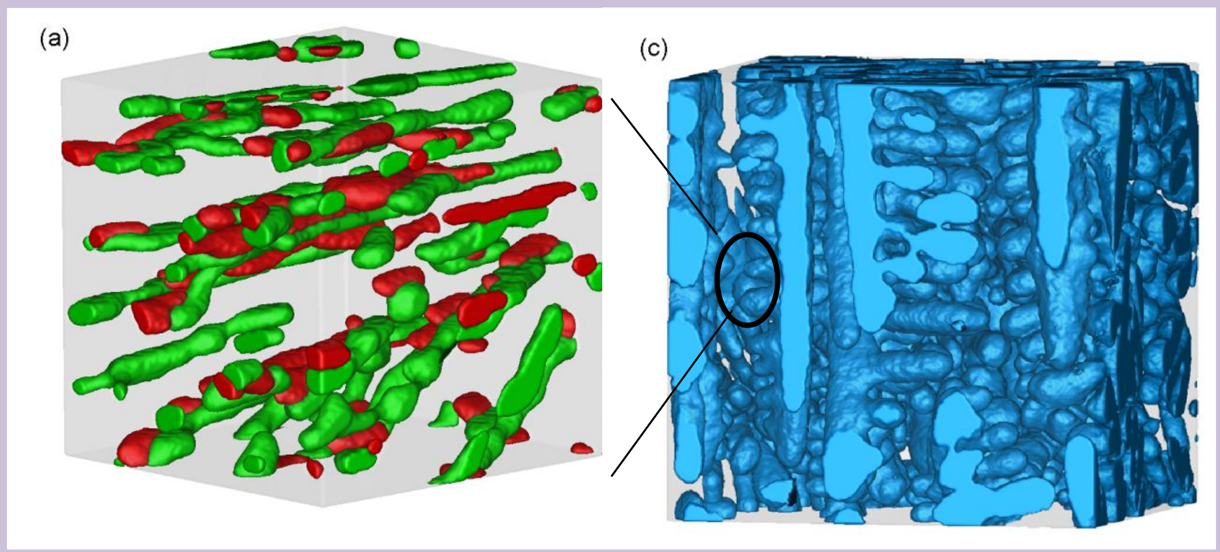


Microstructure p.ex phase ou grains

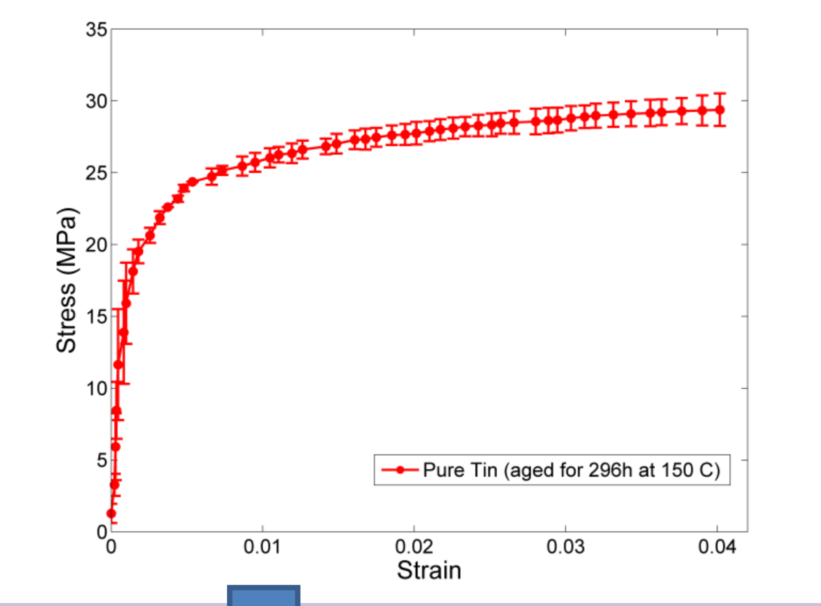
100 μm -1 μm

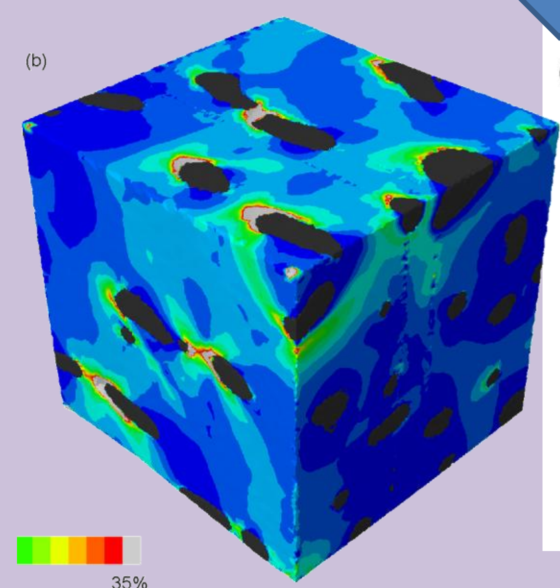
?

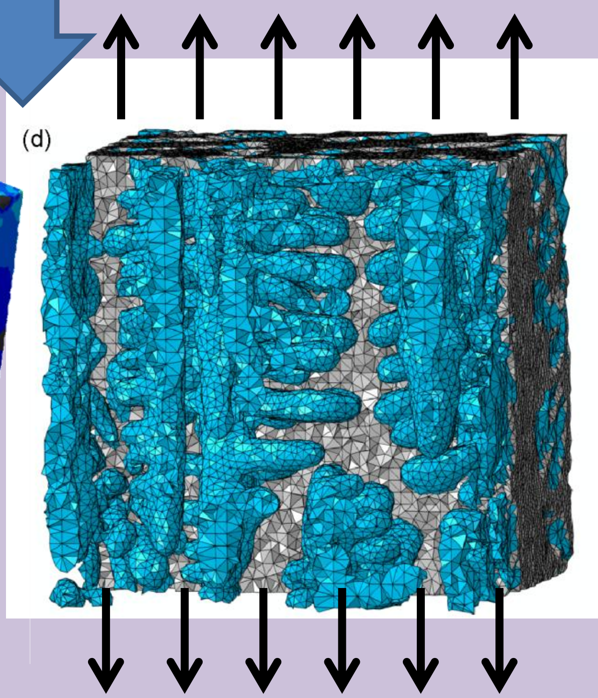
Reconstruction 3D de la microstructure (évolution avec vieillissement)



Caractérisation loi de comportement des constituants



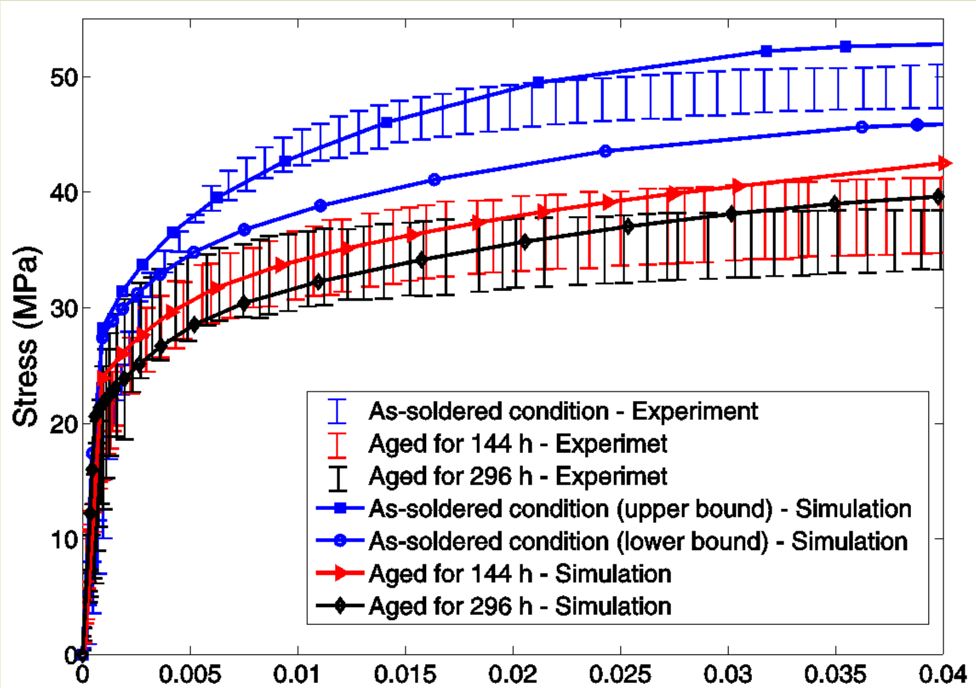




Simulation éléments finis à échelle microscopique: essai de traction virtuel

Solide continu p.ex pièce mécanique ou composant

1m -1 mm

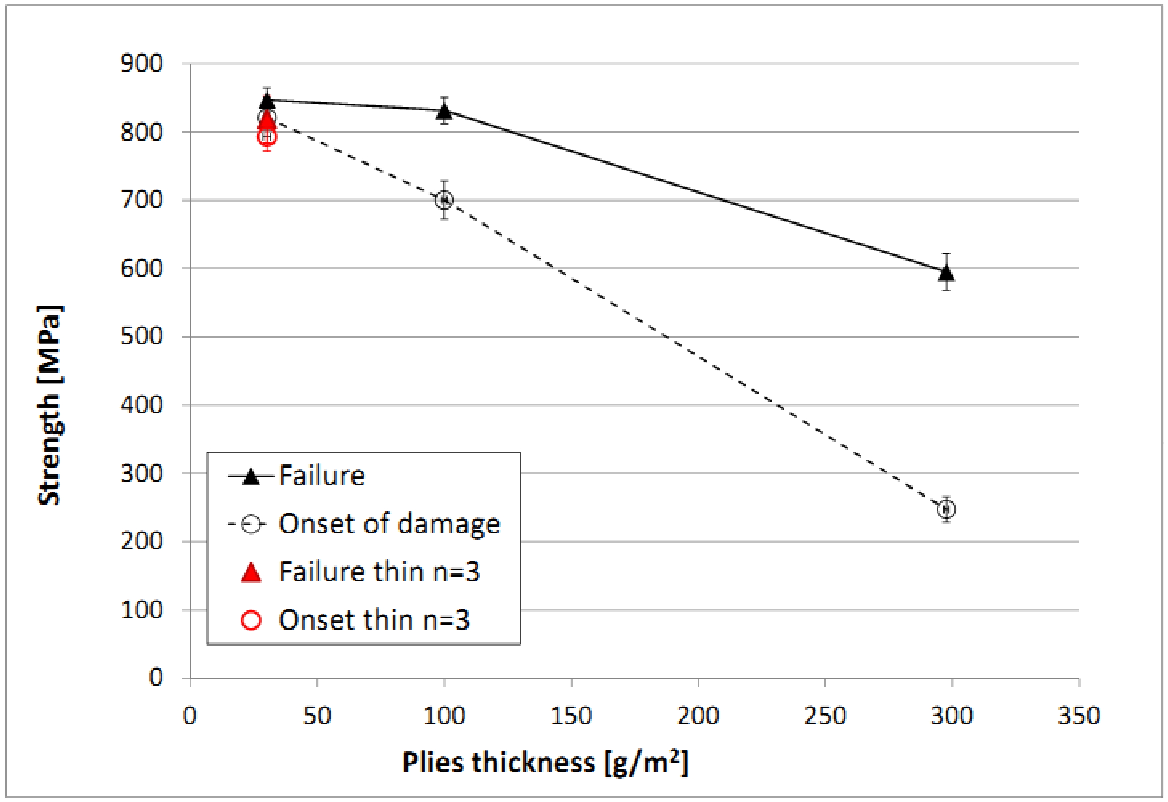


Prédiction de la loi de comportement du joint microélectronique => analyse fiabilité

Modélisation des matériaux composites

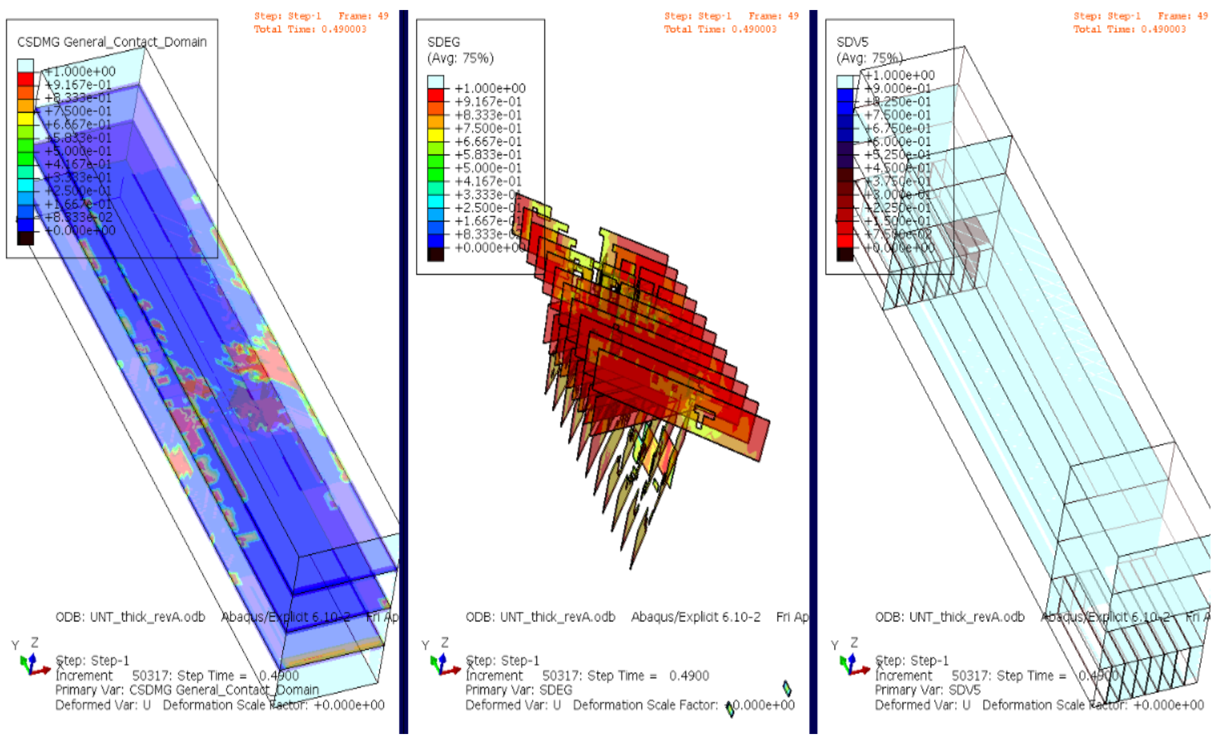
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Simuler l'endommagement d'un matériau composite carbone-époxy multicouche:



Effet de l'épaisseur des couches: Pourquoi?

Simulation essai de traction sur laminé composite quasi-isotrope avec multiples modes d'endommagement



Thick *Thin*

"Expérience" virtuelle:
fourni des explications !

Enseignement en génie mécanique:
Comment apprendre et maitriser ces concepts

Bachelor:

Analyse, Algèbre linéaire, Physique générale
Introduction à la science des matériaux
Introduction à la mécanique des structures
Mécanique des structures
Mécanique des milieux continus
Introduction à la méthode des éléments finis
Mécaniques des solides
Modélisation et simulation éléments finis

Master:

Mechanics of composites
Dynamique des solides

Conclusion:

➢ La simulation numérique est devenue une méthode standard dans le développement des produits grâce aux logiciels d'analyse qui simplifie la tâche à l'extrême

MAIS

➢Il n'y a pas d'ingénierie sans maîtrise de la physique et des mathématique qui vont avec les outils !

➢Tous les outils mathématiques enseignés sont nécessaires aux applications !

➢Le métier d'ingénieur consiste à faire le pont entre les besoins de développement industriel et les théories physiques fondamentales qui permettent de résoudre les problèmes.

Merci de votre attention

Questions ??