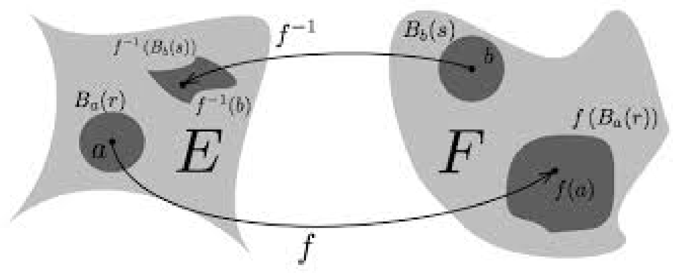
Polycopié de Topologie générale

2020-2021

Destiné aux étudiants de la :
2ème année Licence de Mathématiques

Introduction à la Topologie



BOUDERBALA Mihoub

Université Djilali Bounââma, Khemis Miliana - Algérie

Chapitre 1

Espaces Topologiques

Dans cette section, on donne la définition d'espace topologique ainsi que l'essentiel du vocabulaire topologique de base.

1.1 Topologie de l'ordre

Définition 1.1 *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Soient a et b au moins deux élements de E. Les intervalles ouverts de E sont les parties de l'"une des cinq formes suivantes : E, ϕ, $]a, b[:= \{x \in E \mid a < x < b\}$, $\{x \in E \mid x < b\}$, $\{x \in E \mid a < x\}$.*
Les ouverts de E sont les réunions d'intervalles ouverts.

Remarques :

1. Si $E = \mathbb{R}$, les intervalles du deuxième et du troisième type sont notés $]-\infty; b[$ et $]a; +\infty[$. Mais si $E =$ la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (avec $-\infty < \mathbb{R} < +\infty$), ils sont égaux à $[-\infty; b[$ et $]a; +\infty]$.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.2 *On appelle un* ***espace topologique*** *un ensemble E muni d'une partie τ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E qui vérifiant les axiomes suivants :*
(i) . $\phi \in \tau$, $E \in \tau$.
(ii) . *L'intersection de deux éléments de τ est un élément de τ.*
(iii) . *La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de τ est un élément de τ.*

Appellations et remarques :

1. Les axiomes (i) , (ii) et (iii) de la définition précédente s'appellent **les axiomes de Hausdorff** en hommage au mathématicien allemand Felix Hausdorff $(1868-1942)$ qui a écrit le premier livre de topologie générale en 1914.

2. Un **espace topologique** est un couple (E,τ) où E est un ensemble et τune topologie sur E.

3. Etant donné (E,τ) un espace topologique, on appelle **ouvert** de E toute partie de E appartenant à τ.

De plus les complémentaires de ouverts de E sont appelés **les fermés** de E. τ est parfois appelée la topologie de E.

4. La propriété (ii) d'une topologie s'étend facilement par récurrence comme ceci :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall U_1,U_2,\cdots,U_n\in\tau:\ \bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau.$$

Autrement dit : « Toute intersection **finie** d'ouverts de E est un ouvert de E ou bien τ est **stable** par intersection **finie**».

5. la propriété (iii) d'une topologie s'exprime littérairement en disant que : les **ouverts** sont stables par **réunion quelconque** et par **intersection finie**. Les **fermés** sont stables par intersection quelconque et par réunion finie.

Cependant, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée. Pour s'en convaincre, on retiendra les deux exemples suivants sur $(\mathbb{R},\tau_u)$:

$$\cap_{n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}\quad\text{et}\quad\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1\right]=\left]0,1\right].$$

Examples :

1. **L'espace topologique usuel** : Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite ouverte si, $\forall x\in U$, il existe $\epsilon>0$ tel que l'intervalle ouvert $]x-\epsilon,x+\epsilon[$ est contenu dans U. Il est bien clair que ceci défini une topologie sur $\mathbb{R}$.Alors $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette topologie τ_u appelée **topologie usuelle**.

2. Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\emptyset,\mathbb{R}$ et des intervalles de la forme $]a,b[$, n'est pas une topologie, car la propriété (iii) n'est pas vérifiée.

3. Sur un ensemble E, il existe toujours deux topologies « extrêmes » : la **topologie discrète** $\tau_d = \mathcal{P}(E)$ et la **topologie grossière** $\tau_g = \{\phi, E\}$. Un espace muni de la topologie discrète (respectivement grossière) est dit discret (respectivement grossier).

4. Un ensemble à deux éléments $E = \{a, b\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :

$$\tau_g = \{\phi, E\}\,,\ \tau_1 = \{\phi, \{a\}\,, E\}\,,\ \tau_2 = \{\phi, \{b\}\,, E\}\,,\ \tau_d = \{\phi, \{a\}\,, \{b\}\,, E\}\,.$$

Exercise 1.1 *Montrer que l'ensemble τ formé de $\emptyset, \mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.1 (i) $\phi \in \tau$ *(car ϕ est une réunion vide d'ntervalles ouverts de $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R} \in \tau$* $\left(\text{car } \mathbb{R} = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}}]-n, n[\text{ est bien une réunion d'intervalles ouverts bornés de } \mathbb{R} \right)$.
(ii) *Soient $U, V \in \tau$. On peut écrire (par définition même de τ) : $U = \underset{i\in I}{\cup}]a_i, b_i[$ et $V = \underset{j\in J}{\cup}]c_j, d_j[$ avec les a_i, b_i, c_j, d_j $(i \in I,\ j \in J)$ sont des réels tels que $a_i < b_i$ pour tout $i \in I$ et c_j, d_j pour tout $j \in J$. D'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :*

$$U \cap V = \left(\underset{i\in I}{\cup}]a_i, b_i[\right) \cap \left(\underset{j\in J}{\cup}]c_j, d_j[\right) = \underset{\substack{i\in I \\ j\in J}}{\cup} \left( ]a_i, b_i[\cap]c_j, d_j[\right).$$

Puisque l'intersection de deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ est ou bien vide ou bien égale à un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ alors cette dernière écriture de $U \cap V$ montre bien que $U \cap V \in \tau$.
(iii) *Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de τ. Comme chaque ensemble U_i $(i \in I)$ est une réunion d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ alors leur réunion $\underset{i\in I}{\cup} U_i$ est une réunion de réunions d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$; c'est bien donc une réunion d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. D'où : $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \tau$. Les éléments de τ vérifie bien les trois axiomes de Hausdorff ; elle constitue donc une topologie sur $\mathbb{R}$. Cette topologie τ s'appelle la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Exercise 1.2 *Quelles conditions doivent vérifier deux parties A et B de E pour que $\{\phi, A, B, E\}$ soit (l'ensemble des ouverts) une topologie sur E?*

Exercise 1.3 *On pose* $E :=]0, +\infty[$ *et pour tout réel positif* α*, on pose* $O_\alpha :=]0, \alpha[$ *. On considère* τ *la famille de parties de* E *donnée par* $\tau = \{E, O_\alpha\}$ *.*

1. *Montrer que* τ *constitue une topologie sur* E*.*
2. *Déterminer les fermés de l'espace topologique* (E, τ)*.*

1.3 Voisinage d'un point ou d'une partie

Définition 1.3 *Une partie* V *d'un espace topologique* E *est un voisinage d'un point* a *de* E *si* V *contient un ouvert contenant* a*. L'ensemble des voisinages de* a *est noté* $\mathcal{V}(a)$*. Plus généralement, on appelle voisinage d'une partie* A *de* E*, toute partie* V *de* E *qui contient un ouvert, lequel contient* A*.On note par* $\mathcal{V}(A)$ *l'ensemble de tous les voisinages d'une partie* A *de* E*.*
Par le symbolisme mathématique, on a donc pour tout $a \in E$ *et tout* $A \subset E$ *:*

$$\begin{aligned} V &\in \mathcal{V}(a) \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \ a \in O \subset V \\ V &\in \mathcal{V}(A) \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \exists O \in \tau : \ A \subset O \subset V. \end{aligned}$$

Exemple 1.1 *Dans l'espace topologique* $\mathbb{R}$*, un voisinage de* a *est une partie de* $\mathbb{R}$ *qui contient un intervalle ouvert de la forme* $]a - \epsilon, a + \epsilon[$*,* $\epsilon > 0$*.*

Remarque 1.1 1. *Tout voisinage de* a *contient* a*.*
2. *Tout surensemble d'un voisinage de* a *est un voisinage de* a*.*
3. *Toute intersection finie de voisinages de* a *est un voisinage de* a*.*
4. *Tout ouvert contenant* a *est un voisinage de* a*.*

Théorème 1.1 *Une partie* U *de* E *est un ouvert si et seulement si* U *est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Pour tout ouvert U et tout élément a de U, U est un voisinage de a puisqu'il contient un ouvert (U lui-même) contenant a. Réciproquement, soit U une partie de E telle que pour tout $a \in U$, U est un voisinage de a. Il existe alors, pour chaque $a \in U$, un ouvert O_a contenant a et inclus dans U. La réunion O de ces ouverts est un ouvert, et U est égal à cet ouvert : $O \subset U$ car les O_a sont inclus dans U, et $U \subset O$ car $\forall a \in U$, $a \in O_a$ et $O_a \subset O$. ■

Exercise 1.4 *Montrer que dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *muni de la topologie de l'ordre, les voisinages de* $+\infty$ *sont les parties contenant* $+\infty$ *et tous les entiers à partir d'un certain rang.*

1.4 Base d'ouverts, base de voisinages

Définition 1.4 *Soient $(E;\tau)$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une* ***base de la topologie*** *τ (ou une* ***base d'ouverts*** *de l'espace) si l'une des trois conditions équivalentes est vérifiée (donc les trois) :*
· *les ouverts de τ sont exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$;*
· *$\mathcal{B} \subset \tau$ et tout ouvert de τ est une réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$;*
· *$\mathcal{B} \subset \tau$ et pour tout $U \subset \tau$ et tout point $x \in U$, U contient un élément de $\mathcal{B}$ contenant x.*

(L'équivalence entre les deux premières propriétés et la troisième se démontre comme le théorème 1.1.)

Remarque 1.2 *τ elle-même est une base de τ, mais on cherche en général à décrire τ par des bases plus économiques, i.e. "petites" . Par exemple : les intervalles ouverts forment une base de la topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.2 *La famille $\left]r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}\right[$ $(r \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}^*)$ constitue une base pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (pour le montrer, utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que l'axiome d'Archimède). Remarquer que cette base est dénombrable ; on dira que l'espace topologique $\mathbb{R}$ est à base dénombrable.*

Définition 1.5 (SFV) *On appelle* ***système fondamental*** *de voisinages (ou* ***base de voisinages****) d'un élément a de E, toute famille $\mathcal{B}(a)$ de voisinages de a telle que :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists W \in \mathcal{B}(a) : \ W \subset V.$$

Exemple 1.3 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la famille des intervalles de la forme $\left[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base dénombrable de voisinages de a. Cet exemple rappelle que les voisinages - en particulier les éléments d'une base de voisinages - ne sont pas forcément des ouverts. Il est cependant courant de les choisir tels, en utilisant la proposition suivante.*

Proposition 1.1 *Pour tout espace topologique E, un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E est une base d'ouverts si et seulement si, pour tout point a de E, la famille des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent a est une base de voisinages de a.*

Preuve. Pour tout $a \in E$, notons $\mathcal{F}_a = \{W \in \mathcal{B} \,| a \in \mathcal{W}\}$.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts et fixons $a \in E$: Pour toute partie V de E, V est un voisinage de a si et seulement s'il contient un ouvert contenant a, c'est à dire une

réunion, contenant a, d'éléments de $\mathcal{B}$, autrement dit si V contient un $W \in \mathcal{B}$ contenant a. Les voisinages de a sont donc exactement les parties de E contenant un $W \in \mathcal{F}_a$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a.
($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $a \in E$, $\mathcal{F}_a$ est une base de voisinages de a. Pour toute partie U de E, U est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire : $\forall a \in U$; $\exists W \in \mathcal{F}_a$; $W \subset U$, ou encore : $\forall a \in U$, U contient un $W \in \mathcal{B}$ qui contient a, autrement dit comme dans la preuve du théorème 1.1 si U est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Les ouverts sont donc exactement les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. ■

Exercise 1.5 *Montrer que L'ensemble $\mathcal{B} = \{[a, b[\,; (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b\} \cup \phi$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.2 *On a pour tout réel a est contenu dans l'élément $[a, a+1[\, \in \mathcal{B}$ et l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{B}$. de plus tout intervalle ouvert $]a, b[$est la réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ (à savoir $]a, b[= \cup_{n \geqslant n_0} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[$, avec n_0 assez grand), donc $\mathcal{B}$ est une base.*

1.5 Intérieur et adhérence

1.5.1 Adhérence

Définition 1.6 *Dans un espace topologique E, un point x est dit* ***adhérent*** *à une partie A si tout voisinage de x rencontre A; c'est-à-dire si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) : \ V \cap A \neq \phi.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé ***l'adhérence*** *de A et noté $\overline{A}$.*

Remarque 1.3 *Tout élément x de A est adhérent àA (puisque tout voisinage de x contient x), donc $A \subset \overline{A}$.*

On peut distinguer deux types de points adhérents :

Définition 1.7 *Un point x adhérent à A est :*
· ***point isolé*** *de A s'il existe un voisinage V de x tel que $A \cap V = \{x\}$, autrement dit si $x \in A$ et $\{x\}$ est ouvert dans A (pour la topologie induite).*

· ***point d'accumulation*** *de Asi tout voisinage de x rencontre $A\diagdown\{x\}$ (ce qui ne nécessite pas que x appartienne à A), autrement dit si x est adhérent à $A\diagdown\{x\}$.*

Remarques.

1. Il est évident qu'un point ne peut pas être à la fois point isolé et point d'accumulation de A, et que s'il est l'un ou l'autre alors il est adhérent à A. Et ce sont les seuls types possibles de points adhérent, car si un point adhérent x n'est pas isolé alors, pour tout voisinage V de x, $A\cap V \nsubseteq \{x\}$.

2. Un point d'accumulation d'une partie d'un espace topologique est clairement un point adhérent à cette partie. Cependant, l'inverse est (généralement) faux.

3. L'ensemble de tous les points d'accumulation d'une partie A d'un espace topologique s'appelle l'ensemble dérivé de A et se note A'. Cette notion a été introduite par le mathématicien allemand Georg CANTOR $(1845-1918)$ qui l'a étudié pour la première fois sur l'ensemble des nombres réels.

Exemple 1.4 1. *Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $\left]0;\sqrt{2}\right[\cup\{3\}$ a 3 come point isolé et $\left[0;\sqrt{2}\right]$ comme ensemble de points d'accumulation.*
2. *L'adhérence de $\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$ contient tous les $\frac{1}{n}$ comme points isolés et 0 comme point d'accumulation.*

Exemple 1.5 *Si $(E;\tau)=$ ($\mathbb{R}$; topologie usuelle) et $A=\left]a,b\right[$, alors $\overline{A}=[a,b]$. En effet, $[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ qui contient $\left]a,b\right[$ et donc $\left]a,b\right[\subset\overline{A}\subset[a,b]$. $\overline{A}$ ne peut donc être égal qu'à $\left]a,b\right[,\left]a,b\right],\left[a,b\right[,\ [a,b]$ Comme seul le dernier de ces intervalle est fermé, on a*

$$\overline{\left]a,b\right[}=[a,b].$$

Proposition 1.2 *L'adhérence d'une partie A est **le plus petit fermé** contenant A. En particulier, A est un fermé si et seulement si $A=\overline{A}$.*

Preuve. Ce plus petit fermé pour l'inclusion existe : c'est l'intersection de la famille des fermés contenant A (cette famille est bien non vide car E est un tel fermé). Il s'agit donc de montrer que a est adhérent à A si et seulement s'il appartient à tous ces fermés. Or a est adhérent à A si tout ouvert contenant a rencontre A c'est-à-dire, par passage au complémentaire, si tout fermé ne contenant pas a ne contient pas A tout entier, ou encore, par contraposée, si tout fermé contenant A contient a. ■

Exercise 1.6 *Soit O une partie ouverte de l'espace topologique $(E;\tau)$. Démontrer que pour toute partie A de E on a :*

$$A\cap O=\phi\Longleftrightarrow\overline{A}\cap O=\phi.$$

1.5.2 Intérieur

Définition 1.8 *Pour une partie B d'un espace topologique E, On appelle **intérieur** de B, que l'on note $\overset{\circ}{B}$, le plus grand ouvert de E qui est contenu dans B.*

"Dualement" à l'inclusion $A \subset \overline{A}$, on a l'inclusion (tout aussi immédiate) $\overset{\circ}{B} \subset B$.

Corollaire 1.1 1. *Lintérieur de B, est l'ensemble des points dont B est voisinage.*
2. *L'intérieur de B est la réunion de tous les ouverts contenus (inclus) dans B (elle existe, puisque ϕ est ouvert, mais peut être vide). On a alors*

$$\overset{\circ}{B} = \underset{\substack{O \in \tau \\ O \subset B}}{\cup} O.$$

.
3. *Une partie B de E est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{B} = B$.*

Théorème 1.2 *Soit B une partie de E. Un point b de E est à l'intérieur de B (c'est-à-dire appartient à $\overset{\circ}{B}$) si et seulement si B est un voisinage de b.*

Preuve. Soit $b \in E$.
$(\Longrightarrow)$: Supposons que $b \in \overset{\circ}{B}$. Comme (par définition même) $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert et que $\overset{\circ}{B} \subset B$ alors B est un voisinage de b.
$(\Longleftarrow)$: Supposons que B est un voisinage de b. Donc $\exists O \in \tau$ tel que $b \in O \subset B$. Ce qui entraîne que $O \subset \overset{\circ}{B}$. D'où, en particulier, $b \in \overset{\circ}{B}$. ■

Proposition 1.3 *Soient E un espace topologique et A et B deux parties de E. Alors :*
(i) . *Si A et B sont complémentaires alors $\overset{\circ}{B}$ et $\overline{A}$ sont complémentaires.*
(ii) . *Si $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*
(iii) . $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Preuve. 1. Pour la la première propriété (i) on a $x \notin \overset{\circ}{B} \Longleftrightarrow B$ n'est pas un voisinage de $x \Longleftrightarrow B$ ne contient aucun voisinage de $x \Longleftrightarrow$ tout voisinage de x rencontre $A \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$.
2. Montrons par exemple la première égalité du (iii) . L'inclusion $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ provient du (ii) .;d'autre part $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

Remarque 1.4 *On notera que, en général, on a seulement les relations $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ et pas des égalités.*

Exemple 1.6 *Si* $A = [0;1]$ *et* $B = [1;2]$, *alors on a* $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \overset{\circ}{\widehat{[0;2]}} =]0;2[$. *Or* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0;1[\cup]1;2[=]0;2[\setminus \{1\}$. *Inversement, si* $A =]0;1[$ *et* $B =]1;2[$, *alors* $\overline{A \cap B} = \overline{\phi} = \phi$ *(car* ϕ *est fermé). Or* $\overline{A} \cap \overline{B} = [0;1] \cap [1;2] = \{1\}$.

Définition 1.9 *Soit A une partie d'un espace topologique E. la* ***frontière*** *d'une partie A, définie par*

$$Fr(A) := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A},$$

est égale à la frontière du complémentaire de A.

Exemple 1.7 *Si* $E = \mathbb{R}$ *est muni de la topologie de l'ordre et si* $A = [0,1[$, *on vérifie que* $\overline{A} = [0;1]$, $\overset{\circ}{A} =]0;1[$ *et* $Fr(A) = \{0,1\}$.

Exercise 1.7 *Soit* $\tau = \{]-\alpha, \alpha[\mid \alpha \in [0, +\infty]\}$.
1. *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'un singleton* $\{a\}$ *puis d'un segment* $[a, b]$.

Exercise 1.8 *Soit* $(E; \tau)$ *un espace topologique et soient A et B deux parties de E telles que* $E = A \cup B$. *Montrer qu'on a :*

$$E = \overset{\circ}{A} \cup \overline{B}.$$

Exercise 1.9 *D'eterminer la frontière des ensembles de* $\mathbb{R}^2$ *suivants :*

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\right\}. \\ A_2 &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \\ A_3 &=]-2, 1[\times [0,1]. \end{aligned}$$

Exercise 1.10 *Soit* $(E; \tau)$ *un espace topologique et soient A et B deux parties de E .*
1. *Montrer que* $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ *et montrer qu'il y a égalité si* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont disjoints.*
$-$*Donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où cette inclusion est stricte.*
2. *Montrer que* $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$ *et* $Fr(\overset{\circ}{B}) \subset Fr(B)$.

Exercise 1.11 1. *Montrer que* $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ *(pour deux parties A et B d'un espace topologique).*
2. *En déduire que* $\cup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i \in I} A_i}$ *et montrer qu'il y a égalité lorsque I est fini.*
3. *Donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où cette inclusion est stricte.*
4. *Montrer que* $\overline{\cap_{i \in I} A_i} \subset \cap_{i \in I} \overline{A_i}$ *et donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où l'inclusion* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *est stricte.*
5. *Écrire les résultats correspondants pour les intérieurs.*

1.6 Partie dense

Définition 1.10 *Soit $(E;\tau)$ un espace topologique et D une partie de E. D est dite **dense** dans E ssi $\overline{D}=E$.*

La propriété suivante est une caractérisation trés pratique des parties denses.

Proposition 1.4 *D est **dense** dans E ssi tout ouvert non vide de E rencontre D.*

Preuve. $(\Longleftarrow)$:Si D n'est pas dense alors $\overline{D}\neq E$, donc $E\setminus\overline{D}$ est un ouvert non vide de E qui n'intercepte pas D (car $D\subset\overline{D}$).
$(\Longrightarrow)$: Si $O\in\tau$ est un ouvert non vide de E tel que $O\cap D=\phi$, alors D est inclu dans le fermé $(E\setminus O)$, et donc $\overline{D}\subset(E\setminus O)\neq E$. ■

Théorème 1.3 1. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ $\left(\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\right)$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*
2. *$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ $\left(\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\right)$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.*

Preuve. On commence par remarquer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un intervalle du type $]x,y[\,,x,y\in\mathbb{R}$. On peut donc supposer que $I=]x,y[$ par la suite.
1. tout intervalle contient un rationnel.
On commence par montrer l'affirmation :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:x<y\Longrightarrow\exists r\in\mathbb{Q},\;\;x<r<y.$$

Donnons d'aboerd l'idée de la preuve. Trouver un tel rationnel $r=\frac{p}{q}$, avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$. revient à trouver de tels entiers p et q vérifiant $qx<p<qy$. Cela revient à trouver un $q\in\mathbb{N}^*$ tel que l'intervalle ouvert $]qx,qy[$ contient un entier p. Il suffit pour cela que la longueur $qy-qx=q\,(y-x)$ de l'intervalle dépasse strictement 1, ce qui équivaut à $q>\frac{1}{y-x}$. Maintenant posons $p=\lfloor qx\rfloor+1$. Alors $p-1\leqslant qx<p$. On en déduit d'une part $x<\frac{p}{q}$, et d'autre part $\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\leqslant x$, donc $\frac{p}{q}\leqslant x+\frac{1}{q}<x+y-x=y$. Donc $\frac{p}{q}\in I$. On a montré l'affirmation.
2. tout intervalle contient un irrationnel.
Partant de x,y réels tels que $x<y$, on peut appliquer l'imlication de l'affirmation dans (1) au couple $\left(x-\sqrt{2},y-\sqrt{2}\right)$. On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $\left]x-\sqrt{2},y-\sqrt{2}\right[$ et par translation $r+\sqrt{2}$ est irrationel, car sinon comme les rationnels sont stables par somme, $\sqrt{2}=-r+r+\sqrt{2}$ serait rationnal, ce qui est faux. On a donc montré que si $x<y$, l'intervalle $I=]x,y[$ contient aussi un irrationnel. ■

Exercise 1.12 *Montrer qu'une partie d'un espace topologique est d'intérieur non vide si et seulement si elle rencontre toute partie dense.*

Exercise 1.13 *Soit $(E;\tau)$ un espace topologique et soient A et B deux parties de E qui sont toutes les deux denses. On suppose de plus que A est un ouvert de E.*
Montrer que $A \cap B$ est dense dans E. (Vous pouvez utiliser la dernière proposition).

1.7 Espace séparé (ou de Hausdorff)

Définition 1.11 *Un espace topologique $(E;\tau)$ est dit **séparé** ssi pour tout points distincts $(x;y)$ de E, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \phi$.*

Exemple 1.8 1. *Si E est muni de la topologie discrète alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des ouverts disjoints si x et y sont distincts, donc E est séparé.*
2.*Si E est muni de la topologie grossière et E contient au moins deux éléments distincts, alors E n'est pas séparé (pour tout $x \in E$, E est le seul voisinage de x).*
3.*L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace séparé. Eneffet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$, en posant $r := \frac{|x-y|}{3}$, les deux intervalles ouverts $]x-r, x+r[$ et $]y-r, y+r[$ sont bien disjoints, le premier étant un voisinage de x et le second est un voisinage de y.*

Proposition 1.5 *Si $(E;\tau)$ est un espace topologique séparé alors pour tout $\ell \in E$, on a*

$$\cap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V = \{\ell\}.$$

Preuve. Si $V \in \mathcal{V}(\ell)$ alors $\ell \in V$ donc $\ell \in \cap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V$. Réciproquement, si $y \in E \setminus \{\ell\}$ alors il existe $V \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que $y \notin V$ et donc $y \notin \cap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V$. D'où $\cap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V \subset \{\ell\}$. ■

Exercise 1.14 *On pose $E :=]0, +\infty[$ et pour tout réel positif , on pose $\theta_\alpha :=]\alpha, +\infty[$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :*

$$\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1. *Montrer que τ constitue une topologie sur E.*
2. *Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).*
3. *Donner (sans démonstration) $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants : $A = [4, 9[$, $A = [-2, +\infty[$, $A = \{2, 3, 4\}$, $A = \mathbb{N}$.*
4. *Montrer que (E, τ) n'est pas séparé.*

1.8 Topologie induite, topologie produit

1.8.1 Topologie induite

Soit $(E;\tau)$ un espace topologique et A un partie de E.

Définition 1.12 *La famille τ_A de parties de A, définie par :*

$$\tau_A = \{O \cap A,\ O \in \tau\},$$

*constitue une topologie sur A appelée **topologie induite** sur Apar la topologie de E. Le nouvel espace topologique (A, τ_A) s'appelle un **sous-espace topologique** de E.*

Preuve. Il s'agit de montrer que les axiomes de Hausdorff sont vérifiés pour le couple (A, τ_A). On a
(i) Puisque $\phi, E \in \tau$ (car τ est une topologie sur E) alors $\phi \cap A = \phi \in \tau_A$ et $E \cap A = A \in \tau_A$.
(ii) Soient U_1, U_2 deux parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, les parties U_1, U_2 sont de la forme $U_1 = O_1 \cap A$ et $U_2 = O_2 \cap A$, avec $O_1, O_2 \in \tau$. D'où

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in A,$$

car $O_1 \cap O_2 \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur E.
(iii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A, appartenant à τ_A, et montrons que $\cup_{i\in I} U_i \in \tau_A$. Par définition même de τ_A, chaque U_i $(i \in I)$ s'écrit sous la forme : $U_i = O_i \cap A$, avec $O_i \in \tau$. D'où

$$\cup_{i\in I} U_i = \cup_{i\in I} (O_i \cap A) = (\cup_{i\in I} O_i) \cap A \in \tau_A,$$

car $\cup_{i\in I} O_i \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur E.
■

Proposition 1.6 1. *Soit $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés de E. La famille $(F \cap A)_{F\in\mathcal{F}}$ est appelée la famille des fermés de A pour la topologie induite par celle de E.*
2. *Soit $a \in A$, alors $(V \cap A)_{V\in\mathcal{V}(a)}$ est appelée la famille des voisinages de a dans A pour la topologie induite (où $\mathcal{V}(a)$ est la famille des voisinages de a dans E).*

Preuve. 1. F' est un fermé de A ssi $A \setminus F'$ est un ouvert de A, i.e. ssi il existe $O \in \tau$ tel que $A \setminus F' = A \cap O$. Donc F' est un fermé de A ssi $\exists O \in \tau$ tel que $F' = A \setminus (A \setminus F') = A \setminus (A \cap O) = A \cap (E \setminus O)$, i.e. ssi il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F' = A \cap F$.
2. Si $V \in \mathcal{V}$ alors il existe $O \in \tau$ tel que $a \in O \subset V$. Alors $a \in A \cap O \subset A \cap V$,et

donc $A \cap V$ est un voisinage de a dans A. Réciproquement, si V' est un voisinage de a dans A alors il existe un ouvert $A \cap O$ de A (i.e. $O \in \tau$) tel que a $a \in A \cap O \subset V'$. Alors $V = O \cup V'$ vérifie $a \in O \subset V$, donc V est un voisinage de a dans E et on a $V \cap A = (O \cup V') \cap A = (O \cap A) \cup (V' \cap A) = V'$. ∎

Exemple 1.9 *L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert de $[0.2]$ muni de la topologie induite par τ_u(toplogie usuelle), car $[0,1[=]-1,1[\cap [0.2]$ et $]-1,1[\in \tau_u$. Noter que $[0,1[$ est aussi un fermé de $[-1,1[$ muni de la topologie induite par τ_u, car $[0,1[= [0.3] \cap [-1,1[$ et $[0.3]$ est un fermé de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. En revanche $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$.*

Proposition 1.7 (transitivité de la topologie induite) *Soit (E, τ) un espace topologique et $B \subset A \subset E$ deux parties de E. La topologie induite sur B par celle de E est la même que la topologie induite sur B par la topologie de A induite par celle de E.*

Topologie produit

Soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espaces topologiques.

Définition 1.13 *On appelle ouvert élémentaire de $E_1 \times E_2$ toute partie $w \subset E_1 \times E_2$ de la forme $w = O_1 \times O_2$ où $O_1 \in \tau_1$ et $O_2 \in \tau_2$. La famille formée par les réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée topologie produit.*

Remarque 1.5 *Comme $E_1 \times E_2$ et $\phi = \phi \times \phi$ sont des ouverts élémentaires et que $(O_1 \times O_2) \cap (O_1' \times O_2') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2')$, la famille et bien un topologie sur $E_1 \times E_2$.*

Définition 1.14 *On appelle topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ la topologie obtenue par produit successif de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.10 *La topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$ a pour base d'ouverts les rectangles ouverts .*

Proposition 1.8 *Soit $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ alors $(V_1 \times V_1)_{V_1 \in \mathcal{V}(x_1), V_2 \in \mathcal{V}(x_2)}$ est un système fondamentale de voisinage de x dans $E_1 \times E_2$. Plus généralement, si $\mathcal{B}(x_1)$ (resp $\mathcal{B}(x_2)$) est un système fondamentale de voisinage de x_1 (resp de x_2) dans E_1(resp dans E_2), alors $(V_1 \times V_1)_{V_1 \in \mathcal{V}(x_1), V_2 \in \mathcal{V}(x_2)}$ est un système fondamentale de voisinage de x dans $E_1 \times E_2$.*

Exemple 1.11 *Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle et $x = (x_1, x_2)$. La famille $(]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon$ est un SFV de x.*

Proposition 1.9 *Si E_1 et E_2 sont séparés alors $E_1 \times E_2$ est séparé.*

Exemple 1.12 *La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ est éparée.*

Exercise 1.15 *Soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espaces topologiques et $E = E_1 \times E_2$ l'espace topologique produit. Montrer que E est séparé ssi E_1 et E_2 sont tous les deux séparés.*

Exercise 1.16 ***Adhérence, intérieur et frontière d'un produit***
Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques, A une partie de E_1, B une partie de E_2, et C la partie $A \times B$ de l'espace produit $E = E_1 \times E_2$. Montrer que
1. $\overline{C} = \overline{A} \times \overline{B}$,
2. $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$,
3. $Fr(C) = \left(Fr(A) \times \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \times Fr(B)\right)$.

1.9 Suites convergentes

Dans toute cette section (E, τ) désigne un espace topologique.

Définition 1.15 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *vers ℓ (ou tend vers ℓ) lorsque n tend vers $+\infty$, $(n \in \mathbb{N})$ si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.6 1. *Une suite d'un espace topologique peut posséder plusieurs limites. Par exemple, si τ est la topologie grossière sur E alors tout point de E est limite de toute suite d'éléments de E.*
2. *les suites convergentes d'un espace discret sont les suites stationnaires*

Théorème 1.4 *Dans un espace topologique séparé, la limite de toute suite (si elle existe) est unique.*

Preuve. Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique séparé (E, τ) qui possède deux limites différentes ℓ_1 et ℓ_2 $(\ell_1, \ell_2 \in E)$. Comme $\ell_1 \neq \ell_2$ et E est séparé alors il existe $V \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $W \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V \cap W = \phi$. D'autre part, comme ℓ_1 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_1 = n_1(V) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_1 \Rightarrow x_n \in V.$$

De même, comme ℓ_2 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_2 = n_2(W) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_2 \Rightarrow x_n \in W.$$

Il en résulte donc que pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n = \max(n_1, n_2)$, on a $x_n \in V$ et $x_n \in W$; c'est-à-dire $x_n \in V \cap W$. Ce qui est absurde puisque $V \cap W = \phi$. ■

Définition 1.16 *une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique E est **convergente** (dans E) s'il existe $\ell \in E$ tel que $x_n \longrightarrow \ell$ lorsque $n \longrightarrow +\infty, n \in \mathbb{N}$; on dit que ℓ est un point limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E.*

Remarque 1.7 *si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subset E$, et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors nécessairement $\ell \in \overline{A}$.*

Définition 1.17 *Si $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$ est une suite d'un espace topologique E, une sous-suite (ou suite extraite) de u est une suite de la forme $u \circ \varphi$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.10 *si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique E converge vers un point limite ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce même point limite ℓ.*

1.9.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.18 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique E. Un élément ℓ de E est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

En particulier, tout point limite d'une suite en est une valeur d'adhérence (réciproque fausse).

Exemple 1.13 *dans $\mathbb{R}$, 1 est un point isolé de la paire $\{-1, 1\}$, mais est une valeur d'adhérence de la suite $(-1)^n$.*

Proposition 1.11 *L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est égal à $\cap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{u_n \mid n \geqslant N\}}$.*

Preuve. ℓ est une valeur d'adhérence de la suite u si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, l'ensemble $u^{-1}(V)$ est infini, c'est-à-dire s'il contient des entiers naturels arbitrairement grands, ce qui s'écrit :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \forall N \in \mathbb{N},\ \{u_n \mid n \geqslant N\} \cap V \neq \phi$$

ou encore (après interversion des deux $\forall$)

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \ell \in \overline{\{u_n \mid n \geqslant N\}}.$$

■

Proposition 1.12 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique E. S'il en existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (réciproque fausse)*

Exercise 1.17 *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence, dans $\mathbb{R}$ puis $\overline{\mathbb{R}}$ des suites u, v :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = (-2)^n \ \text{ et } u_{2n+1} = \sqrt{2},\ v_n = e^{-n},\ w_{2n} = 1 \ \text{ et } w_{2n+1} = n.$$

1.10 Applications continues

Dans toute cette section (E, τ) et (E', τ') désignent des espaces topologiques.

1.10.1 limites

Définition 1.19 *Soient E et E' deux espaces topologiques, A une partie non vide de E, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in \overline{A}$ et $b \in E'$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a en restant dans E (et on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = b$) ssi :*

$$\forall W \in \mathcal{V}(b), \exists V \in \mathcal{V}(a) \ \text{ tel que : } f(V \cap A) \subset W.$$

Remarque 1.8 *Dans la définition précédente, on peut remplacer $\mathcal{V}(b)$ et $\mathcal{V}(a)$ par n'importe quels SFV de b et a.*

Définition 1.20 (équivalente à la précédente) *Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application et soient $a \in E$ et $b \in E'$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a (et on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = b$) ssi*

$$\forall W \in \mathcal{V}(b) : \ f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Théorème 1.5 *Si E' est séparé, la limite, si elle existe, est unique.*

Preuve. Supposons que f admet deux limmites $b \neq b'$ de f en a quand $x \in E$. Comme E' est séparé, il existe des voisinages $W \in \mathcal{V}(b)$ et $W' \in \mathcal{V}(b')$ tels que $W \cap W' = \phi$. Or par hypothèse, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}(a)$ tels que $f(V \cap A) \subset W$ et $f(V' \cap A) \subset W$. On en déduit que $f(V \cap V' \cap A) \subset W \cap W' = \phi$, et donc $V \cap V' \cap A = \phi$. Ceci contredit $a \in \overline{A}$ car $V \cap V'$ est un voisinage de a. ■

Exemple 1.14 *Si $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1/x$, f n'a pas de limite au point* 0. *Si on considère f comme fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.*

1.10.2 Continuité ponctuelle

Définition 1.21 *Soient E et E' deux espaces topologiques, $f : E \longrightarrow E'$et $a \in E$. On dit que f est continue en a ssi pour tout voisinage $W \in \mathcal{V}(f(a))$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(V) \subset W$, i.e. ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.On dit que f est continue (sur E) si elle est continue en tout point de E.*

Exemple 1.15 1. *Toute application constante de E dans E' est continue en tout point de E.*
2. *Si E est discret, toute application de E dans E' est continue en tout point de E.*
3. *La fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.*
4. *La fonction $1_{\mathbb{R}+}$ est continue en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ mais n'est pas continue en* 0.

Proposition 1.13 *f est continue au point a si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.*

Proposition 1.14 *Soient E et E' deux espaces topologiques, f application de E dans E'; les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *l'application f est continue ;*
2. *l'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E;*
3. *l'image réciproque par f de tout fermé de E'est un fermé de E;*
4. $\forall A \subset E,\ f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$;
5. $\forall B \subset E',\ \overline{f^{-1}(B)} \subset\ f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

Preuve. $((2) \iff (3))$ par passage aux complémentaires et la formule :

$$f^{-1}\left(\complement_{E'} B\right) = \complement_E f^{-1}(B) \ \ (\forall B \subset E').$$

Dans la suite, on utilisera en permanence l'équivalence

$$(f(A) \subset B) \Longleftrightarrow \left(A \subset f^{-1}(B)\right).$$

((1) $\Longleftrightarrow$ (2)) L'application f est continue si et seulement si, pour tout $a \in E$ et tout ouvert O de E' contenant $f(a)$, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de a, autrement dit si, pour tout ouvert O de E', $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire est ouvert.
((3) $\Rightarrow$ (5)) Si l'image réciproque du fermé $F = \overline{B}$ est fermée alors elle contient non seulement $f^{-1}(B)$ mais son adhérence.
((5) $\Rightarrow$ (4)) Posons $B = f(A)$. Alors, $A \subset f^{-1}(B)$ donc si$f^{-1}\left(\overline{B}\right)$ contient l'adhérence de $f^{-1}(B)$, il contient celle de A, d'où $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{B}$:
((4) $\Rightarrow$ (3)) Soit F un fermé de E' . Posons $A = f^{-1}(F)$. Comme F est un fermé contenant $f(A)$, il contient aussi son adhérence donc si celle-ci contient $f\left(\overline{A}\right)$ alors $\overline{A} \subset f^{-1}(F)$, c'est-à-dire que l'ensemble $A = f^{-1}(F)$ est fermé. ■

Exemple 1.16 1. *Si E est un espace topologique et $E' = \mathbb{R}$, alors si f est continue, on a :*

$$\begin{aligned} I_1 &= \{x \in E \mid \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ est un fermé de } E\text{, puisqu'il est égale à } f^{-1}([\alpha, \beta]) \\ I_2 &= \{x \in E \mid f(x) > \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ est un ouvert de } E\text{, puisqu'il est égale à } f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \\ I_3 &= \{x \in E \mid f(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ est un fermé de } E\text{, puisqu'il est égale à } f^{-1}(\{\alpha\}) \end{aligned}$$

2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application t_a de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ dans $(\mathbb{R}, \tau_u)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $t_a(x) = x + a$ est continue. En effet, tout ouvert $O \in \tau_u$ s'écrit sous la forme $O = \cup_{i \in I}]\alpha_i, \beta_i[$,où, pour tout $i \in I$; $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i < \beta_i$. On a donc*

$$t_a^{-1}(O) = \cup_{i \in I} t_a^{-1}(]\alpha_i, \beta_i[) =]\alpha_i - a, \beta_i - a[.$$

Ainsi, $t_a^{-1}(O) \in \tau_u$ et t_a est continue.
3. *On rappelle que la fonction caractéristique d'une partie A de E est notée 1_A et que c'est la fonction définie sur E qui vaut 1 sur A et 0 sur $\complement_E A$. La fonction caractéristique $1_{\mathbb{R}^+}$ n'est pas continue : l'image réciproque de l'ouvert $]1/2, 3/2[$ est $\mathbb{R}^+$, ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.9 *L'image directe d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. un fermé). Par exemple*

$$\sin(]-10, 13[) = [-1, 1].$$

Définition 1.22 *Une application est dite* ***ouverte*** *(resp.* ***fermée****) ssi l'image de tout ouvert (resp. de tout fermé) est ouverte (resp. fermée).*

Exemple 1.17 *Soit E_1 et E_2 deux espace topologiques et $E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit (dont les ouverts sont les réunions d'ouverts élémentaires). Soit $\Pi_1 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ définie par $\Pi_1(x_1, x_2) = x_1$. Alors pour tout ouvert O de $E_1, \Pi_1^{-1}(O) = O \times E_2$ qui est un ouvert élémentaire de $E_1 \times E_2$. Donc Π_1 est continue. Montrons que Π_1 est ouverte : Soit O un ouvert de $E_1 \times E_2$, alors $O = \cup_{i \in I} \Omega_i$, où les Ω_i sont des ouverts élémentaires, donc $\Pi_1(O) = \cup_{i \in I} \Pi_1(\Omega_i)$. Or $\Omega_i = O_{i1} \times O_{i2}$, où O_{i1} est un ouvert de E_1, et $\Pi_1(\Omega_i) = O_{i1}$, donc $\Pi_1(O)$ est un ouvert comme réunion d'ouverts de E_1. Π_1 est donc bien ouverte.*

1.10.3 Composition d'applications continues

La proposition suivante est presque évidente, mais essentielle : la composition préserve la continuité.

Proposition 1.15 *Soient $(E, \tau_E), (E', \tau_{E'})$ et $(E'', \tau_{E''})$ trois espaces topologiques, f une application de E dans E' et g une application de E' dans E''.*
1. *Si f et g sont continues, la composée $g \circ f$ est continue.*
2. *Si f est continue en un point $x \in E$, et si g est continue au point $f(x) \in E'$, la composée $g \circ f$ est continue au point x.*

Preuve. 1. Si O est un ouvert de E'', $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de E, par continuité de f et g.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $V \in \mathcal{V}((g \circ f)(x))$, on a $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Soit $V \in \mathcal{V}(g(f(x)))$ et par continuité de f au point x, $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de x, puisque $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x)$, par continuité de g au point $f(x)$. ■

1.10.4 Homéomorphismes

Les homéomorphismes sont les isomorphismes de la structure topologique, ils permettent d'identifier deux espaces topologiques a *priori* distincts.

Définition 1.23 *Soient (E, τ_E) et $(E', \tau_{E'})$ deux espaces topologiques. Un* ***homéomorphisme*** *de E dans E' est une application bijective, continue et dont la réciproque est continue. On dit que deux espaces sont* ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

Remarque 1.10 — *La relation "homéomorphe à" est une relation d'équivalence sur la catégorie de tous les espaces topologiques.*
— *La composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme.*

Exemple 1.18 1. *Une translation sur $\mathbb{R}$ est continue, son inverse est une translation, donc est aussi continue et donc c'est un homéomorphisme. De même, les homothéties de $\mathbb{R}$ sont des homéomorphismes. On en déduit que deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. On verra plus loin que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est aussi homéomorphe à $\mathbb{R}$.*
2. *L'application identité d'un espace (E, τ) dans l'espace (E, τ') est un homéomorphisme si et seulement si $\tau = \tau'$.*
3. *f bijection continue $\not\Rightarrow$ f homéomorphisme. Par exemple, l'application $f : [0,1[\cup \{2\} \longrightarrow [0,1]$, définie par $f\,|_{[0,1[} = \mathrm{Id}_{[0,1[}$ et $f(2) = 1$, est continue bijective mais son inverse n'est pas continue en 1.*

Définition 1.24 *Soit un ensemble A vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. On dit que cette propriété est une* ***notion topologique*** *si l'image de A par un homéomorphisme quelconque vérifie encore cette propriété $\mathcal{P}$.*

Exemple 1.19 *Les propriétés suivantes sont des notions topologiques : être ouvert, fermé ou voisinage d'un point ; être séparé ; être l'adhérence, l'intérieur ou la frontière d'un ensemble.*

1.11 Topologie des espaces métriques

E désigne un ensemble non vide.

Définition 1.25 *Une* ***distance*** *sur un ensemble E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*
(1) $\forall x \in E : \ d(x, x) = 0$
(2) $\forall x, y \in E : \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie) (en disant que d est symétrique)*
(3) $\forall x, y, z \in E : \ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire)*
(4) $\forall x, y \in E : \ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ *(axiome de séparation)*

— Le nombre $d(x, y)$ s'appelle distance des points x et y. Un ensemble E muni d'une distance d s'appelle un espace métrique ; on le notera $(E; d)$.

— Si d satisfait les trois premières propriétés $(1),(2)$ et (3) mais pas forcément la quatrième, on dira que d est une **semi-distance** sur E et dans ce cas le couple $(E;d)$ est appelé

espace semi-métrique.

Exemple 1.20 1. *La **distance usuelle** sur $\mathbb{R}$ est une application $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d(x,y)=|x-y| \quad (\forall x,y\in\mathbb{R}).$$

2. *La **distance usuelle** sur $\mathbb{C}$ est une application $d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2| \quad (\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}).$$

3. *La **distance discrète (triviale)** sur un ensemble quelconque E est définie par :*

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 \ \text{si}\ x=y \\ 1 \ \text{si}\ x\neq y \end{cases} \quad (\forall x,y\in E).$$

4. *Étant donné $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle **distance euclidienne** de $\mathbb{R}^n$, l'application $d_e:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$d_e(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2} \quad (\forall x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n).$$

Plus généralement, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, l'application $d_p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^+$ définie par :

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p} \quad (\forall x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n)$$

*constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$ on l'appelle la **distance de Hölder d'exposant** p de $\mathbb{R}^n$ (pour $p=2$, on remarque que $d_2=d_e$). L'inégalité triangulaire pour d_p repose sur l'inégalité de convexité suivante :*
Inégalité de Minkowski : *$\mathbb{k}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; soit p réel, $p\geqslant 1,(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{k}^n$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Lorsque p tend vers l'infini on a

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i-y_i|) \quad (\forall x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n).$$

5. *Soient A un ensemble et E un espace métrique. Soit $\mathcal{F}(A;E)$ l'ensemble des fonctions de A dans E. Alors*

$$d_u\left(f,g\right)=\sup_{x\in A}\left\{\min\left(1,d\left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right)\right)\right\}$$

est une distance sur $\mathcal{F}(A;E)$ appelée la ***distance de la convergence uniforme*** *sur A .*
6. *Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $E=\mathcal{C}(I;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. Alors $d_1\left(f,g\right)=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$ est une distance sur E ainsi que $d_2\left(f,g\right)=\left(\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|^2dx\right)^{1/2}$.*

Proposition 1.16 *Soit E un ensemble non vide muni d'une distance d et n un entier strictement positif.*
1. $\forall\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in E^n,\ d(x_1,x_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_{i+1})$.
2. $\forall\left(x,y,z\right)\in E^3,\ d(x,y)\geqslant\left|d(x,z)-d(y,z)\right|$ *(deuxi‘eme in´egalit´e triangulaire).*
3. $\forall\lambda\in\mathbb{R}^{*+},\ \lambda d$ *est une distance.*

Preuve. Nous ne prouverons que le deuxième point (Les deux autres sont faciles à vérifier). Cette inégalité est importante, et est presque aussi utile que l'inégalité triangulaire. Soient donc x,y et z dans E. L'inégalité triangulaire nous donne $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$, ce qui implique que $d(x,y)\geqslant d(x,z)-d(y,z)$. D'autre part, l'inégalité triangulaire nous donne aussi $d(z,y)\leqslant d(z,x)+d(x,y)$, ce qui implique donc que $d(x,y)\geqslant d(y,z)-d(x,z)$; d'où le résultat. ■

1.11.1 Boules, sphère

Définition 1.26 *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $x\in E$ et $r>0$. L'ensemble*

$$B\left(x,r\right)=\left\{y\in E:d\left(x,y\right)<r\right\}$$

s'appelle ***boule ouverte*** *de centre x et de rayon r. L'ensemble*

$$\overline{B}\left(x,r\right)=\left\{y\in E:d\left(x,y\right)\leqslant r\right\}$$

s'appelle ***boule fermée*** *de centre x et de rayon r. L'ensemble*

$$S\left(x,r\right)=\left\{y\in E:d\left(x,y\right)=r\right\}$$

s'appelle ***sphère*** *de centre x et de rayon r.*

Exemple 1.21 1. *Soit* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $r > 0$, *on a* $B(x,r) = \{y \in E : |x-r| < r\} =]x-r, x+r[$. *Réciproquement, pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ *(et le centre et le rayon sont uniques). Donc les boules ouvertes de* $\mathbb{R}$ *sont exactement les intervalles ouverts et bornés de* $\mathbb{R}$. *De même l'ensemble des boules fermées coïncide avec les intervalles fermés et bornés de* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* $\mathbb{R}$, *muni de la distance* $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. *Les boules ouvertes de* $\overline{\mathbb{R}}$ *sont les ensembles suivants* $]a,b[\,,]a,+\infty[\,,]a,+\infty]\,,]-\infty,a[\,, [-\infty,a[\,, \mathbb{R}$ *et* $\overline{\mathbb{R}}$ *(où* a *et* b *sont des réels). Notez que pour les ensembles* $]a,+\infty]$ *et* $[-\infty,a[$ *il n'y pas unicité du centre et du rayon permettant de les écrire comme des boules ouvertes de* $\overline{\mathbb{R}}$.

1.11.2 Caractérisation des voisinages et des ouverts d'un espace métrique

Définition 1.27 *Soit* (E,d) *un espace métrique. Un ensemble* $O \subset E$ *est dit ouvert si pour tout* $x \in O$, *il existe* $r_x > 0$ *tel que* $B(x, r_x) \subset O$.

Proposition 1.17 1. *Une boule ouverte de* E *est toujours un ouvert de* E.
2. *Une boule fermée de* E *est toujours un fermé de* E.

Preuve. 1. Soit $B(x,r)$ une boule ouverte et $y \in B(x,r)$. Alors $d(x,y) < r$. Soit $r_y > 0$ tel que $r_y < r - d(x,y)$. Alors si $z \in B(y, r_y)$ on a

$$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < r_y + d(y,x) < (r - d(x,y)) + d(y,x) = r.$$

Donc $z \in B(x,r)$. Ainsi $B(y,r_y) \subset B(x,r)$.
2. Soit $y \in E \setminus \overline{B}(x,r)$, alors $d(x,y) > r$. Soit $\delta = d(x,y) - r$ et $z \in B(y,\delta)$ alors, $d(z,y) < \delta$. En utilisant l'inégalité triangulaire et on obtient

$$d(z,x) \geqslant d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - \delta = r.$$

D'où $z \in E \setminus \overline{B}(x,r)$ et $B(y,\delta) \subset E \setminus \overline{B}(x,r)$. Ainsi $E \setminus \overline{B}(x,r)$ est un ouvert. ■

Proposition 1.18 *Soit* (E,d) *un espace topologique et soit* $x \in E$ *et* $V \subset E$. *On dit que* V *est un voisinage de* x *et on note* $V \in \mathcal{V}(x)$ *si et seulement si il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset V$.

Preuve. Si V est un voisinage de $x \in E$, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Par définition des ouverts des espaces métriques, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Dans le sens inverse si $B(x,r) \subset V$, alors on prend $O = B(x,r)$ ■

Proposition 1.19 *Si (E,d) est un espace métrique alors on a :*
1. *Tout point $x \in E$ admet une base dénombrable de voisinages*

$$\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. $\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*, x \in E \right\}$ *est une base d'ouverts de (E,d).*

1.11.3 Topologie associée à une distance

Proposition 1.20 *Soit (E,d) un espace métrique et O une partie non vide de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1. *O est réunion de boules ouvertes,*
2. *pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$.*

Preuve. (2) $\Rightarrow$ (1) Pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset O$, et donc $\cup_{x\in O} B(x,r_x) \subset O$. Comme $x \in B(x,r_x)$ pour tout $x \in O$, on a aussi $O \subset \cup_{x\in O} B(x,r_x)$.
(1) $\Longrightarrow$ (2) Si $O = \cup_{i\in I} B(x_i,r_i)$, alors pour tout $x \in O$, il existe $i \in I$ tel que $x \in B(x_i,r_i)$. Pour $r = r_i - d(x,x_i)$, on a $B(x,r) \subset B(x_i,r_i) \subset O$. ∎

Théorème 1.6 *L'ensemble des parties de E vérifiant les propriétés (1) ou (2) de la proposition précédente, définit une topologie sur E. On l'appelle **topologie associée à la distance** d.*

Preuve. Soit τ_d= {ensembles des parties de E vérifiant (1) ou (2)} . Il s'agit de montrer que la famille τ_d de parties de E satisfait les trois axiomes de Hausdorff.
i. L'ensemble vide peut être considéré comme une réunion vide de boules ouvertes de E c-à-d $\cup_{i\in\phi} B(x_i,r) = \phi$; d'où $\phi \in \tau_d$. Quant à l'ensemble E, il est la réunion de toutes les boules ouvertes de E; d'où $E \in \tau_d$.
ii. Soit $(O_1,\ldots,O_k) \in \tau_d^k$ et $x \in \cap_{1\leqslant k\leqslant k} O_i$. Il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset O_i$. Alors $B(x, \min_{1\leqslant i\leqslant k}(r_i)) \subset \cap_{1\leqslant k\leqslant k} O_i$. D'après la proposition précédente on en déduit que $\cap_{1\leqslant k\leqslant k} O_i$ est réunion de boules ouvertes, d'où la stabilité par intersection finie.
iii. Pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de E, appartenant à τ_d, l'ensemble $\cup_{i\in I} O_i$ est une réunion de réunions de boules ouvertes de E; c'est donc une réunion de boules ouvertes de E. D'où $\cup_{i\in I} O_i \in \tau_d$. ∎

Définition 1.28 *Un espace topologique (E,τ) est dit **métrisable** s'il existe une métrique d sur E telle que la topologie associée à d soit égale à τ.*

Exemple 1.22 1. *La topologie associée à la distance triviale est la topologie discrète.*
2. *La topologie associée à la distance usuelle de* $\mathbb{R}$ *est la topologie usuelles de* $\mathbb{R}$. *Il existe d'autres distances sur* $\mathbb{R}$ *dont la topologie associée est la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *(par exemple* $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$*).*

1.11.4 Distance d'un point à un ensemble, d'un ensemble à un autre, diamètre

Définition 1.29 *Soient* (E,d) *un espace métrique. Soit* A *et* B *des sous-ensembles non vides de* E *et* x *un élément de* E;
a) on appelle ***distance de*** A ***à*** B *et on note* $d(A,B)$ *le réel positif défini par*

$$d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b);$$

b) on appelle ***distance de*** x ***à*** A *et on note* $d(x,A)$ *le réel positif défini par*

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a);$$

c) on appelle ***diamètre de*** A *et on note* $\delta(A)$ *l'élément de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *défini par*

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

On dit que A ***est borné*** *si et seulement si*

$$\delta(A) < +\infty$$

et si et seulement si

$$\forall a \in E, \exists r > 0,\ A \subset B(a,r).$$

Remarque 1.11 1. *Bien faire attention que, malgré son nom, la distance entre ensembles n'est absolument pas une distance!! Par exemple si on prend* $A = \{2\} \subset \mathbb{R}$ *et* $B = \left\{\frac{1}{n+1} + 2, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ *on a* $d(A,B) = 0$ *tandis que* $A \neq B$.
2. *le diamètre d'une boule* $B(a,r)$ *est majoré par* $2r$.
3. *On a aussi* $d(A,B) = \inf_{x\in A} d(x,B) = \inf_{y\in B} d(y,A)$.

Proposition 1.21 *Soient* A *et* B *deux parties d'un espace métrique. Alors, on a :*
1. $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \subset \delta(B)$.
2. $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.

Définition 1.30 *Soient* Λ *un ensemble non vide,*(E,d) *un espace métrique et* $f : \Lambda \longrightarrow E$ *une application. On dit que* f *est bornée si son image* $f(\Lambda)$ *est une partie bornée de l'espace métrique* E.

1.11.5 Applications lipschitziennes et Applications contractantes

Définition 1.31 *Soient* (E, d) *et* $(E^{'}, d')$ *deux espaces métriques. Une application* $f : E \longrightarrow E'$ *entre deux espaces métriques est dite* $k-$***lipschitzienne****, pour un certain réel* $k \geqslant 0$, *si*

$$\forall x, y \in E,\ d'(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

S'il existe de tels k *alors le plus petit d'entre eux existe et est appelé la constante de Lipschitz de* f *(ou rapport de Lipschitz de* f*).*
· *On dit que* f *est* ***bilipschitzienne*** *si elle est bijective et chacune des deux applications* f *et* f^{-1} *est lipschitzienne.*
· *On dit que* f *est* ***contractante*** *si elle est lipschitzienne de rapport inférieur strictement à* 1.

Définition 1.32 (Isométries) *Soient* (E, d) *et* $(E^{'}, d')$ *deux espaces métriques et* $f : E \longrightarrow E'$ *une application. On dit que* f *est une* ***isométrie*** *si :*

$$\forall x, y \in E,\ d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

En d'autre termes : une isométrie est une application qui conserve les distances.
— *toute application isométrique (c'est-à-dire vérifiant* $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$*) est* $1-$*lipschitzienne, donc toute isométrie (c'est-à- dire toute bijection ou surjection isométrique) est un homéomorphisme.*

Exemple 1.23 *Si* $\mathbb{C}$ *est muni de la distance usuelle et* $\mathbb{R}^2$ *est muni de la distance*d_2*, alors l'application* $f(x, y) = x + iy$ *est une isométrie de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{C}$.

Proposition 1.22 *L'application distance d'un point à une partie* A *non vide, définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$x \longmapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

est $1-$*lipschitzienne, c'est-à-dire que*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

Preuve. Pour x, y fixés de E, soient $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(a) = d(x, a) \text{ et } g(a) = d(x, y) + d(y, a).$$

De $f \leqslant g$ on en déduit que $\inf_{a \in A} f(a) \leqslant \inf_{a \in A} g(a)$, c'est-à-dire $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Même chose en échangeant x et y, autrement dit : $d(x, y)$ majore à la fois la diférence $d(x, A) - d(y, A)$ et son opposée. Il majore donc la valeur absolue. ■

1.11.6 Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes

Définition 1.33 · *Soit E un ensemble, d et d' deux distances sur E. On dit que d et d' sont* ***topologiquement équivalentes*** *si et seulement si les topologies associées à d et d' coïncident (si elles définissent la même topologie ; c'est-à-dire si $\tau_d = \tau_{d'}$).*
· *On dit que deux distances d et d' sont* ***métriquement équivalentes*** *ou* ***équivalentes*** *si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha d'(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant \beta d'(x,y)$ pour tout $x, y \in E$.*

Remarque 1.12 ·*Des distances d et d' métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*
·*La réciproque est fausse : on peut trouver des distances d et d' topologiquement équivalentes qui ne sont pas métriquement équivalentes*

Proposition 1.23 *Soit E un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur E. Alors d et d' sont équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est bilipschitzienne. Aussi, d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est un homéomorphisme.*

Preuve. Nous vérifions la première assertion de la proposition. L'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $k > 0$ tel que :

$$d'(x,y) \leqslant kd(x,y).$$

De même, son application inverse $\mathrm{Id}_E^{-1} : (E,d') \longrightarrow (E,d)$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un $k' > 0$ tel que :

$$d(x,y) \leqslant k'd'(x,y).$$

On obtient que l'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est bilipschitzienne si et seulement s'il existe $k, k' > 0$ tels que :

$$\frac{1}{k'}d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant kd(x,y).$$

Ce qui équivaut au fait que d et d' sont équivalentes.
Maintenant la seconde assertion de la proposition. L'application $\mathrm{Id}_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E,d') est un ouvert de (E,d) ; ce qui revient simplement à dire (puisque Id_E est l'identité) que $\tau_{d'} \subset \tau_{d'}$. On

montre de la même façon que l'application inverse de $\mathrm{Id}_E : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ est continue ssi $\tau_d \subset \tau_{d'}$. En regroupons les deux inclusions, on obtient que $\mathrm{Id}_E : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ est un homéomorphisme ssi $\tau_d = \tau_{d'}$; c'est-à-dire ssi d et d' sont topologiquement équivalentes.
■

Exemple 1.24 *Soit (E, d) est un espace métrique, alors*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une distance sur E, bornée et topologiquement équivalente à d.

Exemple 1.25 *Soit p un entier $\geqslant 1$; on définit les trois distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{k}^p$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{k}^p : d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i| \ , d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \ , \ d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i - y_i|$$

alors les distances d_1, d_2 et d_∞ définies sur $\mathbb{k}^p$ vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{k}^p, \ d_\infty(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant \sqrt{p} d_2(x, y) \leqslant p d_\infty(x, y).$$

Ainsi les distances d_1, d_2 et d_∞ sont équivalentes donc topologiquement équivalentes.
Indication : pour montrer que $d_1(x, y) \leqslant \sqrt{p} d_2(x, y)$, on utilise l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz****, on a*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{p} d_2(x, y).$$

1.11.7 Caractérisations séquentielles

Limite d'une suite

Soit (E, d) un espace métrique. Rappelons que pour tout $x \in E$, la famille $B(\ell, \epsilon)_{\epsilon > 0}$ est un **SFV** de x dans E, on peut réécrire la définition de la limite d'une suite dans un espace métrique.

Proposition 1.24 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon.$$

Preuve. $\Rightarrow$ / Supposons que ℓ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la définition d'une suite convergente au dessus, pour tout $\epsilon > 0$ la boule ouverte $B(\ell, \epsilon)$ est une voisinage de ℓ, alors il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\epsilon,\ x_n \in B(\ell, \epsilon)$. C-à-d

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$ / Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N_\epsilon,\ d(x_n, \ell) < \epsilon$. On suppose que V un voisinage de ℓ ($V \in \mathcal{V}(\ell)$). Alors il existe un ouvert $B(\ell, r)_{r>0} \subset V$. On prend par exemple $\epsilon = r/2$, Par hypothèse, facilement nous pouvons trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N;\ d(x_n, \ell) < \epsilon$. Donc on a trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ x_n \in B(\ell, \epsilon) \subset B(\ell, r)_{r>0} \subset V,$$

ce dernier est vrai pour chaque voisinage de $V \in \mathcal{V}(\ell)$ et prouve que ℓ est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .Comme un espace métrique est séparé, la limite d'une suite est unique quand elle existe. ■

Points adhérents, parties fermées

Définition 1.34 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est* ***adhérent*** *à A si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ B(a, \epsilon) \cap A \neq \phi,$$

ou

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A, d(x, a) < \epsilon.$$

Exemple 1.26 *Par exemple, pour $A =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, on a 0 et 1 qui sont dans $\overline{A}$. Car pour tout $\epsilon > 0$,les deux boules $B(0, \epsilon) =]-\epsilon, +\epsilon[$, $B(1, \epsilon) =]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ rencontrent A.*

Proposition 1.25 *Soient $(E; d)$ un espace métrique, A un sous-ensemble non vide de E et x un élément de E. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
1. $x \in \overline{A}$;
2. $d(x, A) = 0$;
3. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Preuve. Pour vérifier l'équivalence entre les trois assertions, il suffit de montrer que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.
$(1) \Rightarrow (2)$ Si $x \in \overline{A}$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ rencontre A,

i.e il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < \frac{1}{n}$, donc $d(x,A) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit $d(x,A) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si $d(x,A) = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ étant un voisinage de x, il intercepte A. Soit $a_n \in A \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A telle que $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$, i.e. une suite de points de A qui tend vers x.
(3) $\Rightarrow$ (1) On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x$; alors par définition on en déduit que $\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \Rightarrow d(a_n, x) < \epsilon$, d'où $\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \Rightarrow a_n \in B(x,\epsilon)$. En particulier $B(x,\epsilon) \cap A \neq \phi$ pour tout $\epsilon > 0$ et ce la montre que $x \in \overline{A}$. ■

Remarque 1.13 *Il est possible (et facile) de montrer que les points adhérents à A peuvent être classés en deux types différents :*
1. *On dit que $x \in E$ est un **point d'accumulation** de A si pour tout $r > 0$, l'ensemble $B(x,r) \cap A \neq \phi$.*
2. *On dit que $x$est un **point isolé** de A s'il existe $r > 0$, tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.*

Proposition 1.26 *Soit $(E;d)$ un espace métrique, A une partie de E. A est **fermée** si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, si (a_n) converge dans E alors (a_n) converge dans A. Autrement dit*

$$A \text{ est un ferme de } E \Longleftrightarrow \left(\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x \in A\right).$$

Preuve. $\Rightarrow$ / Si A est fermé alors $\overline{A} \subset A$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers un point $x \in E$, alors d'après la proposition précédénte $x \in \overline{A}$, donc $x \in A$.
$\Leftarrow$ / Réciproquement, si $x \in \overline{A}$, alors x est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A donc $d(x,A) = 0$. D'où $x \in A$, i.e. $\overline{A} = A$. ■

1.11.8 Continuité uniforme

Définition 1.35 *Soient (E,d) et (E',δ) des espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ une application.*
*On dit que f est **continue** en un point x_0 de E si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in E : d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Définition 1.36 *Soient (E,d) et (E',δ) des espaces métriques ; une application f de E dans E'est **uniformément continue** sur E si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, x' \in E : d(x,x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Une application uniformémenr continue sur E est continue en tout point de E; la réciproque est fausse : ainsi les seules fonctions polynomiales réelles uniformément continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions affines.

Exemple 1.27 1. *l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue malgré sa continuitée usuelle.*
2. *une application $f : (E, d) \longrightarrow (E', \delta)$ lipschitzienne sur E est uniformément continue sur E.*

Proposition 1.27 *Soient (E, d), (E', d') et (E'', d'') trois espaces métriques et soient $f : E \longrightarrow E'$ et $g : E' \longrightarrow E''$ deux applications. Si f est uniformément continue sur E et g est uniformément continue sur E' alors $g \circ f$ est uniformément continue sur E.*

La démonstration est un exercice facile laissé au soin du lecteur!

1.11.9 Espaces métriques séparables

Définition 1.37 *On dit qu'un espace métrique (E, d) est séparé si pour tout couple de points $x, y \in E$ distincts, $x \neq y$, s'il existe deux réels r, r' strictement positifs tels que*

$$B(x, r) \cap B(y, r') = \phi.$$

Proposition 1.28 *Un espace métrique est séparé.*

Preuve. Soit (E, d) un espace métrique. Soit x, y deux points distincts de E. On pose $r = d(x, y) > 0$, $V = B\left(x, \frac{r}{3}\right)$ et $W = B\left(y, \frac{r}{3}\right)$.
Si $z \in V \cap W$, alors on a

$$r = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

ce qui est impossible pour $r > 0$. On a donc $B\left(x, \frac{r}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{3}\right) = \phi$. ■

Proposition 1.29 *Si (E, d) est un espace topologique séparé toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une limite. Si une telle limite $\ell \in E$ existe, on dit que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ) lorsque n tend vers l'infini.*

Preuve. On raison par l'absurde, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait deux limites distinctes $\ell \neq \ell'$. Comme (E, d) est séparé, il existe $B(\ell, r) \in \mathcal{V}(\ell)$ et $B(\ell', r') \in \mathcal{V}(\ell')$ tels que $B(\ell, r) \cap B(\ell', r') = \phi$. D'aprés la proposition 1.24, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$\forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant n_1 : u_n \in B(\ell, r) \text{ et } \forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant n_2 : u_n \in B(\ell', r').$$

Ce dernier implique que $\forall \epsilon > 0, \forall n \geqslant \max(n_1, n_2) : u_n \in B(\ell, r) \cap B(\ell', r') = \phi$ d'où la contraduction. ■

1.11.10 Exercices

Exercise 1.18 *Soit* $E =]0, +\infty[$. *Pour* $x, y \in E$, *on note*

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. *Démontere que* d *est une distance sur* E.
2. *Déterminer* $B(1,1)$ *pour cette distance.*
3.*La partie* $A =]0,1]$ *est-elle bornée pour cette distance ?fermées ?*
4. *Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.*

Exercise 1.19 ***Partie 1 :*** *On considère l'espace métrique* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *tel que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$d_2(x,y) = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

1. *Montrer que le demi-plan* $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que toute droite de* $\mathbb{R}^2$ *est un fermé.*

Partie 2 : *Montrer que* $\delta(x,y) = \max(|x_i - yi|)$ *définie une distance sur* $\mathbb{R}^2$ *et trouver les boules ouvertes de centre* $C(1,1)$ *et rayon* $r \in \mathbb{R}$.

Partie 3 : *Soit l'application* ∂ *définie par :*

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

Montrer que ∂ *une distance sur* $\mathbb{R}^2$ *et tracer la boule ouverte de centre l'origine* $O(0,0)$ *et de rayon* 2.

Exercise 1.20 1. *A quelle condition sur la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie par* $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ *est-elle une distance sur* $\mathbb{R}$?
2. *Les applications suivantes définies par :*

$$\delta_1(x,y) = |\sin x - \sin y|,\ \delta_2(x,y) = |x^2 - y^2|\ ,\ \delta_3(x,y) = |x^3 - y^3|,\ \delta_4(x,y) = \log(1 + |x+y|)$$

sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
3. *Montrer que l'application suivante*

$$d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$$

définie une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercise 1.21 *Soit (E, d) un espace métrique*

1. *Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1]$, l'application d^α définie une distance sur E.*
2. *Montrer qu'il existe $\alpha^* = \alpha(d) \in [1, +\infty]$ tel que*

· *si $0 < \alpha < \alpha^*$, alors d^α est une distance sur E*

· *si $\alpha > \alpha^*$, alors d^α n'est pas une distance sur E.*

3. *Déterminer α^* dans le cas où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, puis la distance discrète.*

Exercise 1.22 *Soit (E, d) un espace métrique et $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application croissante, vérifiant*

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } \phi(a + b) \leq \phi(a) + \phi(b), \forall a, b \in \mathbb{R}_+.$$

1. *Montrer que $d' = \phi \circ d$ est une distance sur E.*
2. *Montrer que*

$$d_1 = \frac{d}{1 + d}, \;\; d_2 = \log(1 + d), \;\; d_3 = \inf(1, d)$$

sont des distances sur E.

Exercise 1.23 *On note par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose*

$$d(u, v) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{|u_n - v_n| + 1}$$

1. *Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d\right)$ est borné.*

Chapitre 2

Espaces compacts

Bibliographie

[1] Gilles CHRISTOL, Anne COT et Charles MARLE, Topologie, Ellipses, 1997.

[2] Jean DIEUDONNÉ, Éléments d'Analyse, tome I, Gauthiers-Villars,1972.

[3] Jean-Pierre MARCO, Analyse pour la licence, Masson, 1998.

[4] Hervé QUEFFÉLEC, Topologie, Dunod, 2002, 4*e* éd, 2012.

[5] N. BOURBAKI – Topologie générale, eléments de mathématique éd., vol. Fascicule II, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1142, Hermann, 1965.

[6] E. Burroni. La topologie des espaces métriques, Ellipses, 2005.

[7] G. Choquet. Cours de topologie, Broché,2000.

[8] J. Dixmier. Topologie Générale, Presses Universitaires de France, Paris, 1981.

[9] G. Flory. Topologie et Analyse, Tome 1 : Topologie (exercices avec solutions), Broché, 2017.