Chapitre 3
Les différentes représentation d'un graphes

1. **Matrice associée**

   Si un graphe G admet n sommets x_1, x_2,…, x_n, posons a_{ij} le nombre d'arc de la forme (x_i,x_j), la matrice carrée (a_{ij}) est appelée matrice associée.

   Dans la matrice associée on a

   $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_G^+(x_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d_G^-(x_j)$.

2. **Matrice d'adjacence**

   Si un graphe G admet n sommets x_1, x_2,…, x_n, posons $a_{ij}=1$ s'il existe un arc de la forme (x_i,x_j) et $a_{ij}=0$ sinon. La matrice carrée (a_{ij}) est appelée matrice d'adjacence.

3. **Matrice d'incidence sommets-arcs**

   Soit G un graphe de n sommets et m arêtes.

   La matrice d'incidence sommets-arcs de G est une matrice (a_{ij}) de dimension n×m définie par

   $a_{ij}=1$ si x_i est l'extrémité initiale de l'arc e_j

   $a_{ij}=1$ si x_i est l'extrémité terminale de l'arc e_j

   $a_{ij}=0$ dans les autres cas

   La matrice d'incidence ne convient pas pour les graphes avec boucle.

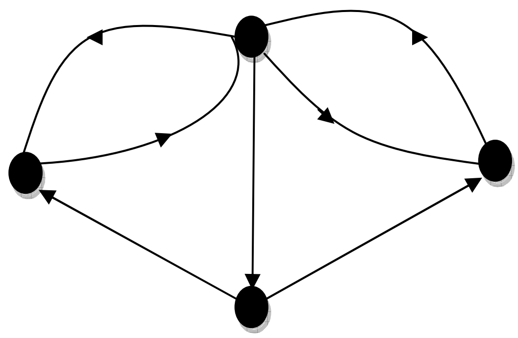
   Le nombre de valeurs égales à (+1) d'une ligne donne le degré extérieur $d_G^+(x)$ du sommet x correspondant.

Le nombre de valeurs égales à (-1) d'une ligne donne le degré intérieur $d_G^-(x)$ du sommet x correspondant.

4. **<u>Le dictionnaire des successeurs et des prédécesseurs</u>**

Il consiste à énumérer pour chaque sommet x du graphe G les ensembles $\boldsymbol{\Gamma_G^+(x)}$ et $\boldsymbol{\Gamma_G^-(x)}$.

<u>Exemple</u>:



La matrice associée

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Les arbres

1. Définition:

Dans un multi-graphe, une chaîne de longueur q est une liste ordonnée de q sommets tel que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. On la note par $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$.

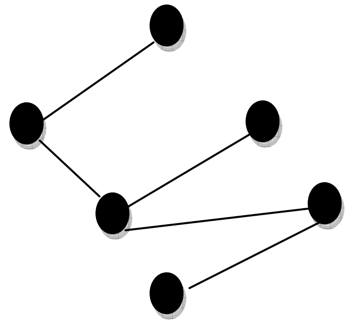
Une chaine $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ est une cycle si elle est simple et fermée. Simple si la même arête ne figure pas deux fois et fermée si les sommets aux extrémités de la chaîne se coïncident.

Un multi-graphe est dit connexe si pour toute paire de sommets distincts (x,y), il existe une chaîne reliant x à y.

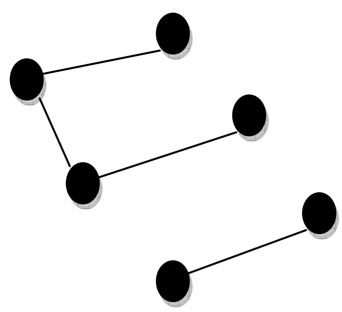
Un arbre est un multi-graphe connexe et sans cycle.

Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt.

Les sommets pendants d'un arbre ou d'une forêt sont appelés les feuilles.



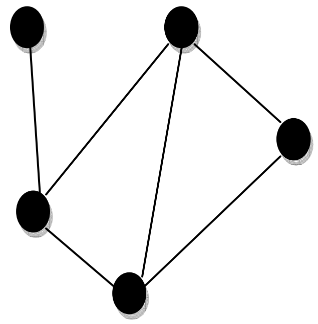
Arbre



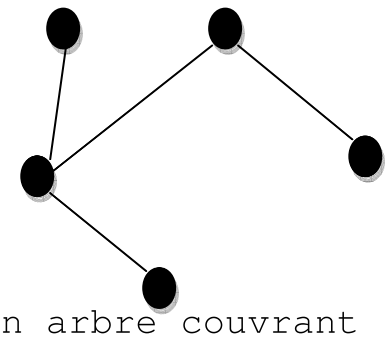
Forêt

2. Arbre couvrant de poids minimum

Soit G=(S,A) un multi-graphe. On appelle arbre couvrant de G un graphe partiel de G qui est aussi un arbre.



Graphe G



Un arbre couvrant

On associe à chaque arête de G un poids et on veut trouver dans G un arbre couvrant de poids total minimum.

Algorithme de Kruskal

Données: un multi-graphe pondéré G=(S,A,C)

Résultats: arbre ou forêt H=(V,W) couvrant de poids minimum.

2. Trier et numéroter les arêtes de G dans l'ordre croissant de leurs poids: $C(e_1) \leq C(e_2) \leq \ldots \leq C(e_m)$
3. Poser $W := \emptyset$, $k := 0$
4. Tant que $k < m$ et $|W| < m-1$ faire

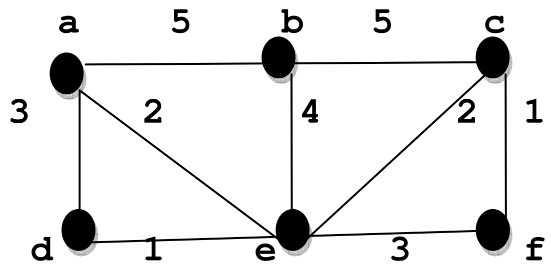
Début

Si e_{k+1} ne forme pas de cycle avec W alors

$W := W \cup \{e_{k+1}\}$, $k := k+1$

Fin

Exemple:



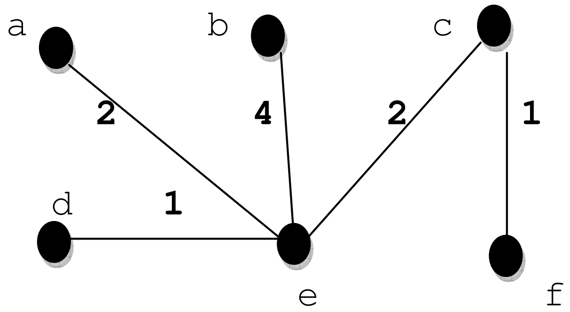
C(d,e)≤C(c,f)≤C(a,e)≤C(c,e)≤C(a,d)≤C(e,f)≤C(a,b)≤C(b,c)

W=∅, W={(d,e)},W={(d,e),(c,f)}, W={(d,e),(c,f),(a,e)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e),(b,c)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e),(b,c)}.



Arbre couvrant de poids minimum

Poids minimum = 10