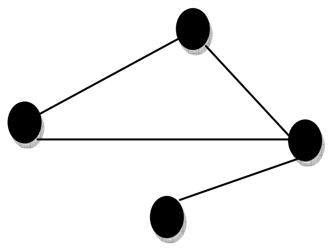
Chapitre 2

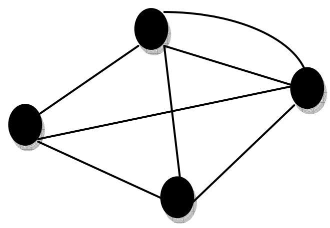
Les graphes particuliers

1. Graphe complet

Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.



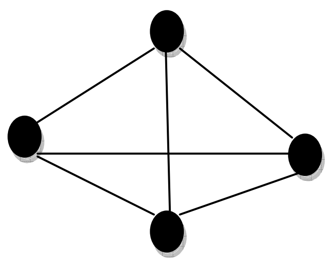
N'est pas complet



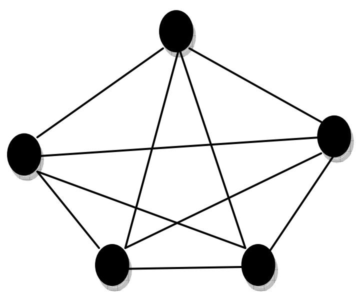
Complet

2. Clique

Une clique est un graphe simple et complet.
Une clique de n sommets se note K_n.



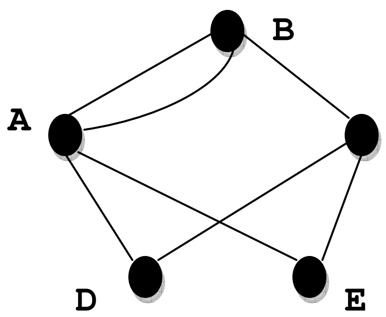
K_4

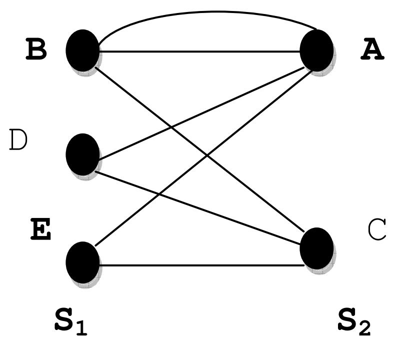


K_5

3. **Biparti**

Un graphe **G =(S,A)** est dit biparti si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensemble (classes) S_1 et S_2 de telle sorte que deux sommets de même classe ne soient pas pas adjacents. On le note par **G =(S_1,S_2,A)**.

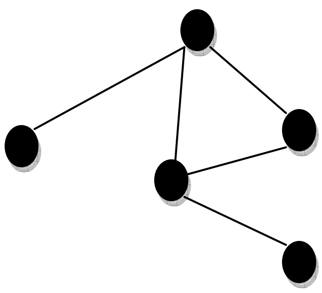




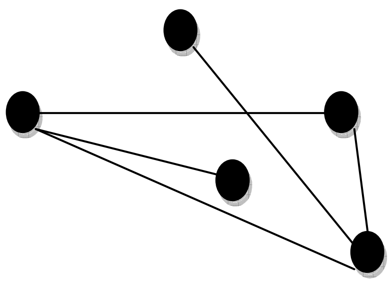
4. **Graphe complémentaire**

A un graphe simple **G =(S,A),** on peut définir un graphe complémentaire $\overline{\mathbf{G}}$ **=(S,**$\bar{A}$**)** comme suit:

$$e \in A \Leftrightarrow e \notin \bar{A}$$



G

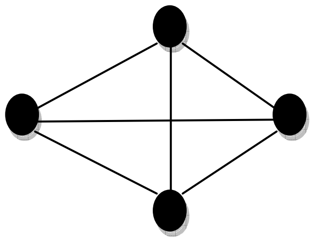
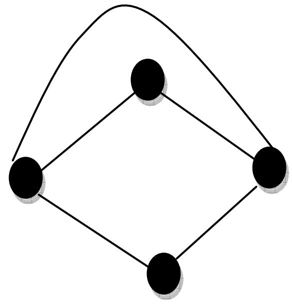


$\overline{\mathbf{G}}$

$$G \cup \overline{\mathbf{G}} = K_5$$

5. **Graphe planaire**

Un graphe est dit planaire si on peut le dessiner sur un plan de telle façon que les arêtes ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités.

Une face d'un graphe planaire est une région du plan limitée par les arêtes de telle sorte que deux points arbitraires dans cette région reliés par une arête ne rencontrent ni sommet ni arête.

La frontière d'une face est l'ensemble des arêtes qui l'entourent.

Une face infinie est une face illimitée, elle n'admet pas de contour et elle est unique. Les autres faces sont finies.

Deux faces sont dites adjacentes si leurs frontières ont une arête commune.

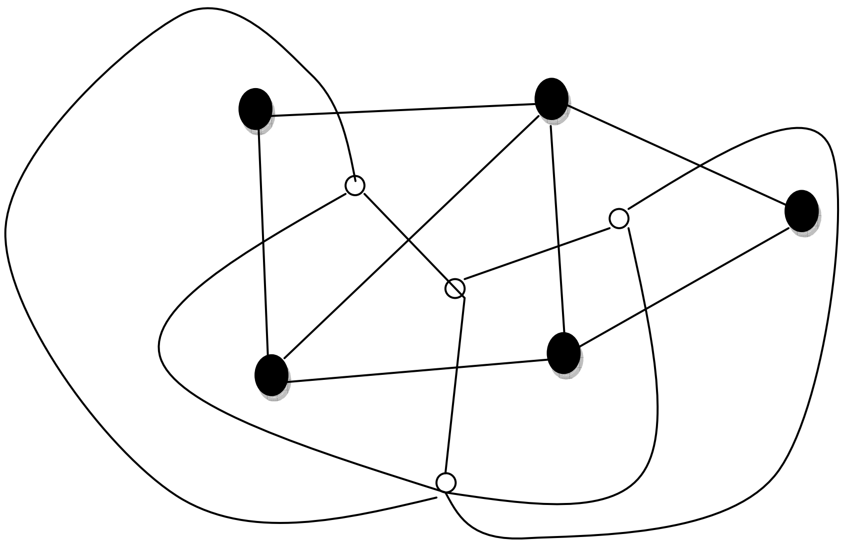
Les graphes planaires vérifient la formule dite d'Euler:

(nombre de sommets) + (nombre de faces)-(nombre d'arêtes)=2.

6. Graphe dual

Soit G un graphe planaire. Le dual de G, noté D, est défini comme suit:

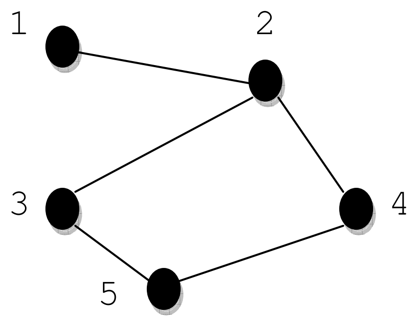
Chaque sommet de D représente une face de G. Une arête reliant deux sommets de D représente une arête commune des deux faces correspondantes dans G.



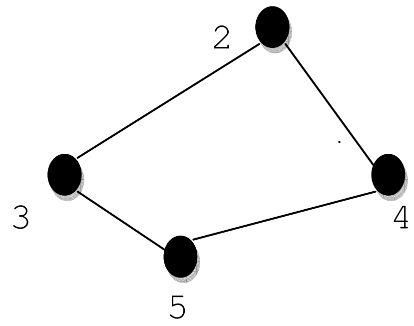
7. Sous-graphe et graphe partiel d'un graphe G =(S,A)

7.1. Sous graphe de G engendré par E ⊂ S

C'est le graphe $\mathbf{G_E}$ dont les sommets sont les points de E et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs extrémités dans E.



E={2,3,4,5}



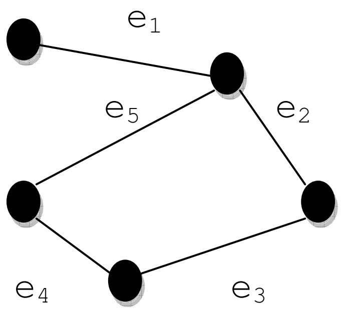
$\mathbf{G_E}$

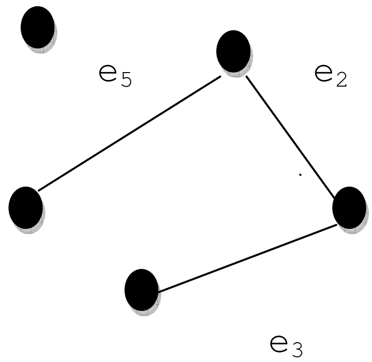
7.2. Graphe partiel de G engendré par B ⊂A

C'est le graphe (S,A) dont les sommets sont les points de S et dont les arêtes sont ceux de U.

Autrement dit, en élimine de G les arêtes de A-B.

B={e_2, e_3, e_5}



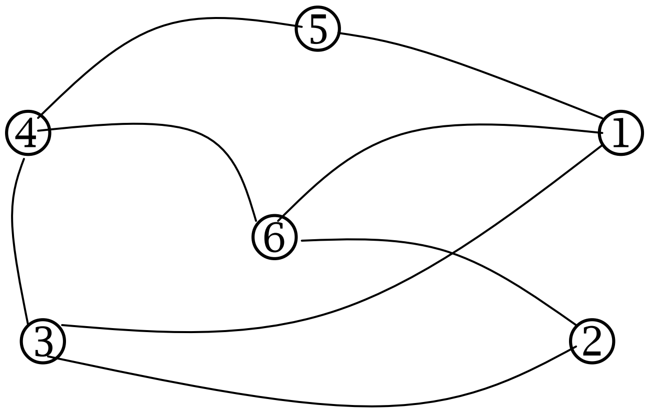


7.3. Sous graphe partiel de G

C'est un sous-graphe d'un graphe partiel de G.

Exercice

Soit $\boldsymbol{G}$ le graphe suivant :



Le graphe $\boldsymbol{G}$ est-il ?

a) Simple

b) Complet

c) Clique

d) Biparti

e) Biparti complet

f) Planaire

Solution:

a) ***G*** est Simple car ***G*** ne contient pas de boucles ni d'arêtes multiples.

b) ***G*** n'est pas complet car sommets 1 et 2 ne sont pas adjacents.

c) ***G*** n'est pas une clique car ***G*** n'est pas complet.

d) ***G*** est biparti car on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux classe $S_1=\{1,2,4\}$, $S_2=\{3,5,6\}$ de telle sorte que deux sommets de même classe ne soient pas adjacents.

e)***G*** n'est pas biparti complet car 2 n'est pas adjacent avec 5.

f) **G** est planaire car il est possible de représenter **G** sur un plan de sorte que deux arêtes de **G** ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.