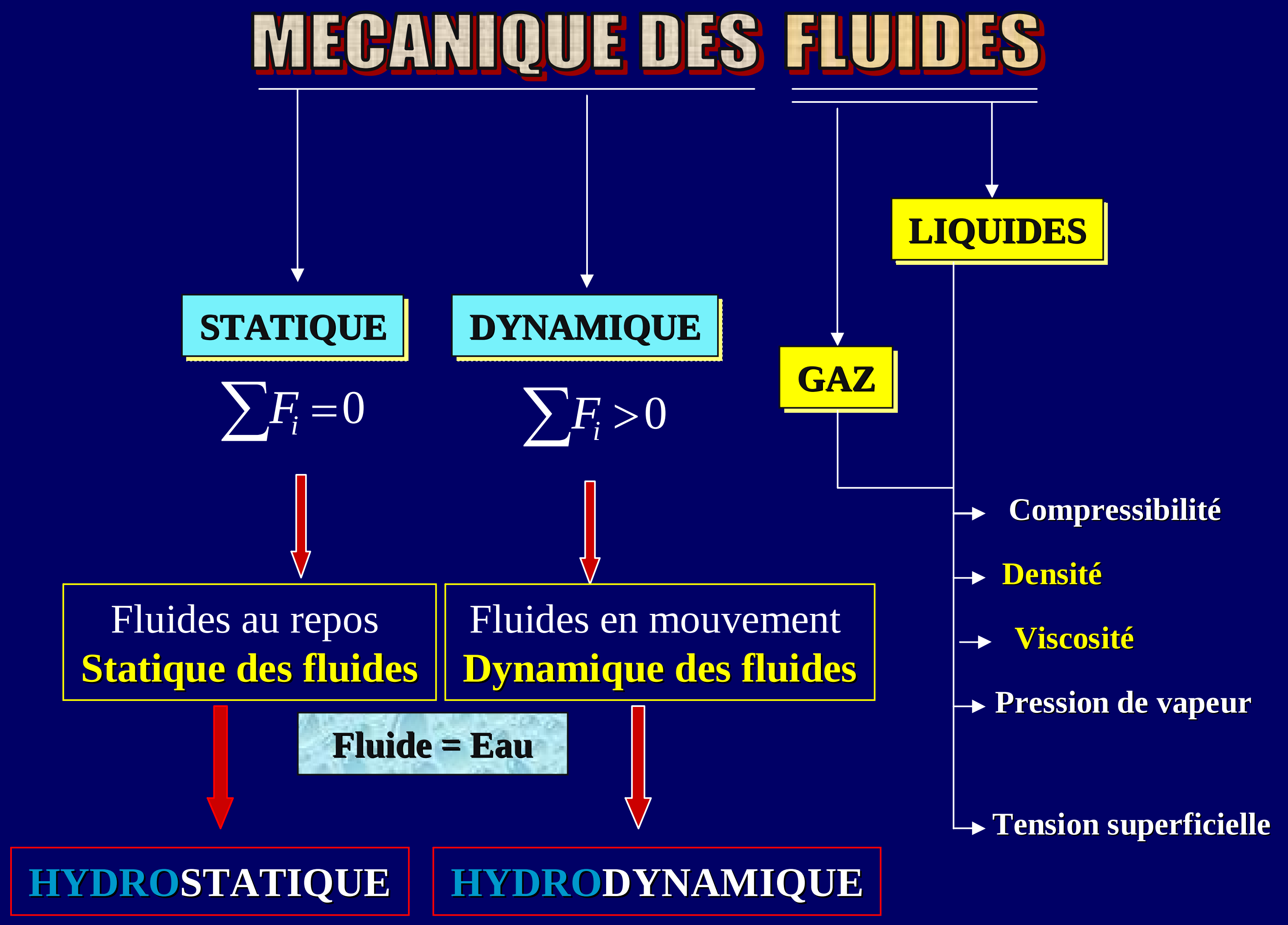
SCHEMA GENERAL



- II.- STATIQUES DES FLUIDES
- ***II.1.- Notion de Pression***
- ***II.2.- Loi de Pascal***
- ***II.3.- Equation Fondamentale de l'Hydrostatique***
- ***II.4.- Dispositifs de mesure de la pression***
- ***II.5.- Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces***
- *II.2.1.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Planes*
- *II.2.2.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Courbes*

INTRODUCTION

I.1.- Le Système d'Unités SI

Grandeur de Base	Nom de L'Unité	Symbole	Dimension
Longueur	***Mètre***	***m***	***L***
Masse	***Kilogramme***	***kg***	***M***
Temps	***Seconde***	***s***	***T***

Caractéristique	Unité SI	Dimension
Vitesse	*m/s , m.s^{-1}*	*LT^{-1}*
Accélération	*m/s^2 , m.s^{-2}*	*LT^{-2}*
Force	*Kg.m/s^2 , N (Newton) , kg.m.s^{-2}*	*MLT^{-2}*
Energie	*Kg.m^2./s^2 , N.m , J (Joule) , kg.m^2.s^{-2}*	*ML^2T^{-2}*
Puissance	*Kg.m^2/s^3 , N.m/s , W (Watt) , kg.m^2.s^{-3}*	*ML^2T^{-3}*
Pression	*Kg/m/s^2 , N/m^2 , Pa (Pascal) , kg.m^{-1}.s^{-2}*	*$ML^{-1}T^{-2}$*
Masse Spécifique	*Kg/m^3 , kg.m^{-3}*	*ML^{-3}*
Poids Spécifique	*Kg/m^2/s^2 , N/m^3 , kg.m^{-2}.s^{-2}*	*$ML^{-2}T^{-2}$*
Viscosité	*Kg/m/s , N.s/m^2 , kg.m^{-1}.s^{-1}*	*$ML^{-1}T^{-1}$*

I.2.- Les Propriétés des Fluides

I.2.1.- Les Densités

$$\rho = \frac{\overset{kg}{M}}{\underset{m^3}{V}}$$

Unités	**Dimensions**
$\boxed{Kg/m^3}$	ML^{-3}

Valeurs Particulières :

- **Eau : ρ_w = 1000 kg/m^3**
- **Mercure : ρ_{Hg} = 13546 kg/m^3**

b.- Poids Spécifique :

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{Mg}{V} \rightarrow \rho \Rightarrow \gamma = \rho g$$

Unités $\frac{Kg}{m^3} \times \frac{m}{s^2} \rightarrow N(Newton) \rightarrow N/m^3$

Dimensions $ML^{-2}T^{-2}$

Valeurs Particulières :

- **Eau : γ_w = 9,814 x 1000 = 9814 N/m^3**
- **Mercure : γ_{Hg} = 9,814 x 13546 = 132940 N/m^3**

c.- Densité Relative :

$$D = \frac{\rho}{\rho_{\omega}}$$

$$\frac{\cancel{Kg.m^{-3}}}{\cancel{Kg.m^{-3}}} \Rightarrow$$

Unité

Adimensionnel (sans unité)

Valeurs Particulières **:**

- **Eau : Dw = 1**
- **Mercure : D_{Hg} = 13,6**

I.2.2.- Les Viscosités

La viscosité μ est une propriété d'un fluide due à la cohésion et à l'interaction entre les molécules qui présentent une résistance aux déformations .
Tous les fluides sont visqueux et obéissent à la loi de viscosité établie par Newton :

$$\boxed{\tau = \mu \frac{du}{dy}}$$

τ : **Contrainte de déformation tangentielle**

$\frac{du}{dy}$: **Gradient de vitesse d'écoulement**

μ : **Viscosité dynamique**

a.- La Viscosité Dynamique

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{Force}{Surface} \Big/ \frac{Vitesse}{Distance} = \frac{ForcexTemps}{Surface} = N.s.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-1}$$

Remarque : μ **est généralement exprimée en Poise (Po) : 10 Po = 1 kg.m^{-1}.s^{-1}**

Valeurs Particulières :

- **Eau : μ_w = 1,14 x 10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}**
- **Mercure : μ_{Hg} = 1,552 kg.m^{-1}.s^{-1}**

b.- La Viscosité Cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Unité **: m²/s** ***Dimension*** **: L^2T^{-1}**

Remarque **:**

ν **est généralement exprimée en Stokes (St) : 10^4 St = $1 m^2.s^{-1}$**

Valeurs Particulières **:**

- **Eau : υ_w = 1,14 x 10^{-6} $m^2.s^{-1}$**
- **Mercure : υ_{Hg} = 1,145 x 10^{-4} $m^2.s^{-1}$**

$$\upsilon = f\,(T\,°c)$$

Température , °C	υ_{eau} , m^2/s (x 10^{-6})
0	*1,790*
5	*1,520*
10	*1,310*
15	*1,140*
20	*1,010*
25	*0,897*
30	*0,804*
35	*0,724*
40	*0,661*
50	*0,556*
60	*0,477*
100	*0,296*

CE QU'IL FALLAIT RETENIR !

EAU

FLUIDES

DENSITES

- **MASSE**: $\rho = \dfrac{M}{V}$ — $\rho_{\omega} = 1000\ Kg / m^{3}$
- **POIDS**: $\gamma = \rho g$ — $\gamma_{\omega} = 9814\ N / m^{3}$
- **RELATIVE**: $D = \dfrac{\rho}{\rho_{\omega}}$ — $D_{\omega} = 1$

VISCOSITES

- **DYNAMIQUE**: $\mu = \dfrac{\tau}{\dfrac{du}{dy}}$ — $\mu_{\omega} = 1{,}14x10^{-3}\ Kgm^{-1}s^{-1}$
- **CINEMATIQUE**: $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ — $\upsilon_{\omega} = 1{,}14x10^{-6}\ m^{2} / s$

STATIQUE DES FLUIDES

Hydrostatique

II.1.- Notion de Pression

$$P = \frac{F}{S} = \frac{Force}{Surface}$$

Unité **: N/m^2 ou $kg.m^{-1}.s^{-2}$** ***Dimension*** **: $ML^{-1}T^{-2}$**

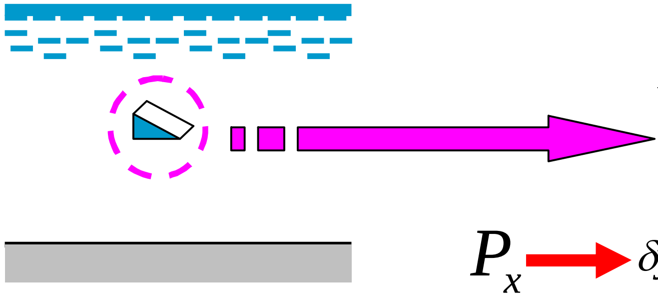
Remarque **: La pression peut aussi s'exprimer en :**

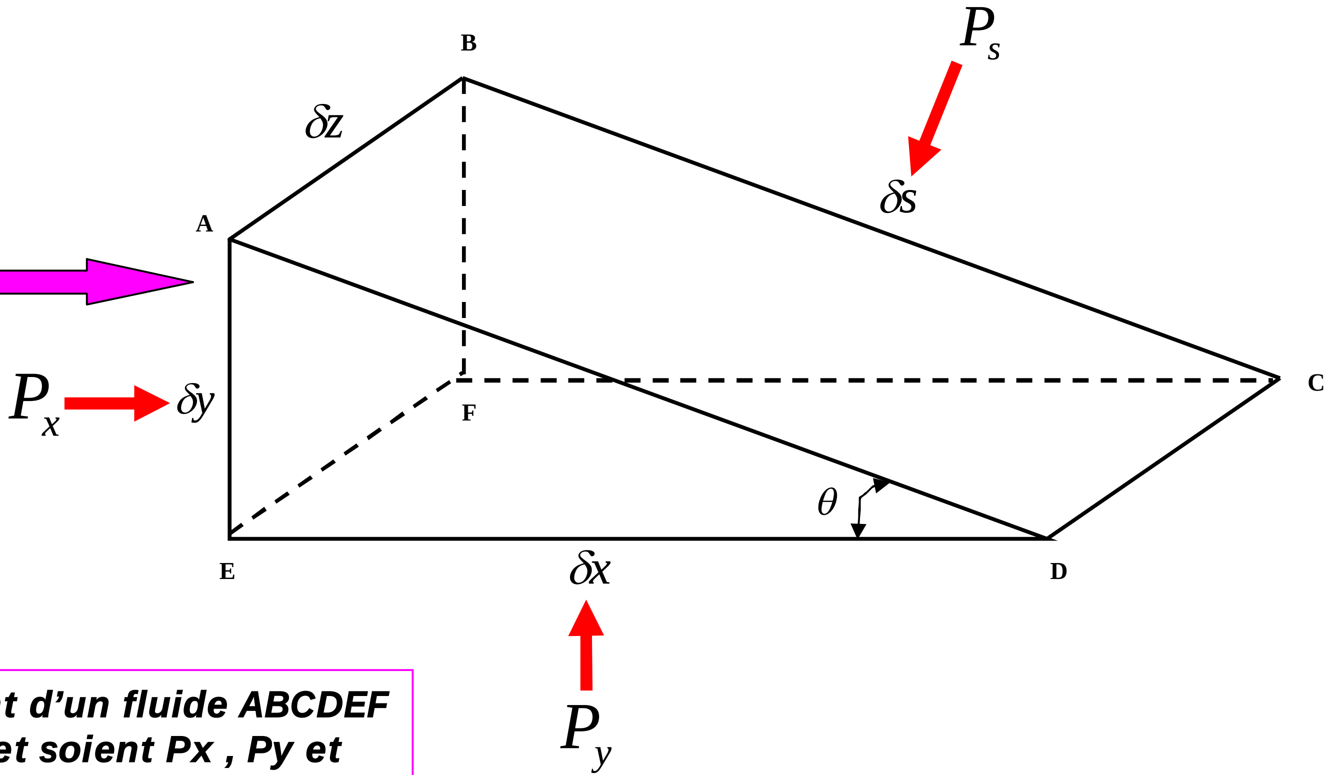
Pascal (Pa) : 1 Pa = 1 N/m^2

Bar (Bar) : 1 Bar = 10^5 N/m^2

II.2.- Loi de Pascal : Pression en un point d'un fluide

Blaise Pascal (1623-1662)





Considérons un élément d'un fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soient Px , Py et Ps les pressions dans les 3 directions x , y et s :

Etablissons la relation entre Px , Py et Ps !

*** Selon l'axe des x :**

- **Force due à P_x :** $F_{xx} = P_x.(ABFE) = P_x.\delta y \delta z$

- **Force due à P_y :** $F_{yx} = 0$

- **Composante due à P_s :** $F_{sx} = -P_s.(ABCD.\sin\theta) = -P_s.\delta s \delta z \dfrac{\delta y}{\delta s}$

car $\sin\theta = \dfrac{\delta y}{\delta s}$

donc : $F_{sx} = -P_s.\delta y \delta z$

et puisque le fluide est en équilibre : $\mathrm{F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0}$

d'où : $\mathrm{P_x}.\delta y \delta z - \mathrm{P_s}.\delta y \delta z = 0$

et donc : $\boxed{P_x = P_s}$

* Selon l'axe des y:

- Force due à P_x : $F_{xy} = 0$

- Force due à P_y : $F_{yy} = P_y.(CDEF) = P_y.\delta x \delta z$

- Composante due à P_s : $F_{sy} = -P_s.(ABCD.\cos\theta) = -P_s.\delta s \delta z \dfrac{\delta x}{\delta s}$

car $\cos\theta = \dfrac{\delta x}{\delta s}$

donc : $F_{sy} = -P_s.\delta x \delta z$

et puisque le fluide est en équilibre : $\mathrm{F}_{yy} + \mathrm{F}_{xy} + \mathrm{F}_{sy} = 0$

d'où : $\mathrm{P}_y.\delta x \delta z - \mathrm{P}_s.\delta x \delta z = 0$

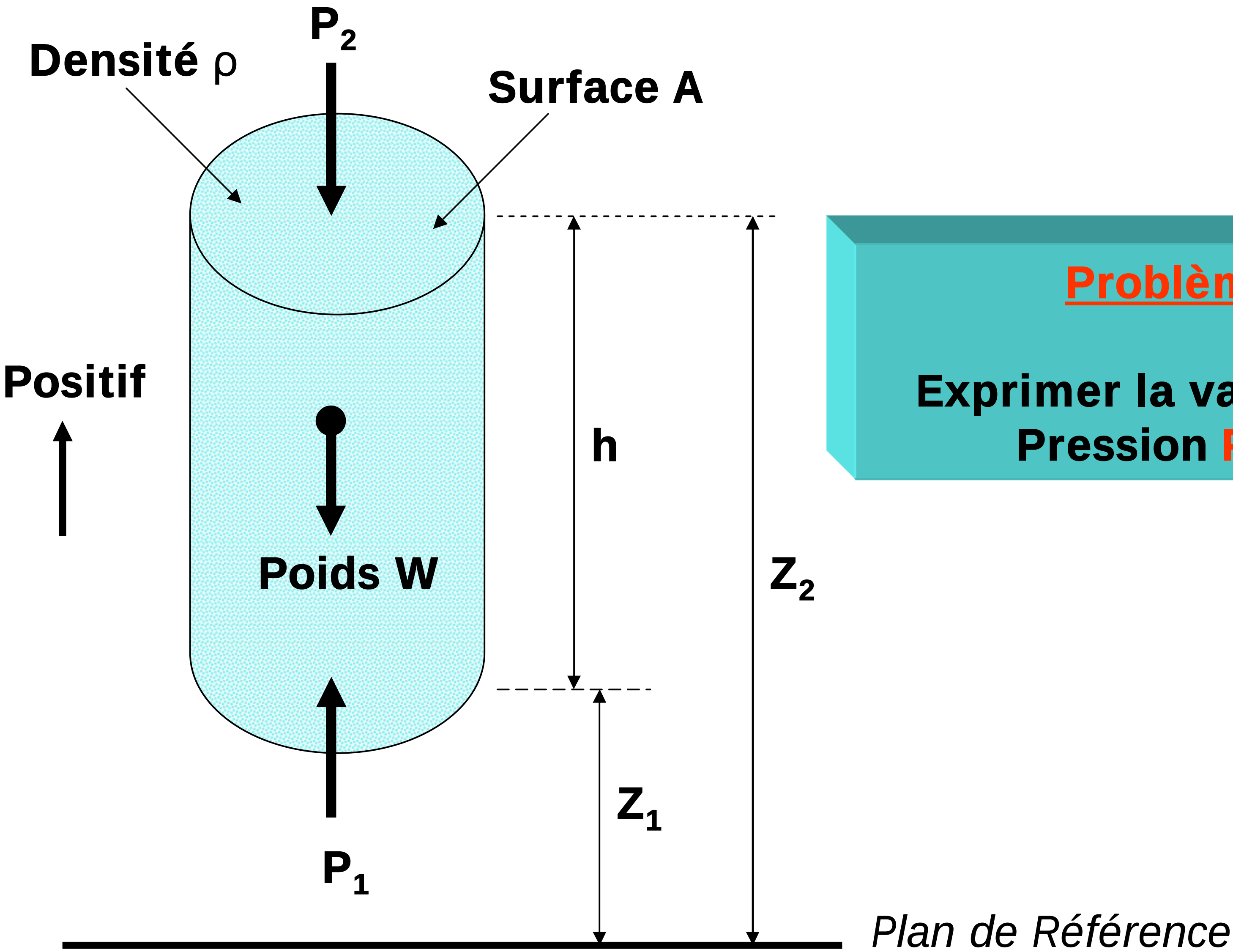
et donc : $\boxed{P_y = P_s}$

Conclusion : Loi de Pascal

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{P_x = P_s} \\ \boxed{P_y = P_s} \end{array}\right\} \quad \boxed{P_x = P_y = P_s}$$

La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions

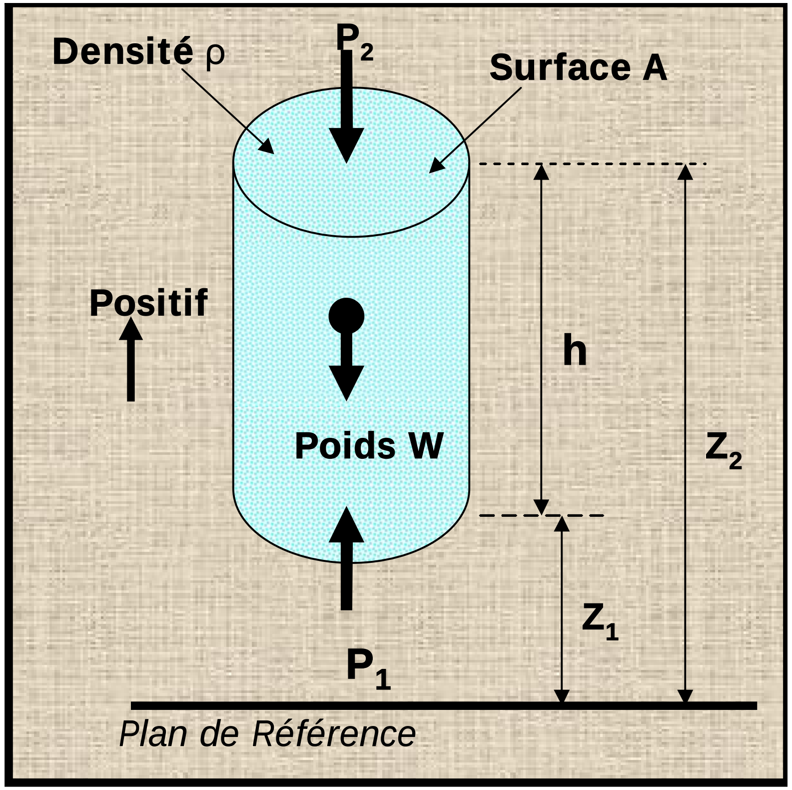
II.3.- Equation Fondamentale de l'Hydrostatique



Problème :

Exprimer la variation de Pression $P_1 - P_2$

Equation générale (fluide au repos)



$$\sum_{1}^{n} F_i = 0$$

1.- Force due à la pression P_1 :

$$P_1 = \frac{F_1}{A} \Rightarrow F_1 = P_1 A$$

2.- Force due à la pression P_2 :

$$P_2 = \frac{F_2}{A} \Rightarrow F_2 = P_2 A$$

3.- Poids du fluide :

$$W = \boxed{M g} = \boxed{\rho V g}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Volume de fluide : $V = Ah = A(Z_2 - Z_1)$

$$W = \rho A (Z_2 - Z_1) g$$

$$F_1 - F_2 - W = 0 \Longrightarrow P_1 \cancel{A} - P_2 \cancel{A} - \rho \cancel{A} (Z_2 - Z_1) g = 0$$

$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1) = \rho g h$$

Conclusions

1. Loi de la Statique des Fluides

$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1) \Rightarrow P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2$$

$$P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2 \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$\boxed{Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}}$$

**Sur un même plan horizontal (axe de référence OO') ,
le terme $Z+P/\rho g$ reste constant**

2. Variation de la pression

En posant Z_2-Z_1 = h et P_2 = P_0 , On aura :

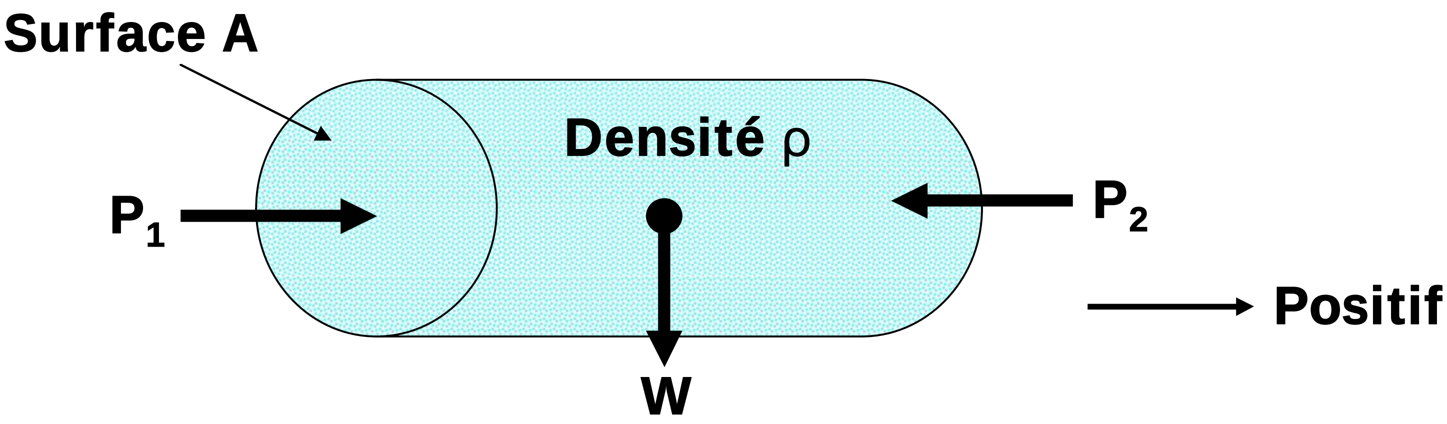
$$P_1 = P_0 + \rho g h$$

- **Et si P_0 = 0 :**

$$\boxed{P_1 = \rho g h}$$

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

3. Egalité des pressions sur un même plan horizontal

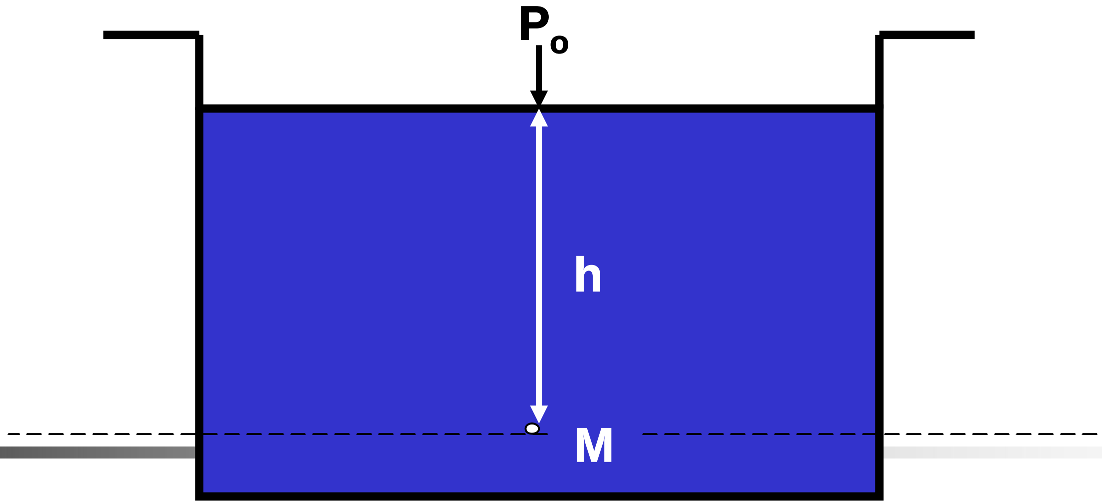


$$P_1A - P_2A + 0 = 0 \longrightarrow \boxed{P_1 = P_2}$$

(car la *composante du poids W selon l'horizontale est nulle)*

Sur un même plan horizontal , toutes les pressions sont égales
(Pressions Isobares)

4. Pression effective et Pression absolue



Au point M , la pression est égale à : $P_M = P_o + \rho g h$

A la surface libre du fluide , la pression est généralement représentée par la **pression atmosphérique P_{atm}** , d'où :

$$\boxed{P_M = P_{atm} + \rho g h}$$ **: Pression Absolue**

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique (Patm = 0) :

$$\boxed{P_M = \rho g h}$$ **: Pression Effective**

5. Charge et Hauteur piézomètriques

On a vu que : $$\boxed{Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}}$$

avec :

$Z[L]$: hauteur de position ou côte géométrique

$\frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur piézométrique

$Z + \frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur ou charge totale

6. Hauteur du vide

Dans certains cas , la pression absolue est inférieure à la pression atmosphérique :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h \langle P_{atm}$$

Il se crée alors une dépression dont la hauteur correspondante , appelée ‘’ ***Hauteur du Vide*** ‘’ , est égale à :

$$\boxed{h_{vide} = \frac{P_{atm} - P_{abs}}{\rho g}}$$

7. Signification énergétique de l'équation de la Statique des Fluides

On a vu que :

$$Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste} = E_p$$

Si l'on multiplie les 2 termes de cette équation par le **poids élémentaire mg** , on aura :

$$mgZ \ [Nm]$$ **: Energie potentielle de position**

$$mg\frac{P}{\rho g}[Nm]$$ **: Energie potentielle de pression**

$$mgE_p [Nm]$$ **: Energie potentielle totale**

II.4.- Dispositifs de mesure de la pression

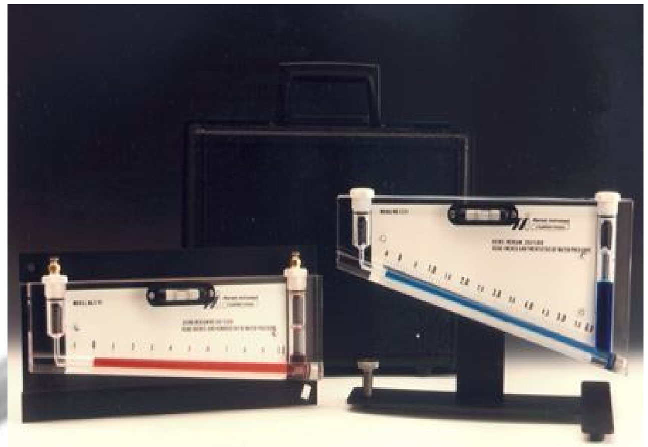
Le dispositif utilisé dépend de l'importance des pressions à mesurer .
Il existe 2 types de dispositifs de mesure des pressions :

- **Les tubes manométriques** : utilisés pour la mesure de pressions relativement faibles (... en laboratoires)

- **Les manomètres mécaniques** : utilisés pour la mesure de pressions relativement plus élevées (1 à 2 Kg/cm2)

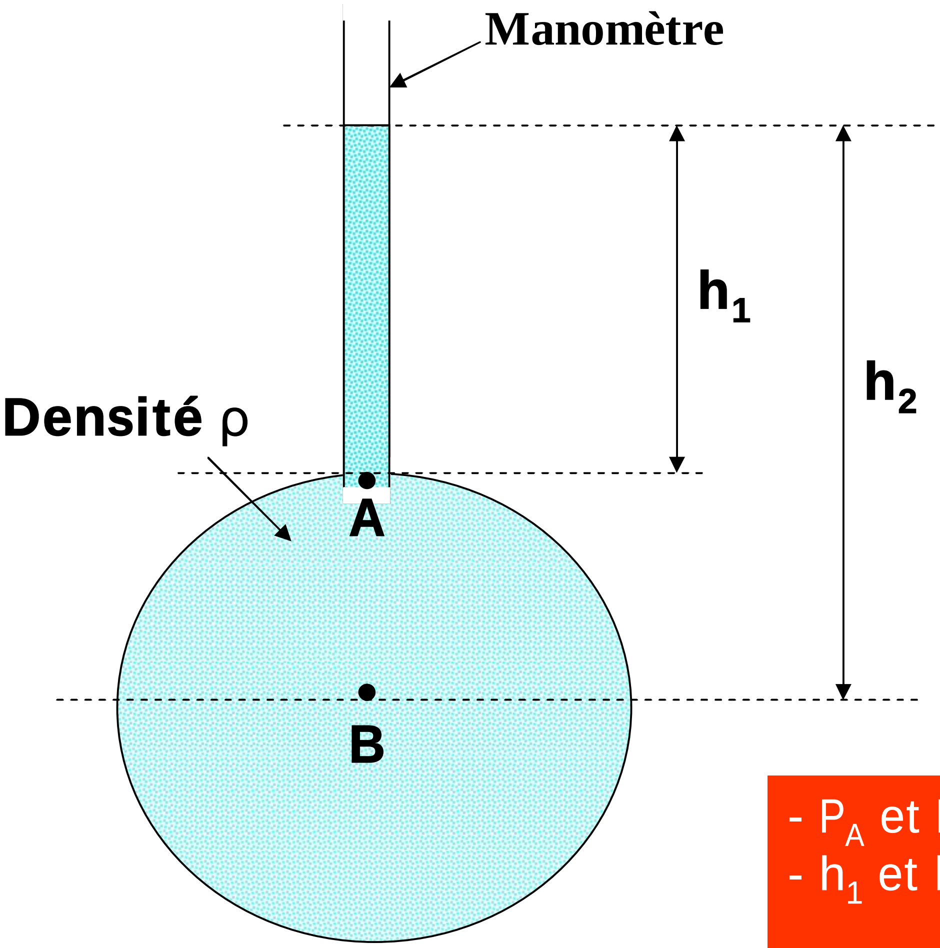
Tube Vertical

Tube en U



Tube Incliné

▪ Mesure des pressions par les tubes manométriques :



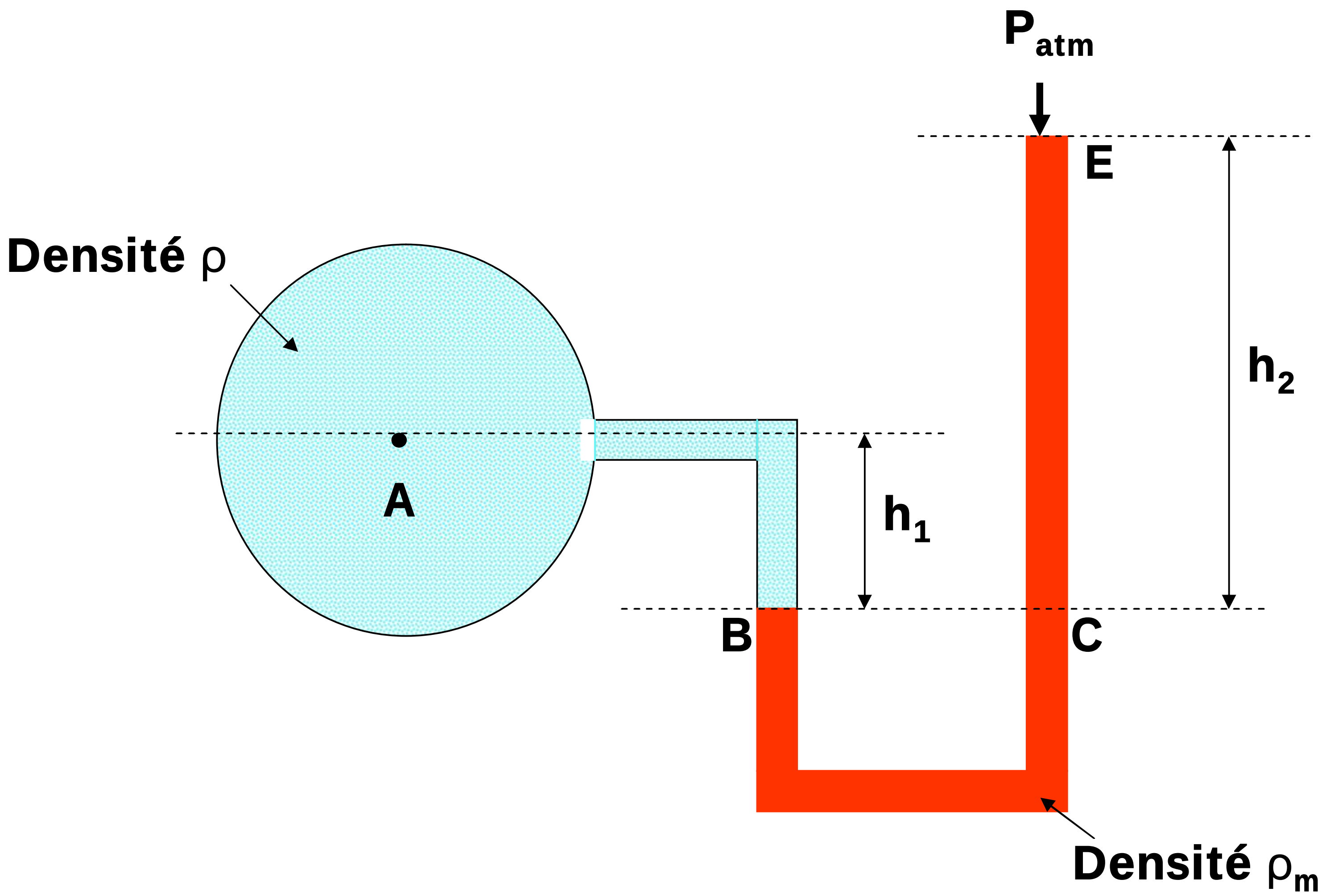
$$\boxed{P_A = \rho g h_1}$$

$$\boxed{P_B = \rho g h_2}$$

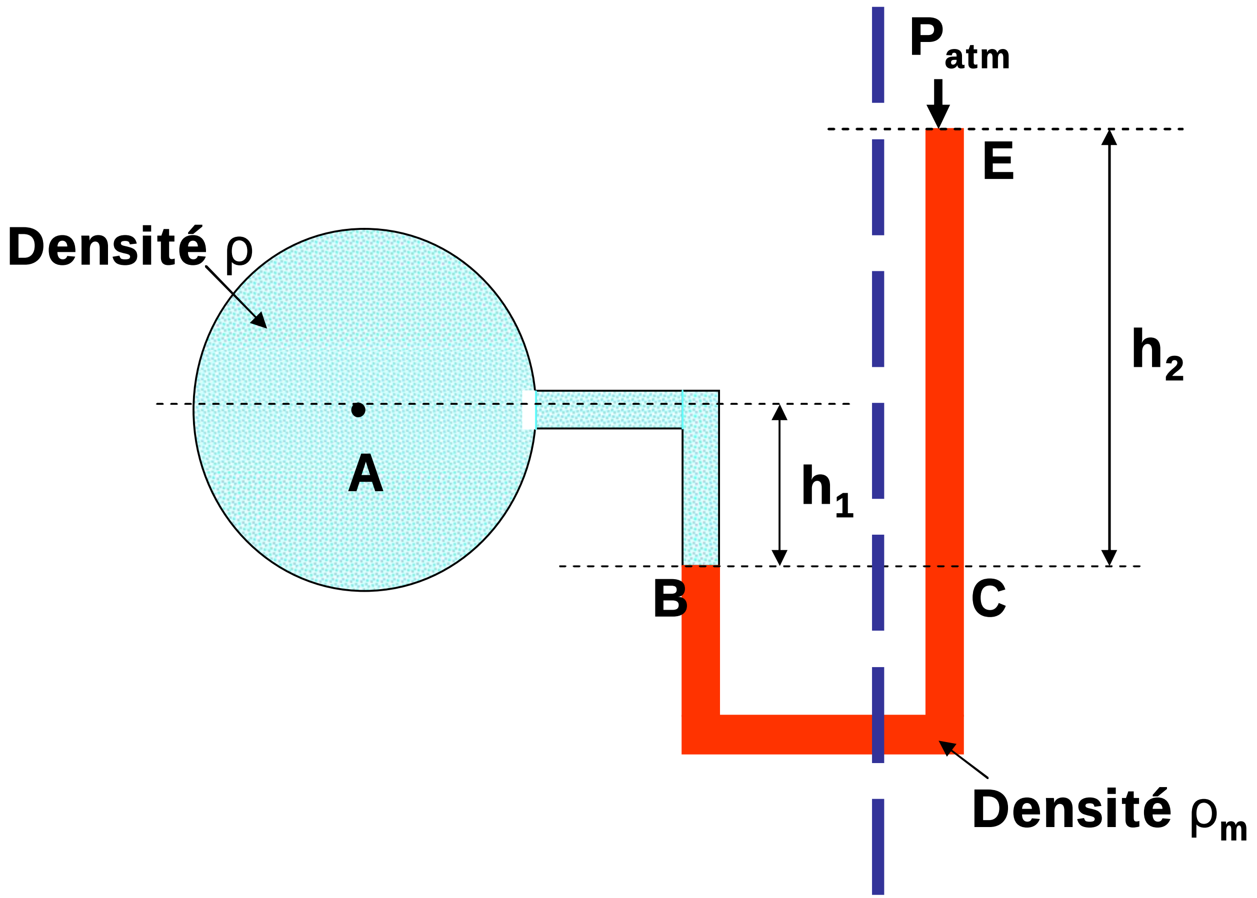
- P_A et P_B : ***Pressions Manométriques***
- h_1 et h_2 : ***Hauteurs Manométriques***

C'est un dispositif utilisé uniquement pour la mesure des pressions des Liquides et non les gaz

- Le tube manométrique en forme de “ ∪ “ :



D’après la loi de l’hydrostatique , on peut écrire que : $\boxed{P_B = P_C}$



- **Partie Gauche :** $P_B = P_A + \rho g h_1$

- **Partie Droite :** $P_C = P_E + \rho_m g h_2 = P_{atm} + \rho_m g h_2$

Et si on ne tient pas compte de P_{atm} : $P_C = \rho_m g h_2$

Conclusion :

$$P_B = P_C \longrightarrow P_A + \rho g h_1 = \rho_m g h_2$$

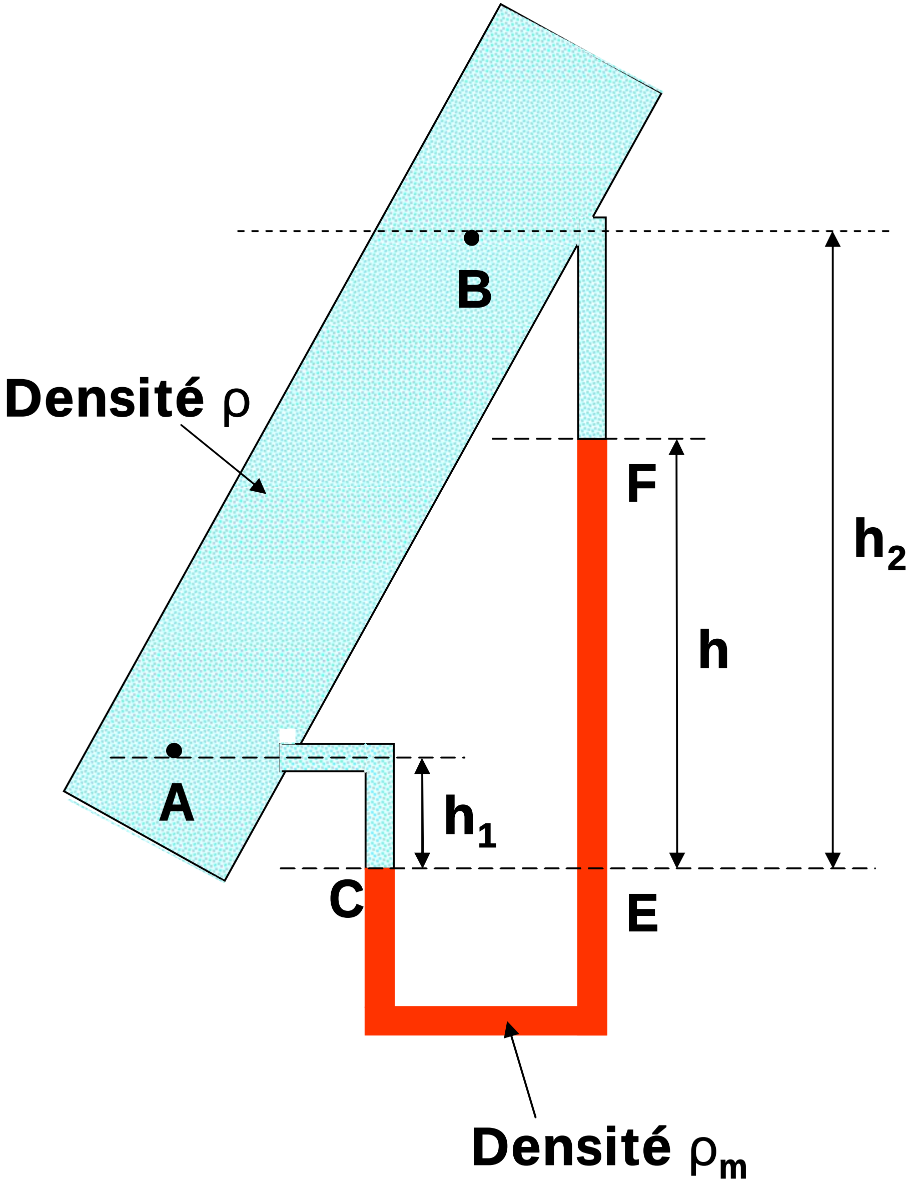
Et finalement : $\boxed{P_A = \rho_m g h_2 - \rho g h_1}$

***Remarque* :**

- Si le fluide de densité ρ est un gaz , sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique :

$$P_A = \rho_m g \left(h_2 - \underbrace{\frac{\rho}{\rho_m}}_{0} h_1 \right) \Rightarrow \boxed{\rho \langle\langle \rho_m \Rightarrow P_A = \rho_m g h_2}$$

- Mesure de la différence de pression par un manomètre en U :

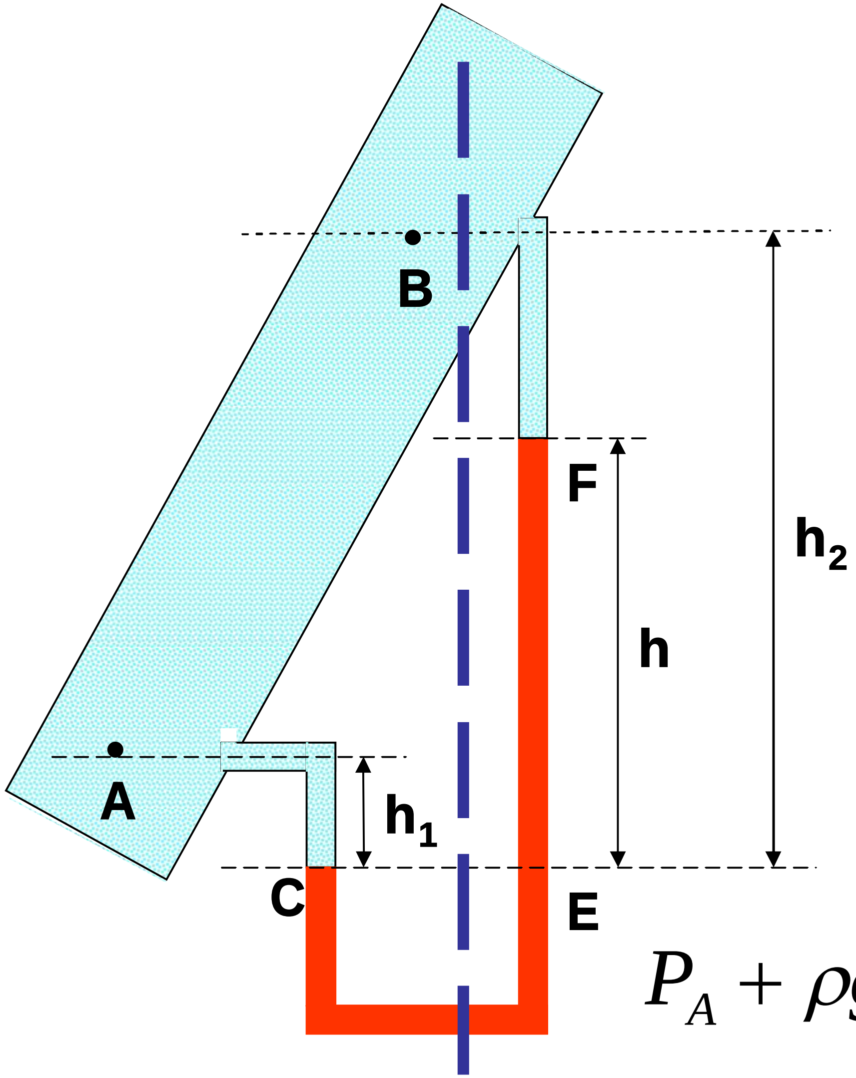


Problème :

Calcul de la différence de pression $P_A - P_B$

On peut écrire que :

$$P_C = P_E$$



- **Branche de Gauche** :

$$P_C = P_A + \rho g h_1$$

- **Branche de Droite** :

$$P_E = P_B + \rho g (h_2 - h) + \rho_m g h$$

et comme $$P_C = P_E$$

$$P_A + \rho g h_1 = P_B + \rho g (h_2 - h) + \rho_m g h$$

Et donc : $$\boxed{P_A - P_B = \rho g (h_2 - h_1) + (\rho_m - \rho) g h}$$

et si le fluide est un gaz ($\rho_m \gg \rho$ **) :** $$\boxed{P_A - P_B = \rho_m g h}$$

- Manomètre à Eau et manomètre à Mercure :

Les manomètres à eau sont utilisés pour mesurer des pressions relativement faibles car leur utilisation pour les fortes pressions conduirait à l'élaboration de tubes de dimensions trop exagérées. C'est pour cela, et compte tenu de sa densité élevée , que l'on préfère utiliser du Mercure comme liquide manométrique .

Illustration **:**

Quelle serait la hauteur manométrique nécessaire pour mesurer une pression **P = 120 KN/m²** :
a.- Dans le cas d'un manomètre à **eau**
b.- Dans le cas d'un manomètre à **Mercure**

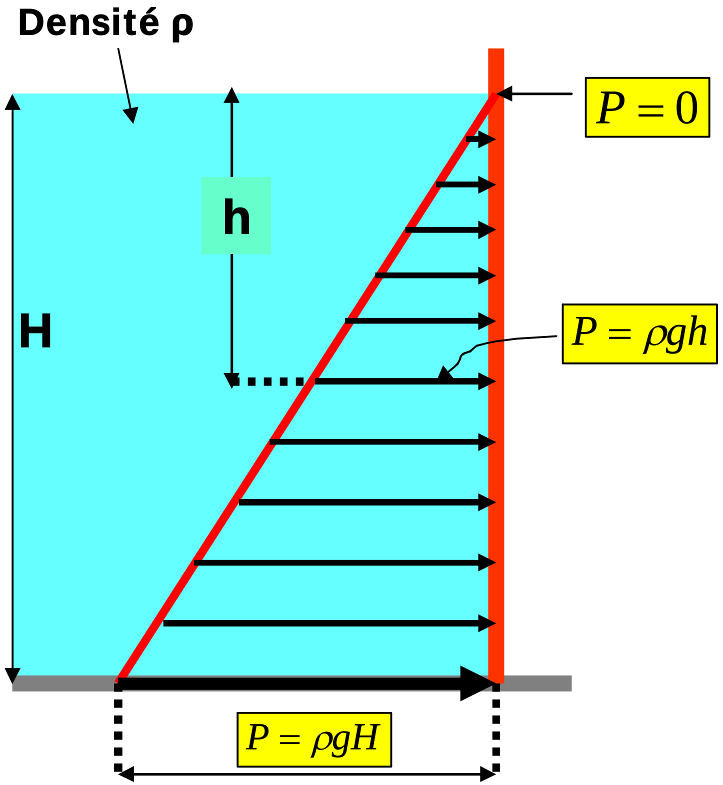
* Cas de l'Eau : $$P = \rho_w g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{120x10^3}{9{,}814x10^3} = 12{,}23m!$$

* Cas du Mercure : $$P = \rho_{Hg} g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_{Hg} g} = \frac{120x10^3}{9{,}814x13546} = 0{,}9m!$$

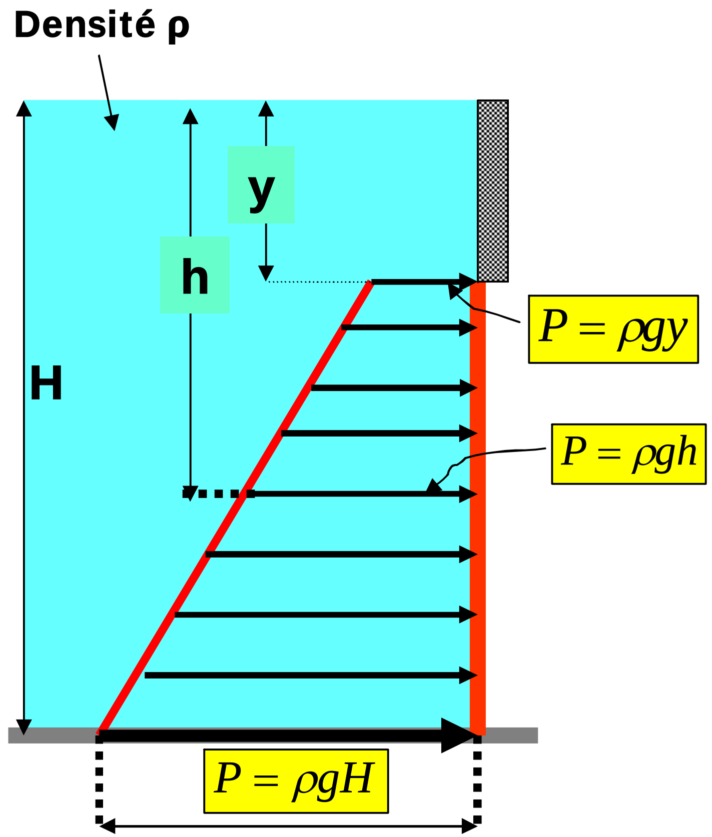
DIAGRAMME DES PRESSIONS

Il s'agit de tracer le graphique d'évolution de la pression sur une surface en tenant compte du fait que la pression varie linéairement avec la profondeur selon la loi

$$\boxed{P = \rho g h}$$



Surface non immergée

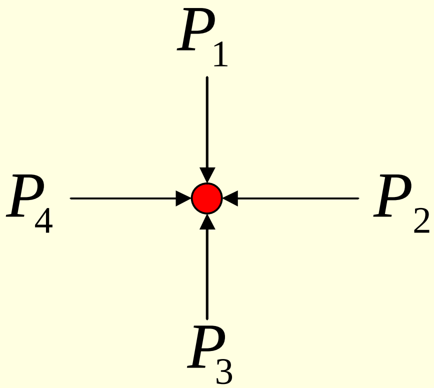


Surface immergée

CE QU'IL FALLAIT RETENIR !

$$P = \frac{F}{S} = \frac{Force}{Surface} \longrightarrow N / m^2 (Pa)$$

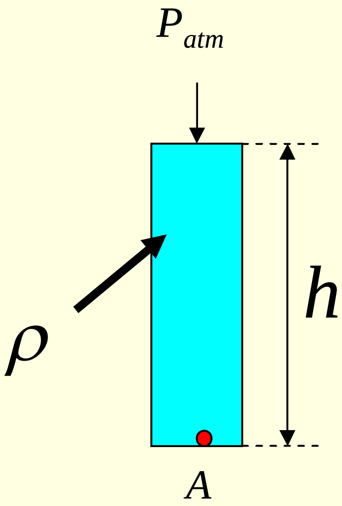
CE QU'IL FALLAIT RETENIR !



$$\boxed{P_1 = P_2 = P_3 = P_4}$$

Loi de Pascal

CE QU'IL FALLAIT RETENIR !



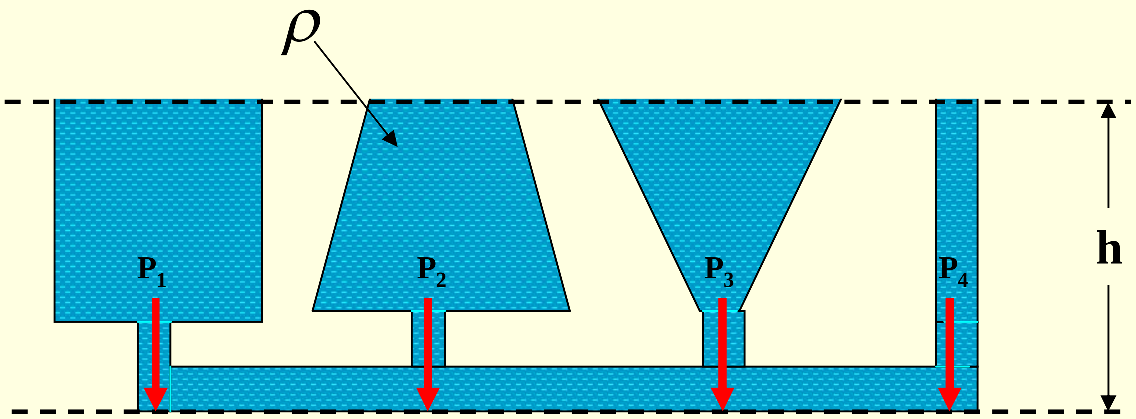
$$P_A = P_{atm} + \rho g h$$

Pression Absolue

$$P_A = \rho g h$$

Pression Effective

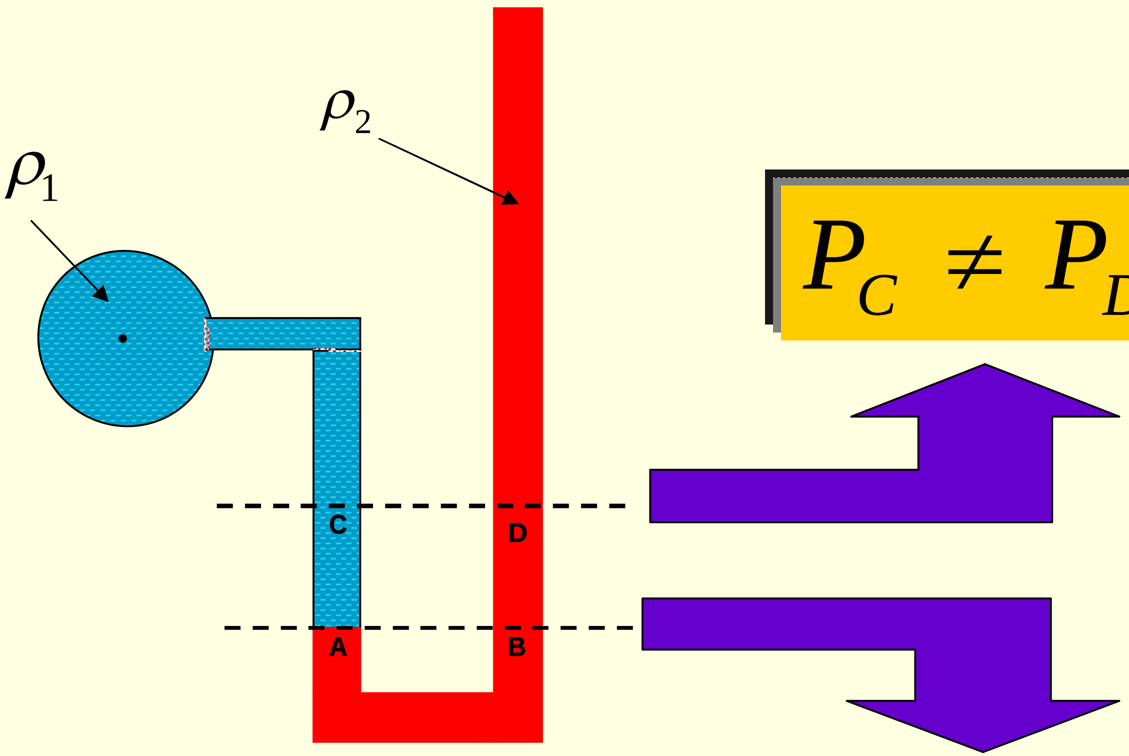
CE QU'IL FALLAIT RETENIR !



$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \rho g h$$

La pression dans un fluide ne dépend que de la profondeur et pas de la forme du récipient.

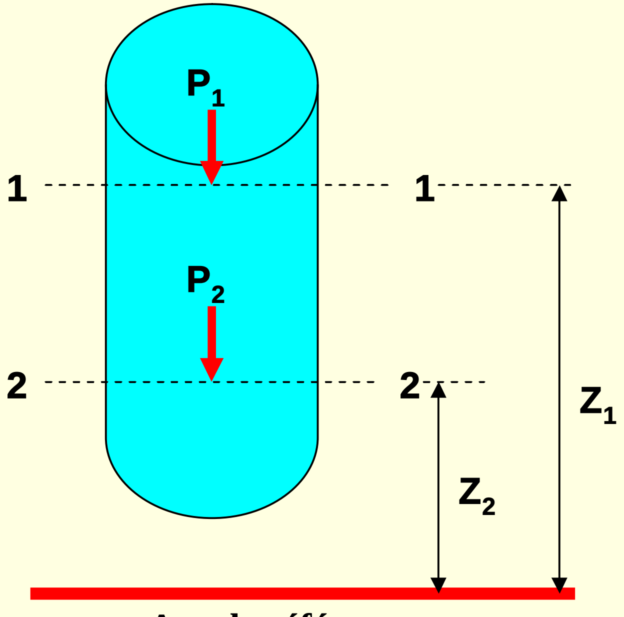
CE QU'IL FALLAIT RETENIR !



$$P_C \neq P_D$$

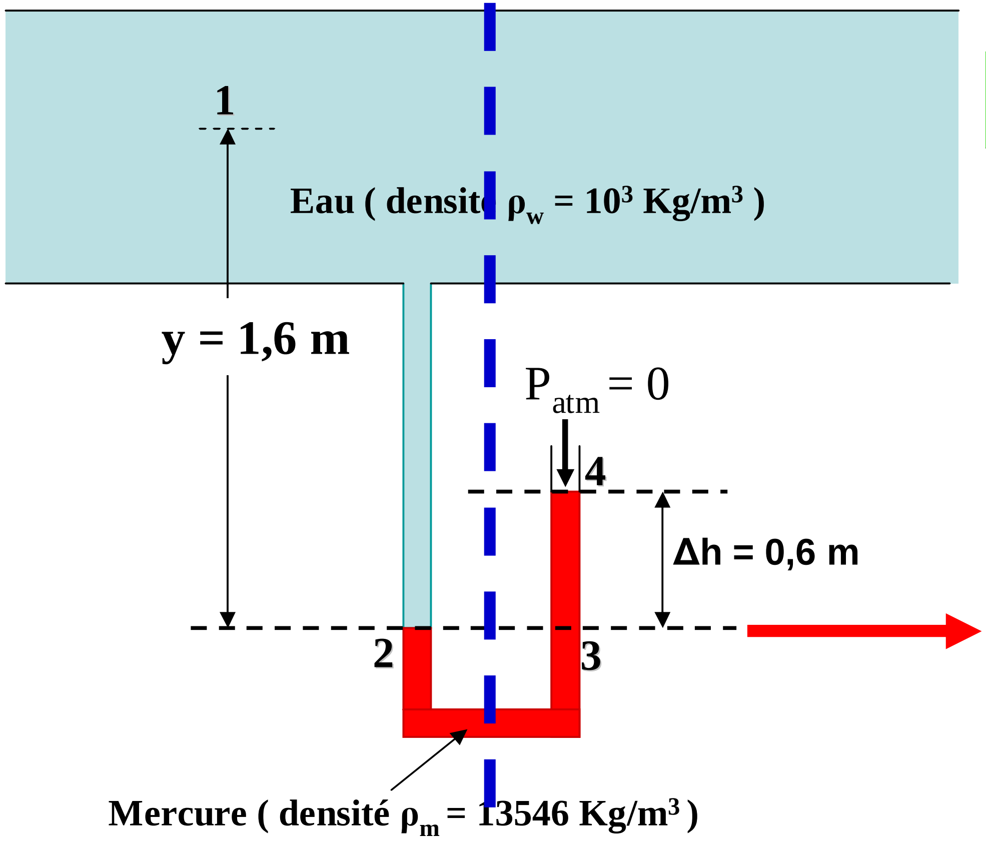
$$P_A = P_B$$

CE QU'IL FALLAIT RETENIR !



$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} = C^{ste}$$

EXERCICE 1



Calculer la Pression P_1

Rappel : règle à suivre

1.- *Ecrire l'équation de base du système*

2.- *Diviser le système en branches :*

3.- *Exprimer les pressions par branche*

4.- *Revenir à l'équation de base :*

$$P_2 = P_3$$

$$P_4 = P_{atm} = 0$$

Branche droite :

$$P_2 = P_1 + \rho_\omega g y$$

Branche gauche :

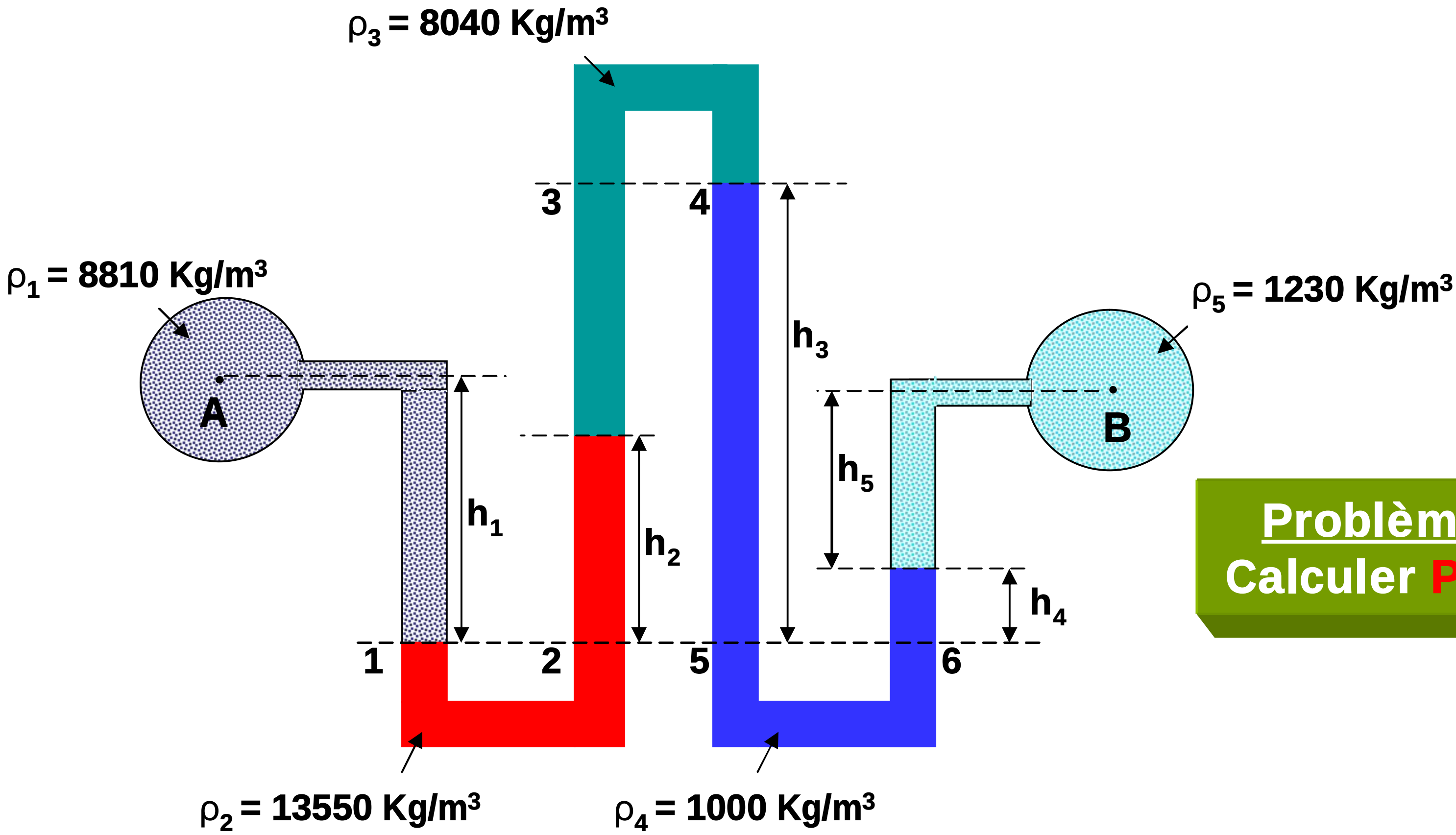
$$P_3 = \rho_m g \Delta h + P_4 = \rho_m g \Delta h$$

$$P_2 = P_3 \Rightarrow P_1 + \rho_\omega g y = \rho_m g \Delta h$$

$$P_1 = \rho_m g \Delta h - \rho_\omega g y = g(\rho_m \Delta h - \rho_\omega y)$$

$$\text{A.N.: } P_1 = 9{,}814(13546x0{,}6 - 1000x1{,}6) \approx 64062 N/m^2 \approx 64 KN/m^2 = 64 kPa$$

EXERCICE 2



Problème : Calculer P_A-P_B

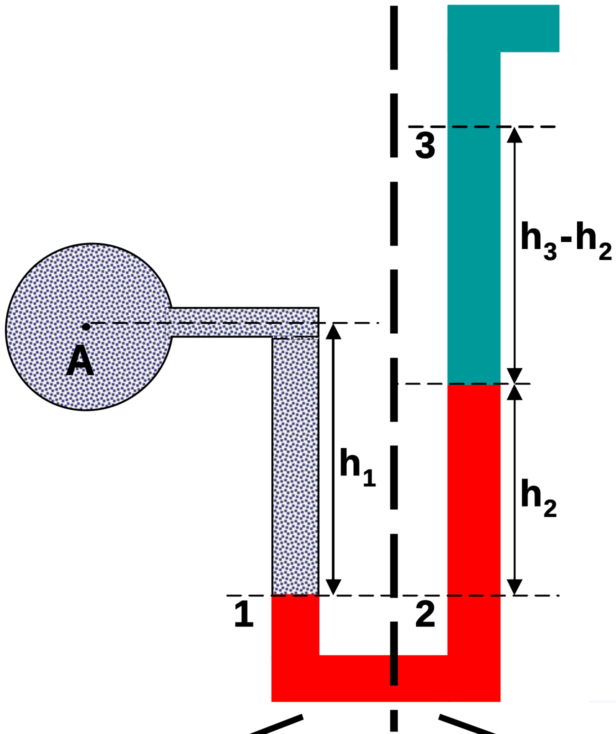
h_1=20 cm ; h_2=8 cm ; h_3=40 cm ; h_4=14 cm ; h_5=9 cm

Selon la loi de la statique des fluides , on peut écrire que :

$1. \rightarrow P_1 = P_2$

$2. \rightarrow P_3 = P_4$

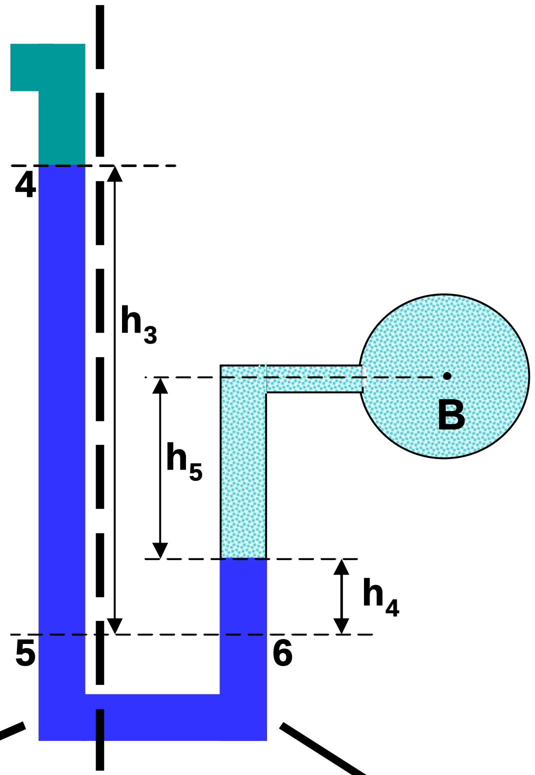
$3. \rightarrow P_5 = P_6$



$$P_1 = \rho_1 g h_1 + P_A \qquad P_2 = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) + P_3$$

$$\Rightarrow P_A + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) + P_3$$

$$\Rightarrow P_A = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) - \rho_1 g h_1 + P_3$$



$$P_5 = \rho_4 g h_3 + P_4$$

$$P_6 = \rho_4 g h_4 + \rho_5 g h_5 + P_B$$

$$\Rightarrow \rho_4 g h_4 + \rho_5 g h_5 + P_B = P_4 + \rho_4 g h_3$$

$$\Rightarrow P_B = \rho_4 g h_3 - \rho_4 g h_4 - \rho_5 g h_5 + P_4$$

$$P_B = \rho_4 g (h_3 - h_4) - \rho_5 g h_5 + P_4$$

Nous avons donc : $$P_A = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) - \rho_1 g h_1 + P_3$$

$$P_B = \rho_4 g\left(h_3 - h_4\right) - \rho_5 g h_5 + P_4$$

d'où : $$P_A - P_B = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) - \rho_1 g h_1 + \cancel{P_3} - \rho_4 g\left(h_3 - h_4\right) + \rho_5 g h_5 - \cancel{P_4}$$

et comme $P_3 = P_4$ On aura donc :

$$\boxed{P_A - P_B = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g\left(h_3 - h_2\right) - \rho_1 g h_1 - \rho_4 g\left(h_3 - h_4\right) + \rho_5 g h_5}$$

ou bien $$\boxed{P_A - P_B = g\left[\left(\rho_2 - \rho_3\right)h_2 + \left(\rho_3 - \rho_4\right)h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5 - \rho_1 h_1\right]}$$

Application numérique :

Uniformisation unités : h_1=0,20m ; h_2=0,08m ; h_3=0,40m ; h_4=0,14m ; h_5=0,09m

$$P_A - P_B = 9{,}814x\left[\left(13550 - 8040\right)x0{,}08 + \left(8040 - 1000\right)x0{,}4 + 1000x0{,}14 + 1230x0{,}09 - 8810x0{,}2\right]$$

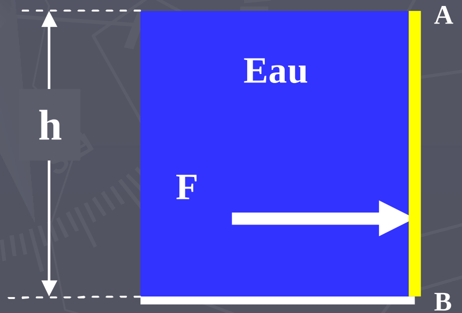
Ce qui donne :

$$\boxed{P_A - P_B \approx 17130\ N/m^2 \approx 17{,}1KN/m^2 = 17{,}1kPa}$$

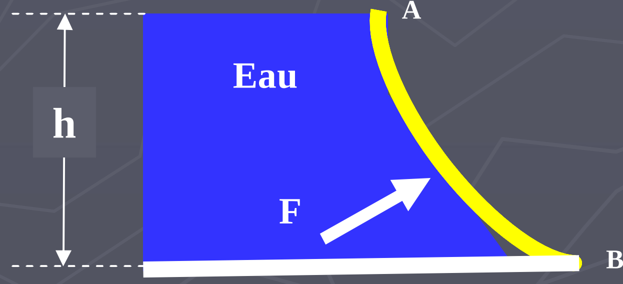
$$P = \frac{F}{S} = \frac{Force}{Surface}$$

$$F = P \times S$$

Surface Plane

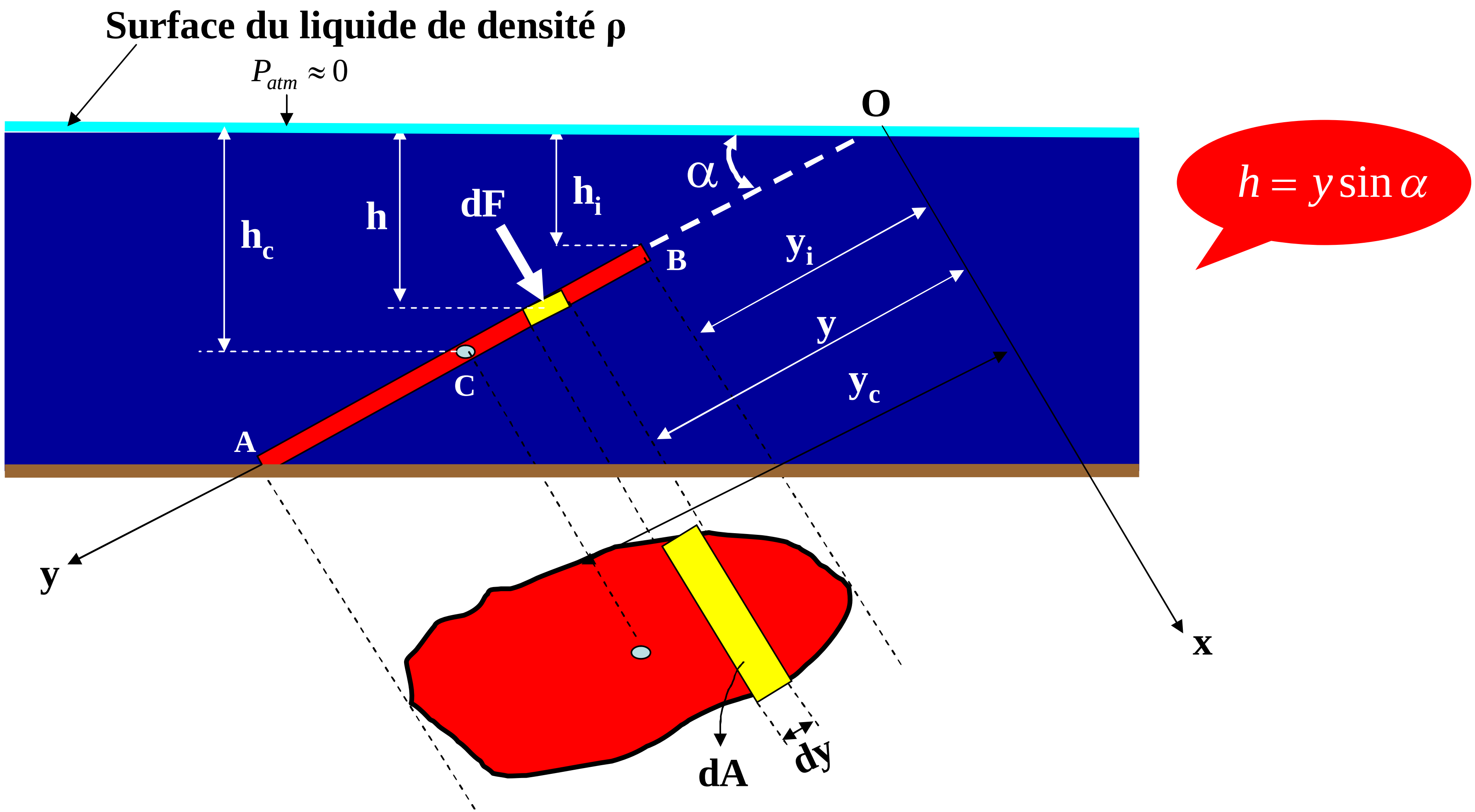


Surface Courbe



1.- Cas des Surfaces Planes

Cas des surfaces immergées inclinées



<u>Problème</u> : Exprimer la Force de pression résultante F agissant sur la surface AB ainsi que la profondeur de son centre d'application .

Expression de la Force de pression

$$dF = PdA = \rho g h dA \longrightarrow F = \int_{AB} dF = \int_{AB} \rho g h dA = \rho g \int_{AB} h dA$$

$$h = y \sin \alpha \Rightarrow F = \rho g \sin \alpha \int_{AB} y dA$$

'' *Moment Statique* '' **de la surface AB par rapport à Ox**

$$\int_{AB} y dA = y_c A$$

Ordonnée du centre de gravité de la surface AB

$$\longrightarrow F = \rho g \sin \alpha y_c A = \rho g y_c \sin \alpha A$$

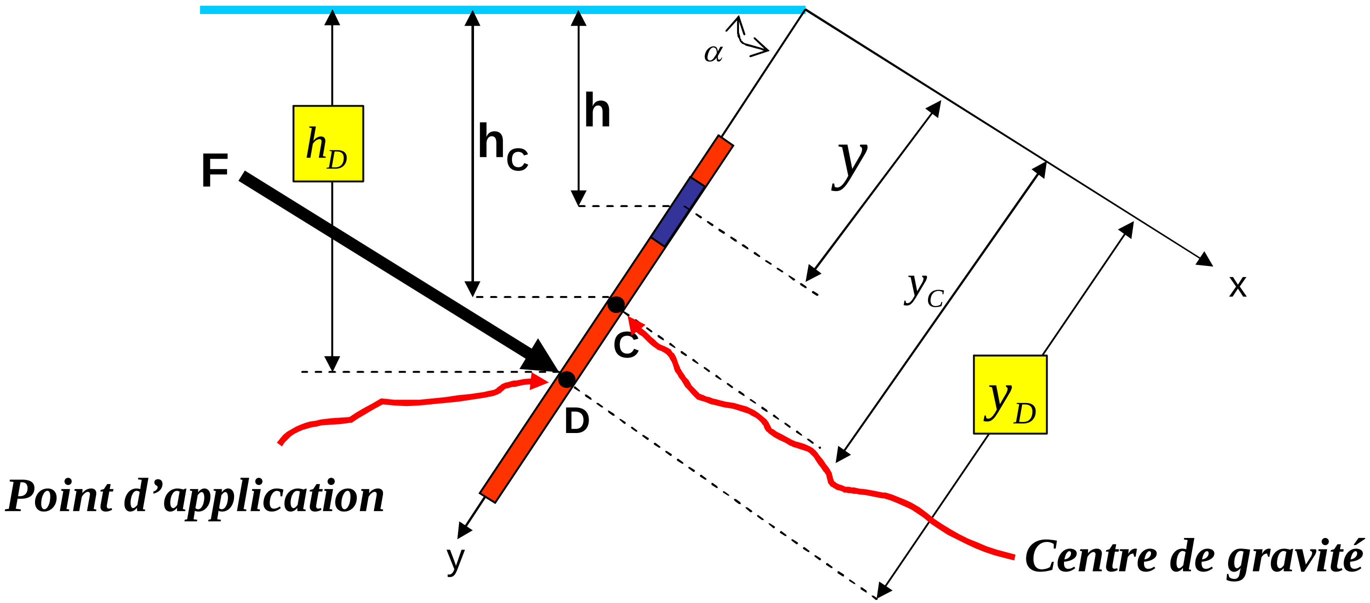
h_c : Profondeur du centre de gravité de AB

$$\Rightarrow \boxed{F = \rho g h_c A}$$

Eau ($\rho = \rho_\omega$)

$$\boxed{F = \rho_w g h_c A}$$

Position du point d'application de la force de pression



Pour déterminer h_D , la profondeur du point d'application de la force résultante F , il suffit d'utiliser le principe des moments : '' *Le moment , par rapport au point O , de la force résultante est égal à la somme des moments élémentaires* '' : $\mathrm{M}_o F = \sum_{AB} \mathrm{M}_i$

avec : $$\mathrm{M}_o F = F.y_D = \rho g h_c A y_D = \rho g y_D y_c \sin\alpha A$$

et $$\sum_{AB} \mathrm{M}_i = \int_{AB} y dF = \int_{AB} y \rho g y \sin\alpha dA = \int_{AB} \rho g y^2 \sin\alpha dA = \rho g \sin\alpha \int_{AB} y^2 dA$$?

le terme $\boxed{\int_{AB} y^2 dA}$ représente le '' ***Moment d'Inertie*** '' de la surface AB par rapport à l'axe Ox = **Iox**

On aura donc : $\boxed{M_o F = \rho g y_D y_c \sin\alpha . A}$ et $\boxed{\sum_{AB} M_i = \rho g \sin\alpha . I_{OX}}$

et $M_o F = \sum_{AB} M_i \Rightarrow \rho g y_D y_C \sin\alpha . A = \rho g \sin\alpha . I_{ox}$

Et donc :

$$\boxed{y_D = \frac{I_{ox}}{y_c A}}$$

Remarque : Utilisation du théorème de Huygens : $\boxed{I_{ox} = I_{cc} + y_c{}^2 A}$

avec **I_{cc}** : Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son **centre de gravité C .**

La formule précédente devient alors :

$$\boxed{y_D = \frac{I_{cc} + y_c{}^2 A}{y_c A} = y_c + \frac{I_{cc}}{y_c A}}$$

ou bien selon la verticale

$$\boxed{h_D = h_c + \frac{I'_{cc}}{h_c A'}}$$

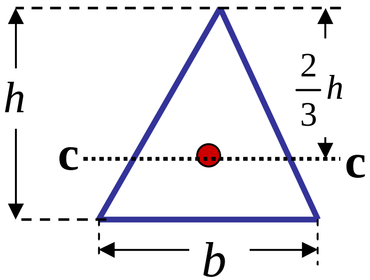
avec : - **A'** : Projection verticale de la surface AB

- **I'_{cc}** : Moment d'inertie de la surface A' par rapport à l'axe passant par son centre de gravité .

Conclusion : Le point d'application de la résultante F se trouve toujours ***plus bas*** que le centre de gravité d'une distance égale à :

$$\Delta h = h_D - h_C = \frac{I'_{cc}}{h_c A'}$$

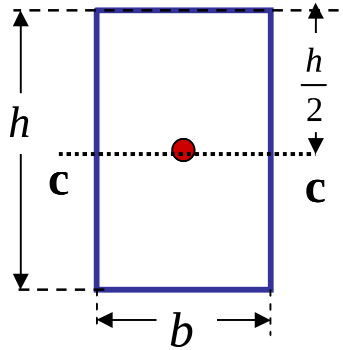
SURFACE ET MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES FIGURES PARTICULIERES



Triangle

$$A = \frac{bh}{2}$$

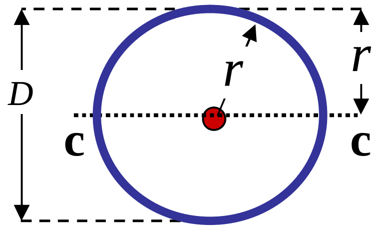
$$I_{cc} = \frac{bh^3}{36}$$



Rectangle

$$A = bh$$

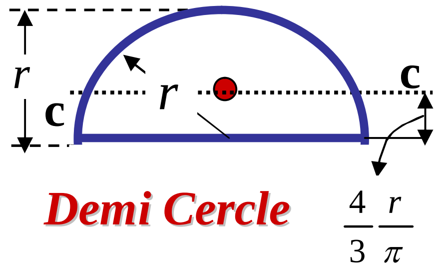
$$I_{cc} = \frac{bh^3}{12}$$



Cercle

$$A = \pi r^2 = \pi \frac{D^2}{4}$$

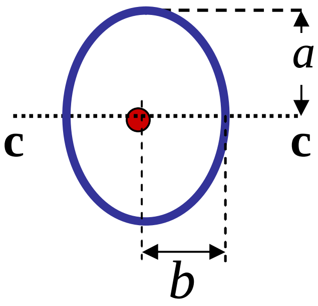
$$I_{cc} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$



Demi Cercle

$$A = \pi \frac{r^2}{2} = \pi \frac{D^2}{8}$$

$$I_{cc} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi D^4}{128}$$

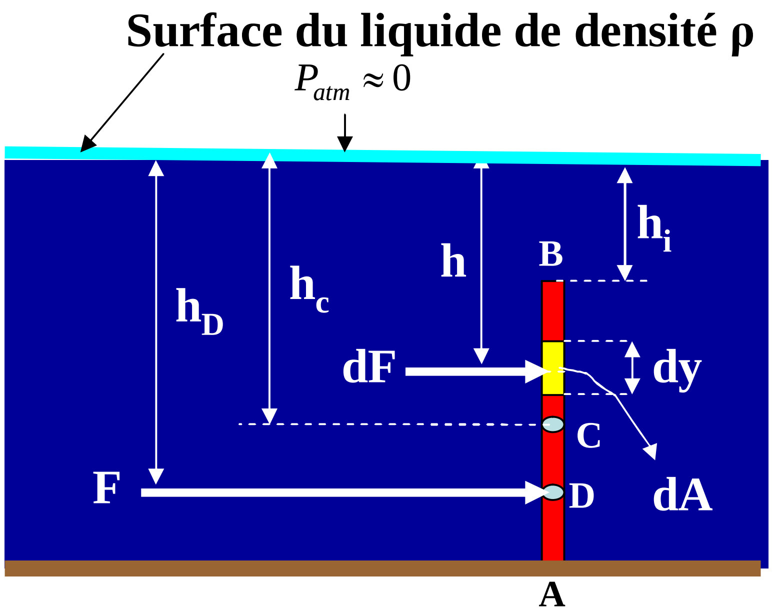


Ellipse

$$A = \pi ab$$

$$I_{cc} = \frac{\pi a^4 b}{4}$$

Cas des surfaces immergées verticales

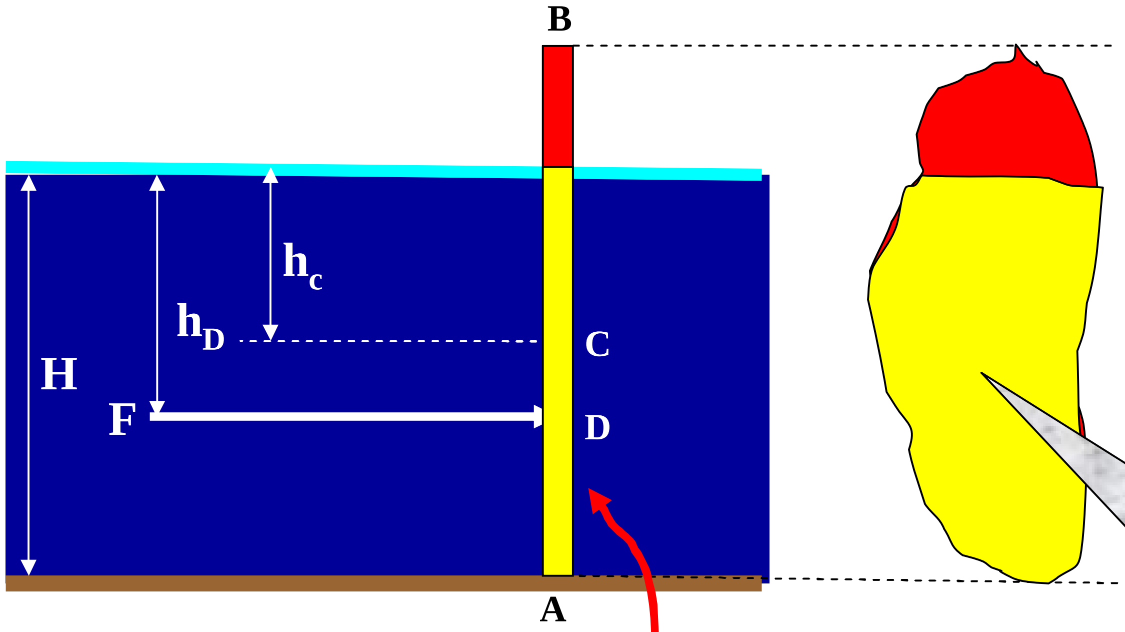


Même raisonnement que pour la surface Inclinée mais avec : $\alpha = 90° \Rightarrow \sin\alpha = 1$

$$F = \rho g h_c A$$

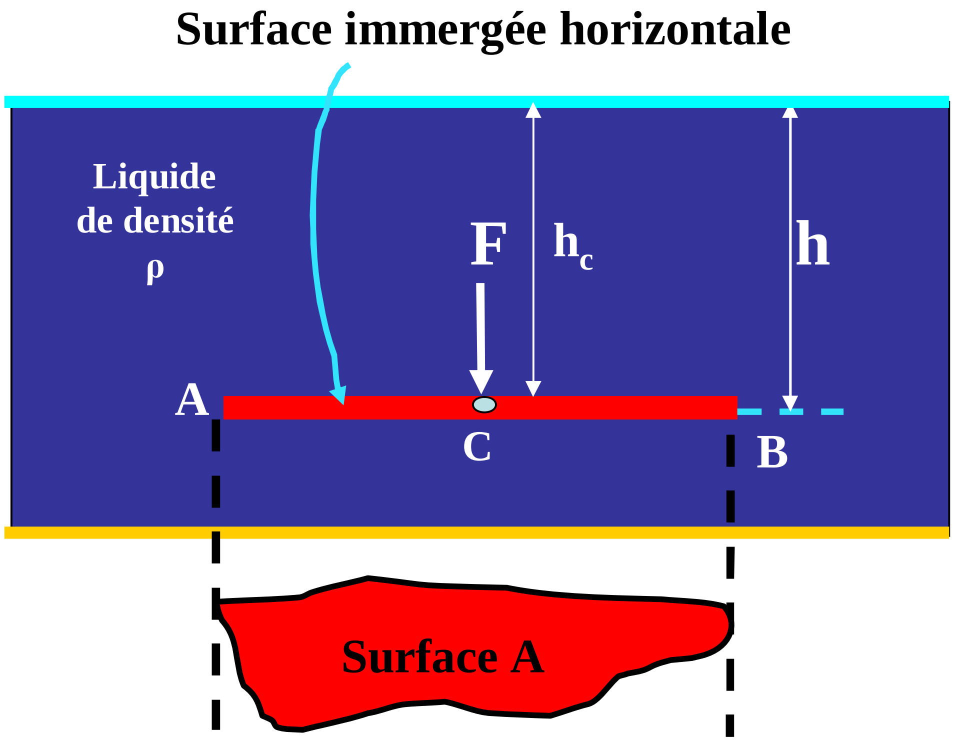
$$h_D = h_c + \frac{I_{cc}}{h_c A}$$

Cas des surfaces partiellement immergées



$$F = \rho g h_c A$$

Attention !!!
Seule la surface ''mouillée'' est prise en compte



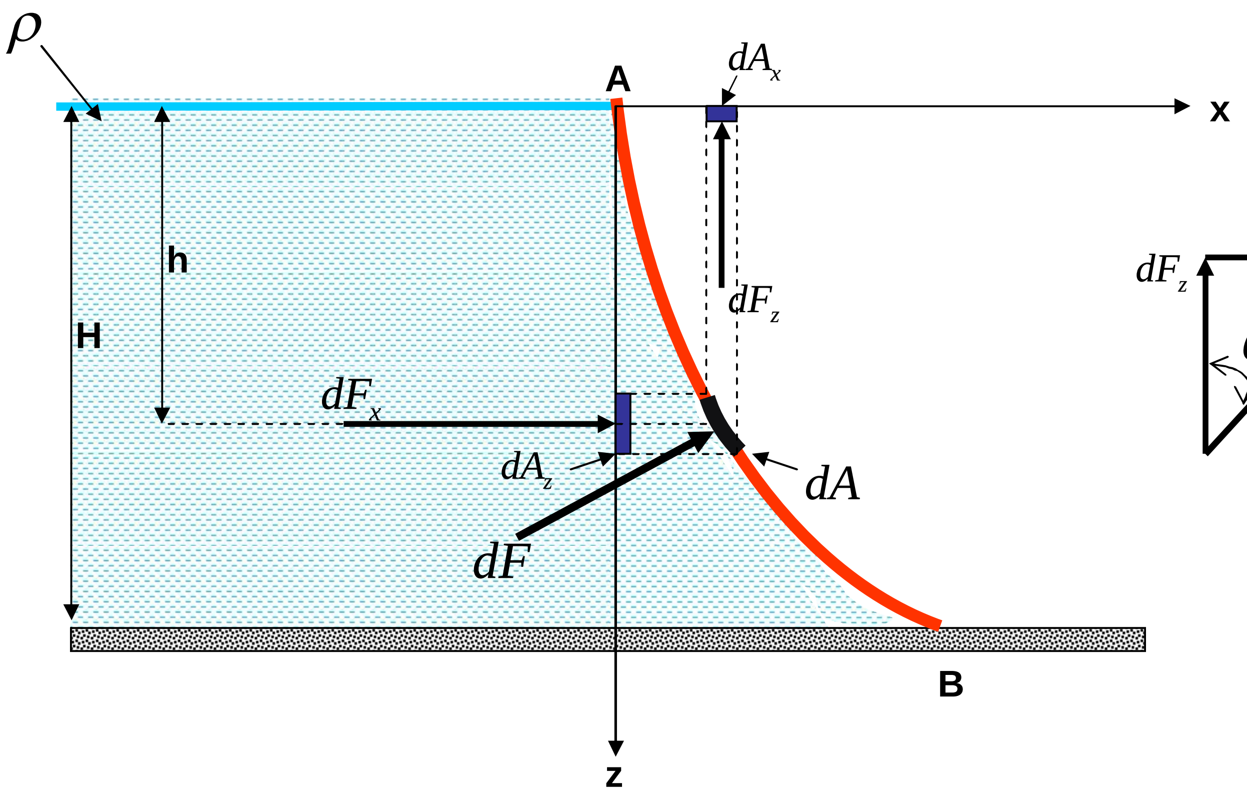
Cas particulier des Surfaces immergées horizontales

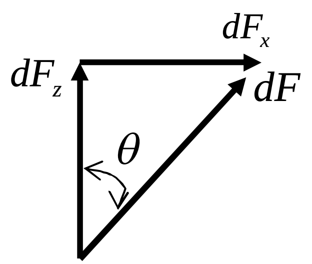
1.- <u>Force F</u> : $F = \rho g h_c A$ **avec** $h_c = h$ $\longrightarrow$ $\boxed{F = \rho g h A}$

2.- <u>Profondeur du point d'application</u> : $\boxed{h_D = h_c = h}$

2.- Cas des Surfaces Courbes

Expression de la force de pression





dF → Composante horizontale $dF_x = dF \sin\theta$

dF → Composante verticale $dF_z = dF \cos\theta$

1.- Composante horizontale

$$dF_x = dF.\sin\theta = \rho g h dA \sin\theta = \rho g h dA_z \qquad \text{car} \qquad dA\sin\theta = dA_z$$

d'où : $$\int dF_x = F_H = \rho g \int_{Az} h dA_z = \rho g h_c A_z$$

$$\rightarrow \boxed{F_H = \rho g h_c A_z}$$

avec : **Az** : Projection **verticale** de la surface courbe AB

h_c : Profondeur du centre de gravité de A_z

CONCLUSION :

*Le calcul de la composante horizontale F_H est ramené au calcul d'une force de pression sur une **surface plane verticale** .*

2.- **Composante verticale**

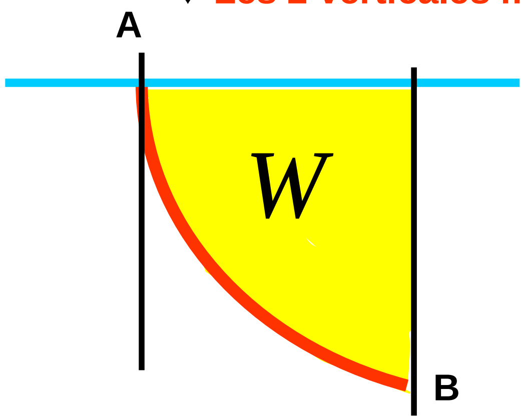
$$dF_z = dF.\cos\theta = \rho g h dA \cos\theta = \rho g h dA_x \qquad \text{car} \qquad dA\cos\theta = dA_x$$

d'où : $\int dF_z = F_v = \rho g \int_{Ax} h dA_x = \rho g \int_W dW = \rho g W$

$$\rightarrow \boxed{F_v = \rho g W}$$

Avec **W** : Volume délimité par :

- ♦ **La surface courbe AB**
- ♦ **La surface libre du fluide**
- ♦ **Les 2 verticales menées des 2 extrémités A et B de la surface .**



CONCLUSION : Le calcul de la composante verticale F_V se résume donc au calcul *du* ***Poids du fluide*** *représenté par le volume déplacé par la surface AB .*

Calcul de la Force de pression résultante

Le calcul des 2 composantes F_H et F_V permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression :

$$F = \sqrt{{F_H}^2 + {F_V}^2}$$

♦ Position du point d'application de la Force de Pression :

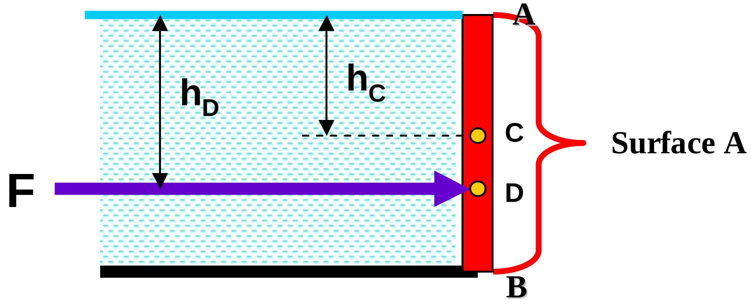
Le point d'application de la résultante F est obtenu si l'on connaît les composantes F_H et F_V .
Dans le cas général , il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force F (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

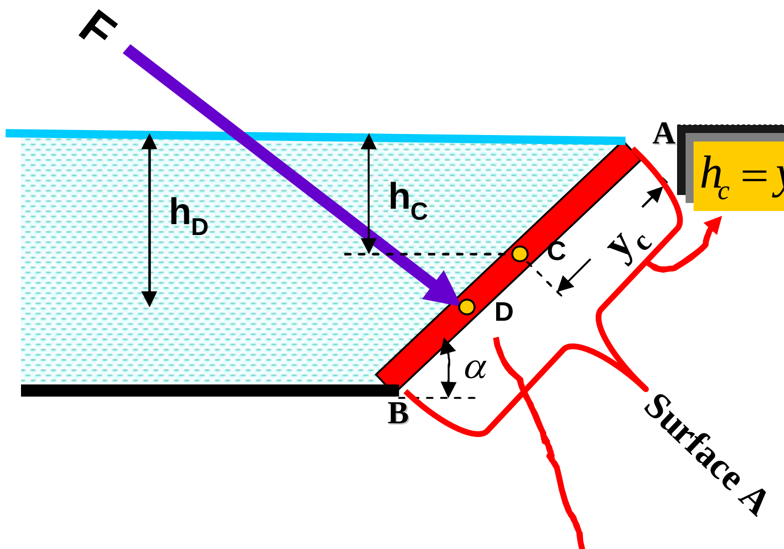
$$\theta = arctg \frac{F_v}{F_H}$$

CE QU'IL FALLAIT RETENIR

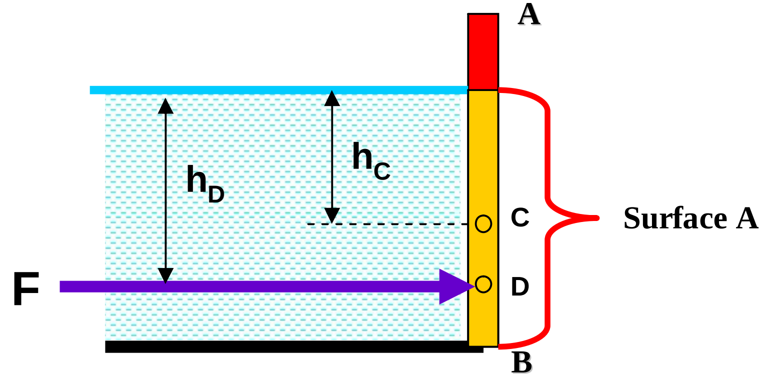
1.- force de pression sur surface plane :

$$F = \rho g \boxed{h_c} \boxed{A}$$





$$h_c = y_c \sin\alpha$$



- Profondeur du point d'application de la force de pression

$$h_D = h_c + \frac{I_{cc}}{h_c A}$$

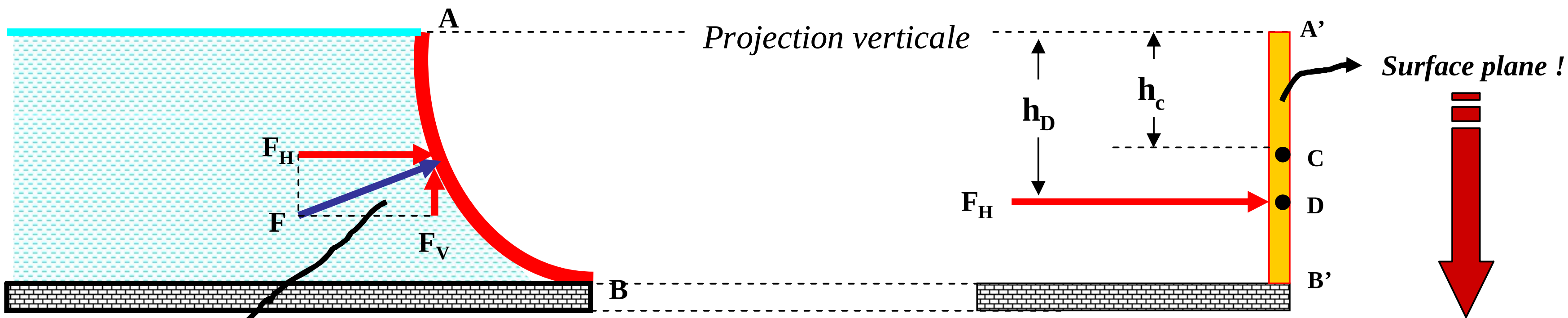
$$y_D = y_c + \frac{I_{cc}}{y_c A}$$

Et puis

$$h_D = y_D \sin\alpha$$

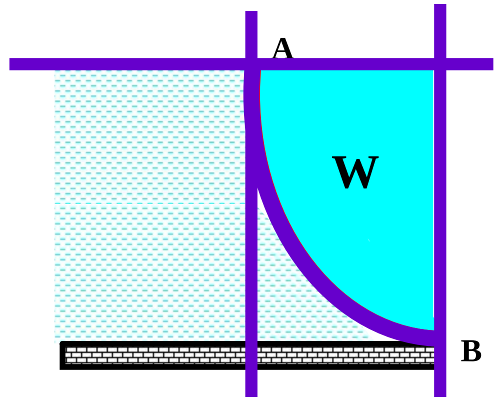
CE QU'IL FALLAIT RETENIR

2.- force de pression sur surface courbe :



$$F = \sqrt{F_H^{\,2} + F_V^{\,2}}$$

$$F_H = \rho g h_c A$$



$$F_v = \rho g \boxed{W}$$

Règle de délimitation

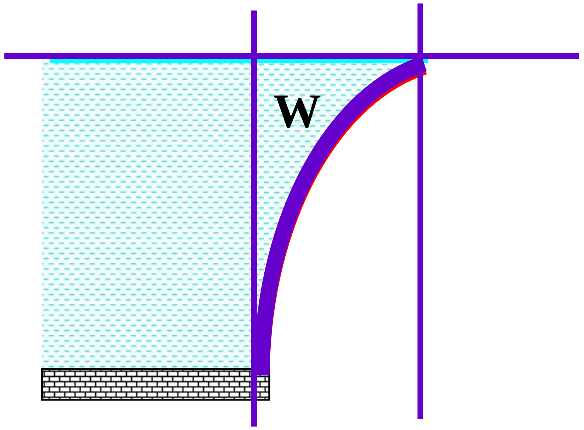
1.- *Surface libre du liquide*

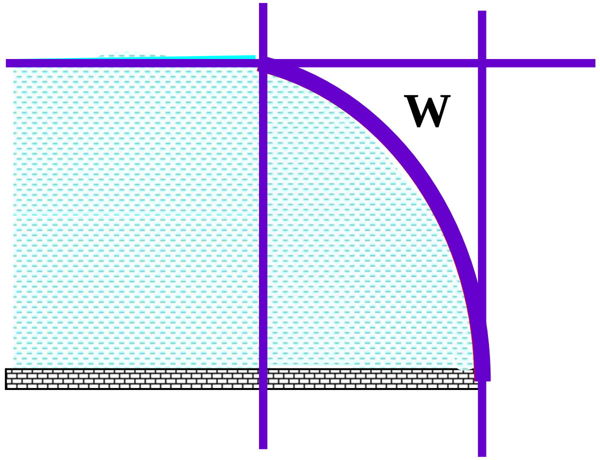
2.- *La surface courbe AB*

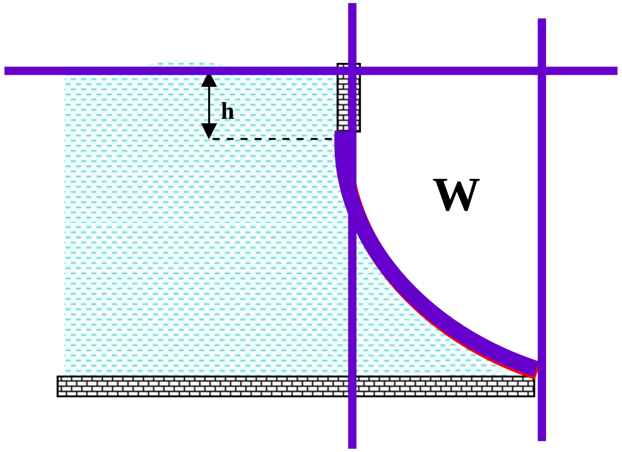
3.- *Les 2 verticales passant par les 2 extrémités de la surface courbe AB*

CE QU'IL FALLAIT RETENIR

Autres exemples de délimitation du volume W :







1.- Surface libre du liquide

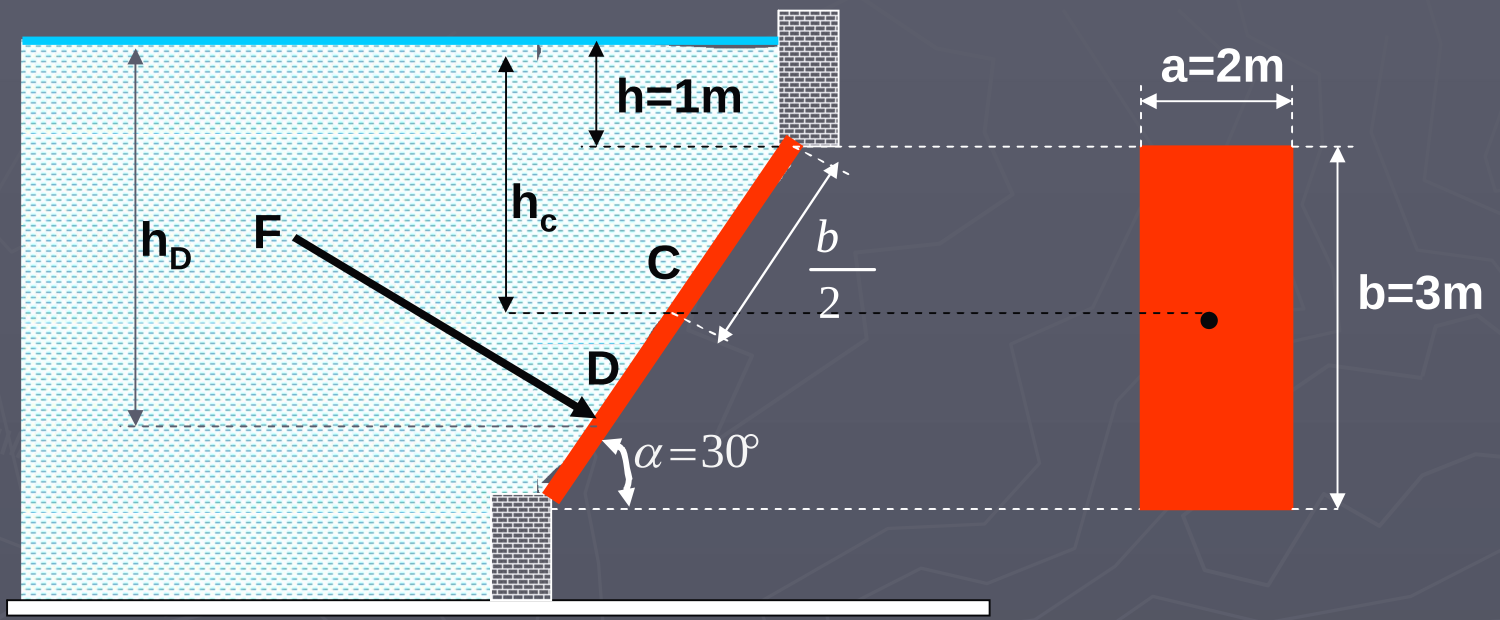
2.- La surface courbe AB

3.- Les 2 verticales passant par les 2 extrémités de la surface courbe AB

EXERCICES D'APPLICATION

Surface plane : Exercice 1

Le schéma montre une vanne AB rectangulaire retenant un niveau d'eau et immergée à une profondeur h . Calculer la force de pression exercée par l'eau sur cette vanne ainsi que la profondeur h_D de son point d'application



- Calcul de la force F : $F = \rho_w g h_c A$

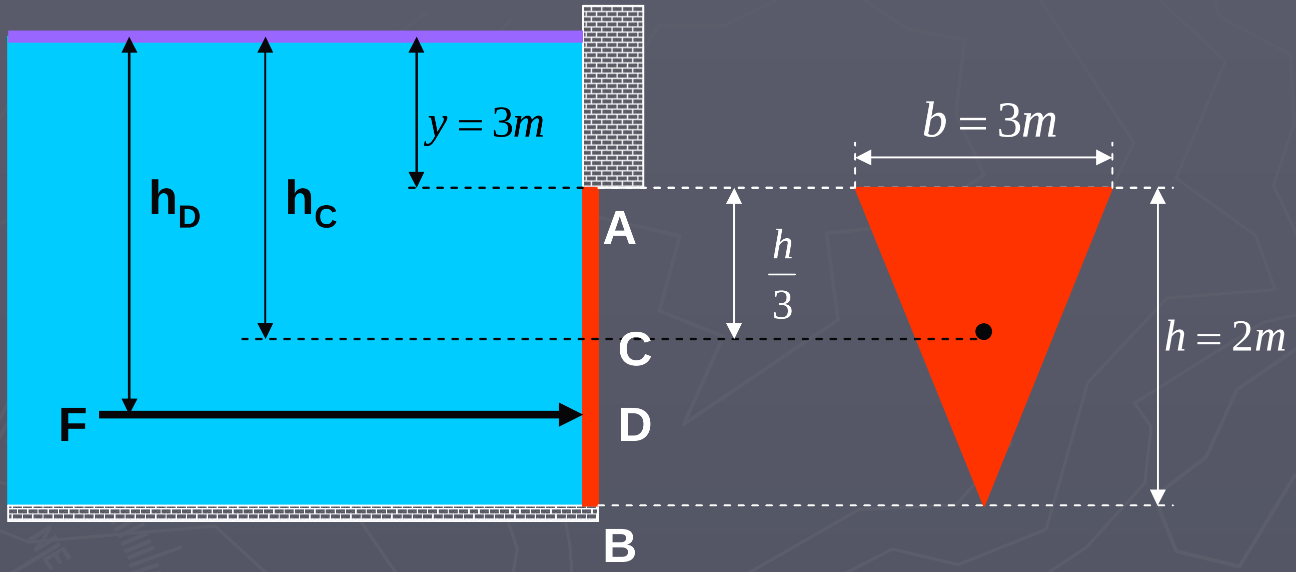
$$\left.\begin{aligned} h_c &= \frac{b}{2}\sin\alpha + h \\ A &= ab \end{aligned}\right\} \quad F = \rho_\omega g\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + h\right)ab$$

Application numérique

$$F = 10^3 x 9{,}814\left(\frac{3}{2}\sin 30 + 1\right)2x3 = 51502\ N = 51{,}5\,KN$$

Surface plane : Exercice 2

La vanne AB est de forme d'un triangle isocèle de base **b=3m** et de hauteur **h=2m** . On demande de calculer la force de pression **F** exercée sur cette vanne ainsi que la profondeur **h_D** de son centre de poussée .



1.- Force de pression : $F = \rho_w g h_c A$

$$h_c = y + \frac{h}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3{,}7m$$

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{3.2}{2} = 3m^2$$

Application numérique :

$$\boxed{F = \rho_w g h_c A = 10^3.9{,}814.3{,}7.3 = 108935N \approx 109KN}$$

2.- Profondeur du centre de pression :

$$h_D = h_c + \frac{I_{CC}}{h_c A}$$

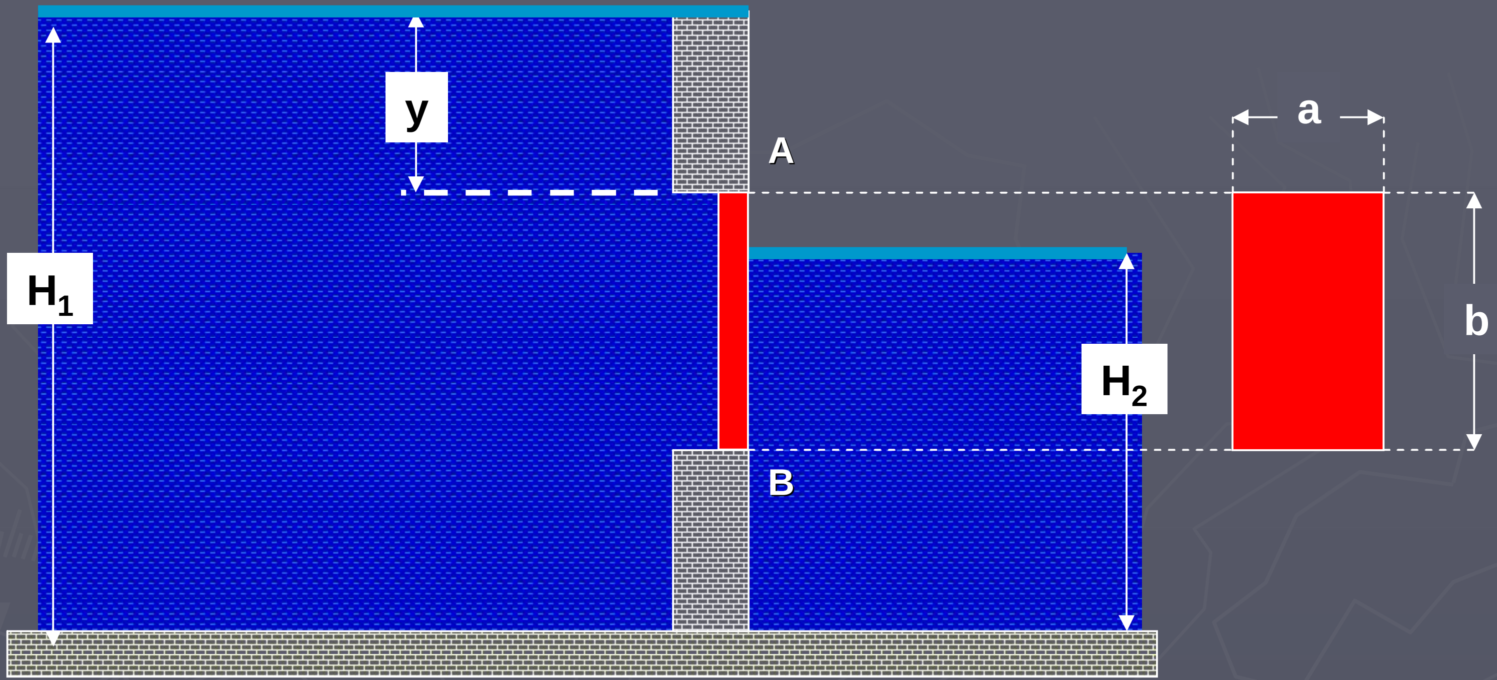
Moment d'inertie d'une **surface triangulaire** par rapport à un axe passant par son centre de gravité :

$$I_{CC} = \frac{bh^3}{36}$$

D'où :

$$h_D = h_c + \frac{I_{CC}}{h_c A} = h_c + \frac{bh^3}{36 h_c \frac{bh}{2}} = h_c + \frac{h^2}{18 h_c} = 3{,}7 + \frac{2^2}{18x3{,}7} = 3{,}76m$$

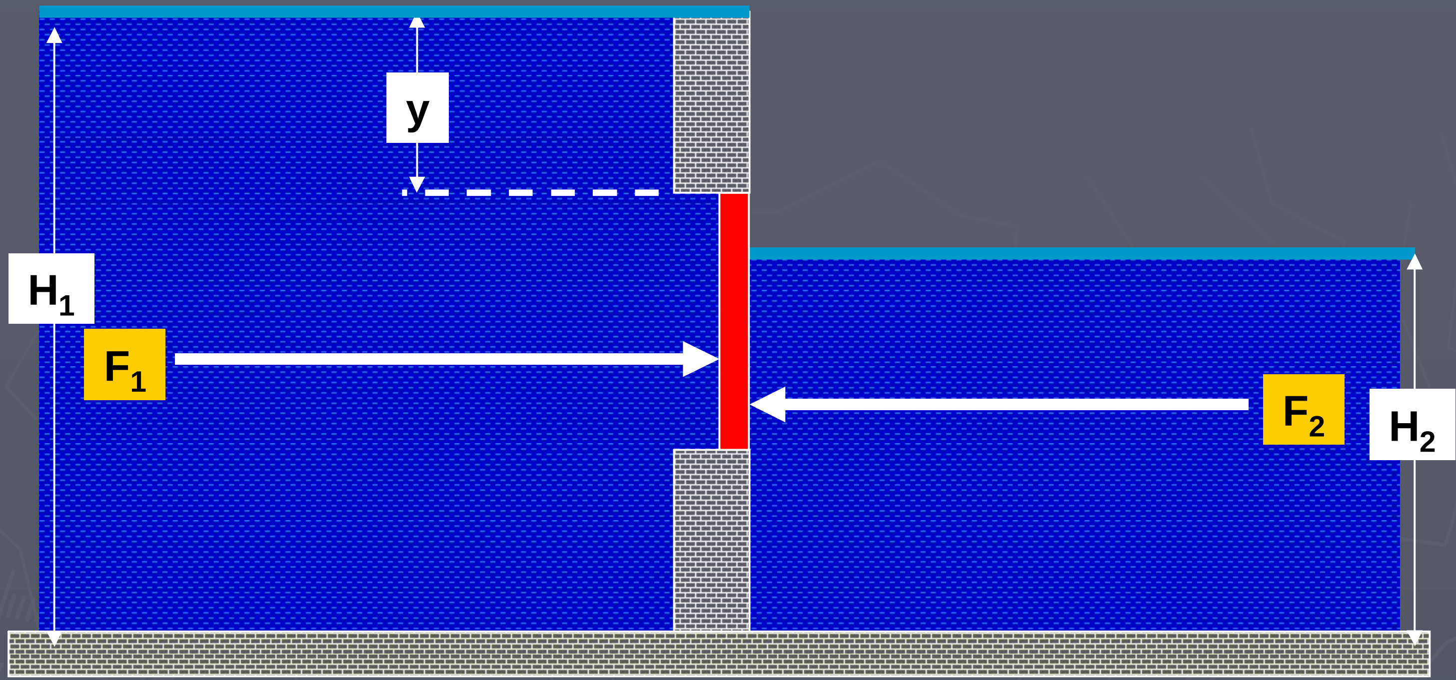
FORCE DE PRESSION SUR SURFACE PLANE : Exercice 3



***<u>Données</u>* : H_1 = 10 m ; H_2 = 8 m ; y = 1 m ; a = 2 m ; b = 4 m**

Calculer la résultante des forces de pression exercée sur la surface AB

FORCE RESULTANTE ?



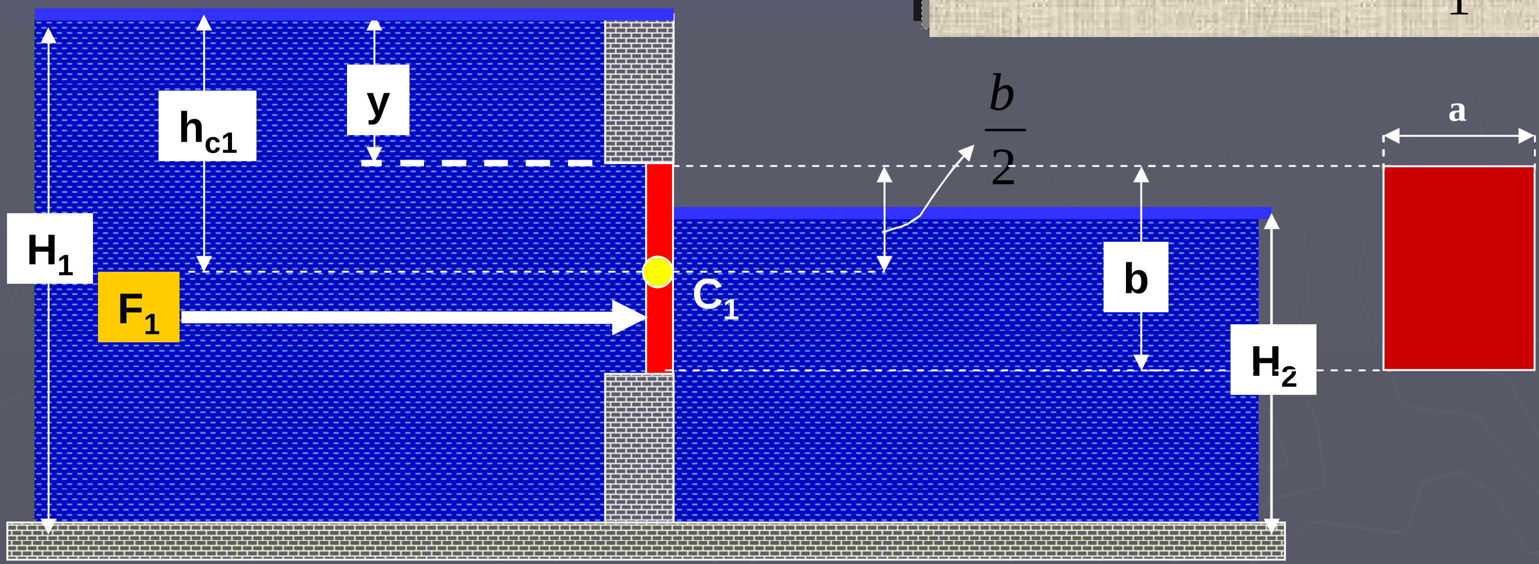
Les 2 forces F1 et F2 sont opposées

Force résultante :

$$F_R = F_1 - F_2$$

1.- CALCUL DE F1

$$F_1 = \rho_\omega g h_{c_1} A_1$$



$$h_{c_1} = \frac{b}{2} + y = \frac{4}{2} + 1 = 3m$$

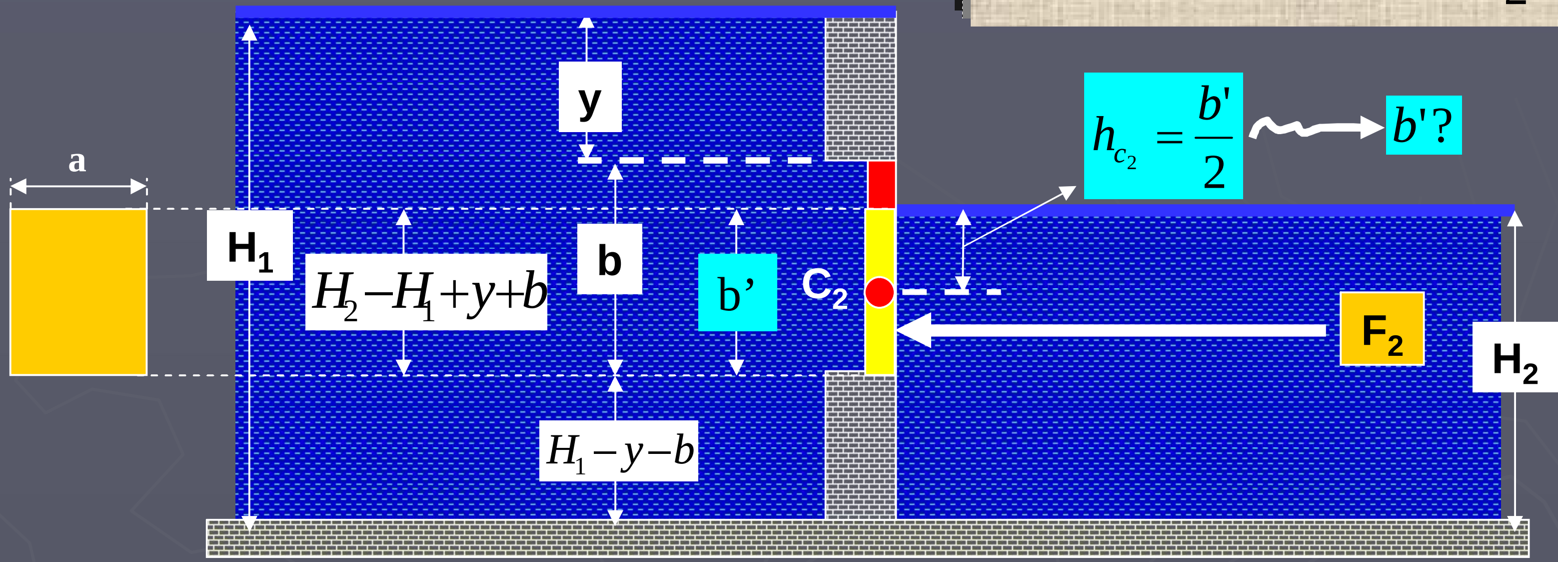
$$A_1 = axb = 2x4 = 8m^2$$

$$F_1 = \rho_\omega g \left(\frac{b}{2} + y \right) ab$$

$$F_1 \approx 235kN$$

2.- CALCUL DE F2

$$F_2 = \rho_\omega g h_{c_2} A_2$$



$$h_{c_1} = \frac{H_2 - H_1 + y + b}{2} = \frac{8 - 10 + 1 + 4}{2} = 1.5m$$

$$F_2 \approx 88kN$$

$$A_2 = a(H_2 - H_1 + y + b) = 2x(8 - 10 + 1 + 4) = 6m^2$$

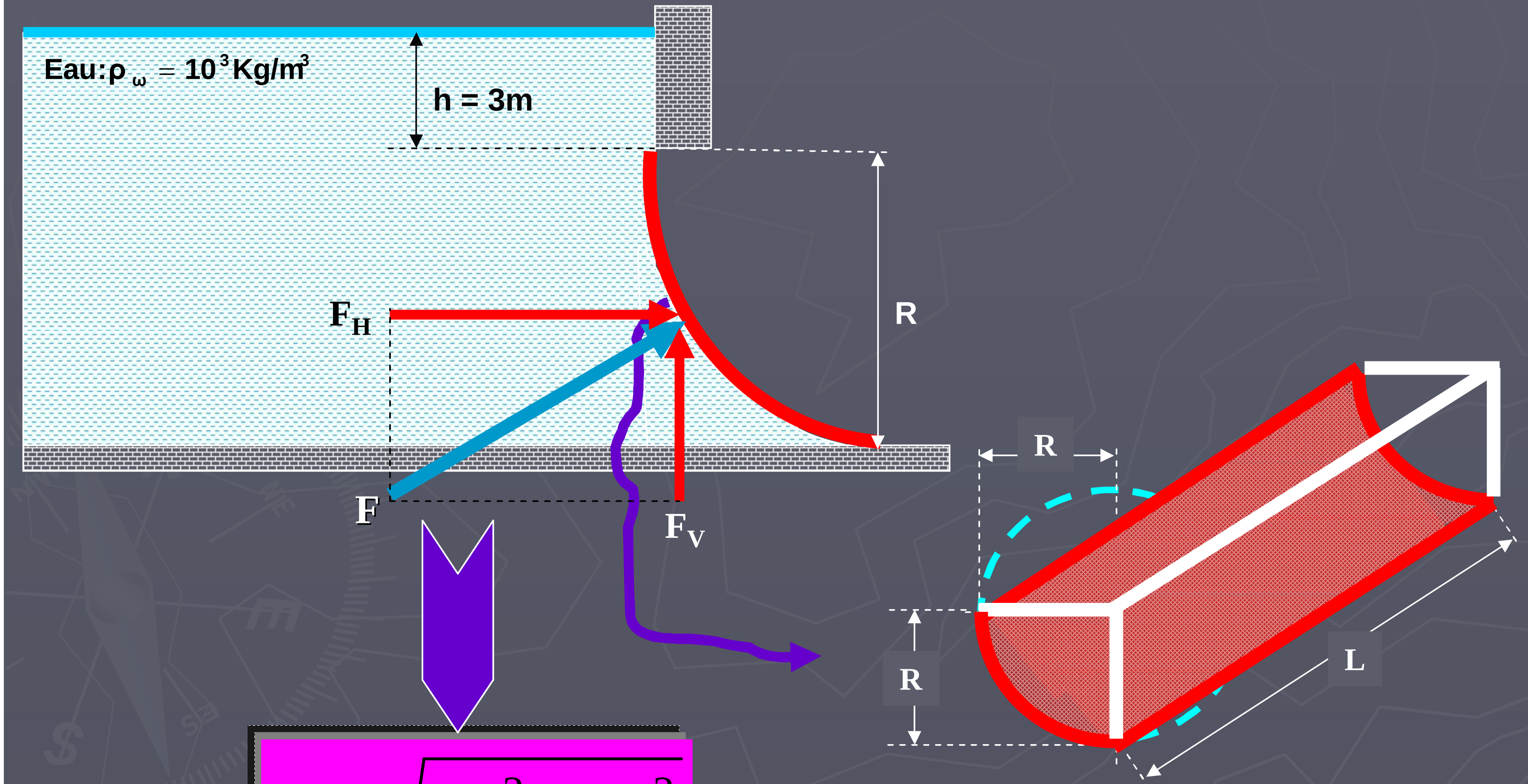
$$F_2 = \rho_\omega g \left(\frac{H_2 - H_1 + y + b}{2} \right) (H_2 - H_1 + y + b) a$$

2.- CALCUL DE LA RESULTANTE Fr

$$F_R = F_1 - F_2 = 235 - 88 = 147kN$$

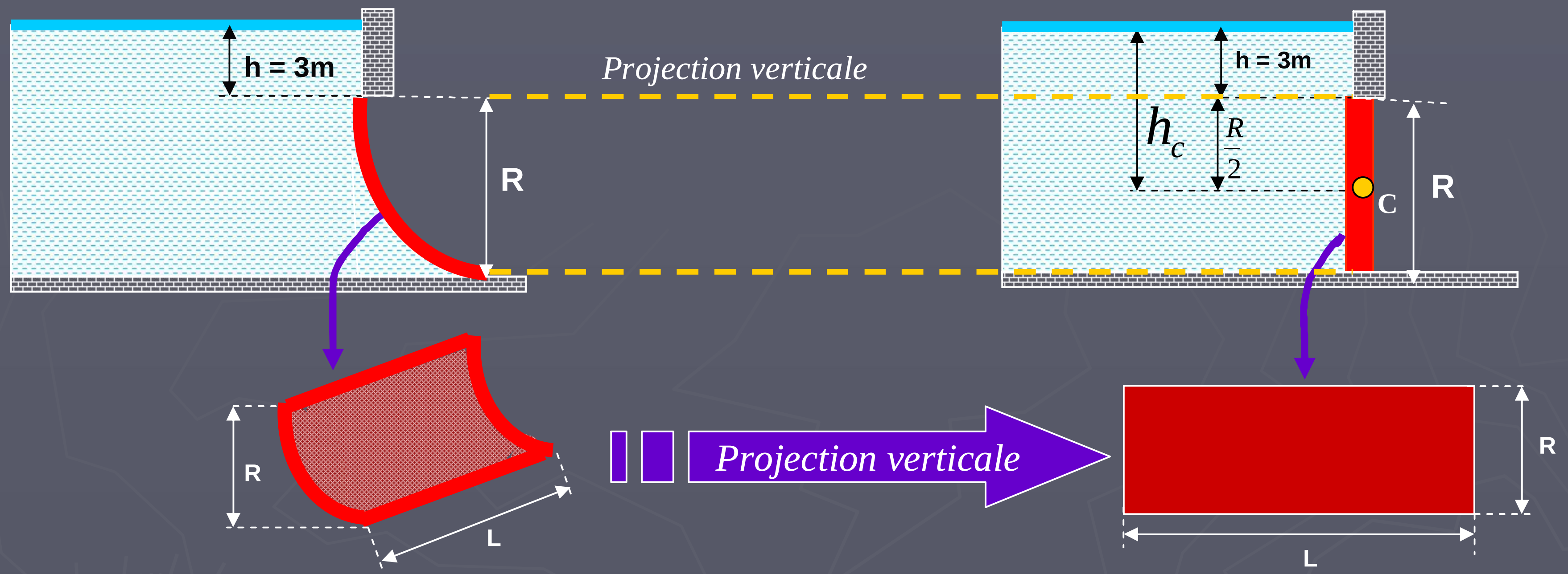
Surface courbe : Exercice 1

Une vanne radiale est localisée à la base d'un mur vertical . La largeur de la vanne est L = 5m et son rayon R = 4m . Déterminer la force résultante exercée sur cette vanne



$$F = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}$$

a.- Calcul de la composante horizontale F_H :



$$F_H = \rho_\omega g h_c A$$

$$A = RL = 4 x 5 = 20\ m^2$$

$$h_c = \frac{R}{2} + h = \frac{4}{2} + 3 = 5\ m$$

$$F_H = \rho_\omega g h_c A = \rho_\omega g \left(\frac{R}{2} + h \right) (RL)$$

$$F_H = 981400 N = 981{,}4 KN$$

b.- Calcul de la composante verticale :

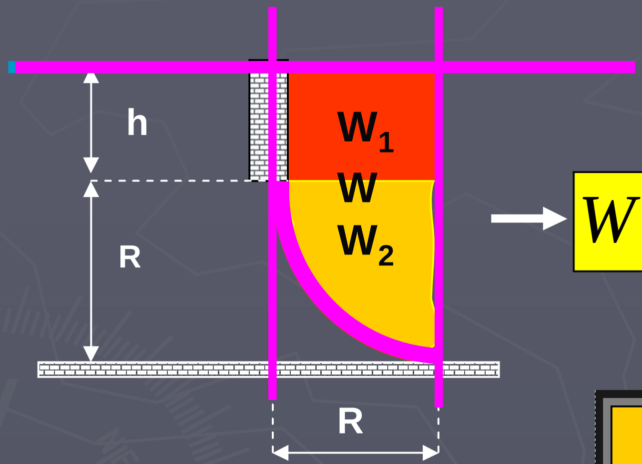
$$\boxed{F_V = \rho_\omega g W}$$

- **Détermination du volume W :**

1.- Surface libre du liquide

2.- La surface courbe

3.- Les verticales des 2 extrémités de la surface courbe



$$W = W_1 + W_2$$

$$W_1 = RhL$$

$$W_2 = \frac{\pi R^2}{4} L$$

$$F_V = \rho_\omega g W = \rho_\omega g \left(W_1 + W_2\right) = \rho_\omega g \left(RhL + \frac{\pi R^2}{4} L\right)$$

$$F_V = \rho_\omega g \left(h + \frac{\pi R}{4}\right) RL$$

$$F_V = 1205159\, N \approx 1205\, kN$$

c.- Calcul de la force résultante F :

$$F_H = 981.4kN$$

$$F_V = 1205 \ kN$$

$$F_R = \sqrt{F_H^{\ 2} + F_V^{\ 2}}$$

$$F_R = \sqrt{981.4^2 + 1205^2} = 1554KN$$

$$F = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}$$

$$F = \sqrt{9814^2 + 1773^2} \approx 9972\,kN$$