Université de Djilali Bounaàma	**Faculté des Sciences et de la Téchnologie**
Département : Mathématique et Informatique	**Niveau :** L3 Mathématique. 2020/2021
Série : Inrégrales de Lebesgue.	

Exercice 1 :

1 Soit $f_n : x \mapsto \min(n, \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}})$ définie sur $[0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n d\mu = 0.$$

Exercice 2 :

2 Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[), \lambda_1)$ Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-n(\sin(x)+3)\cos^2(x)} f(x)dx$.

Exercice 3 :

3 Considérons pour $n > 0$, $f_n = -\frac{1}{n}1_{[0,n]}$.

a) Justifier que (f_n) converge uniformément vers une fonction limite f que l'on déterminera.

b) Justifier que $\liminf \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$.

Exercice 4 :

4 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx$.

Exercice 5 :

5 a) Soit $n \geq 1$. Justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx$ existe.

b) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx.$$

Exercice 6 :

6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, définissons $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}dx$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge vers e^x quand n tend vers $+\infty$.

b) Si $\alpha > 1$, montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

c) Si $\alpha \leq 1$, montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = +\infty$.

Exercice 7 :

7 Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \dfrac{5x}{n}\right)^n x^3 dx$.

Exercice 8 :

8 Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge uniformément vers f.

a) Si $\mu(X) < +\infty$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

b) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ existe. Est-ce que l'on va avoir la même conclusion qu'au premier point ?

Exercice 9 :

9 Si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge vers $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

a) Si pour tout $n \geq 0$, $f_n \geq 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ (on appliquera le lemme de Fatou à la suite $g_n = f_n + f - |f_n - f|$).

b) En s'intéressant à la suite (f_n) définie par $f_n = 1_{[n,n+1]} - 1_{[n+1,n+2]}$ montrer que la convergence du point a) est fausse si l'on a pas l'hypothèse de positivité.

Exercice 10 :

10 Si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

(on pourra appliquer la méthode de l'exercice précédent).